

Exercice

①

1) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements, alors

$$\forall B \in \mathcal{F} \text{ (la tribu)}: \boxed{P(B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(B/A_n) \cdot P(A_n)}$$

2) Posons :

$$\begin{cases} F : (\text{il mange une "4-fromages"}) \\ R : (\text{_____ "régina"} \text{_____}) \\ S : (\text{_____ "4-saisons"} \text{_____}) \end{cases}$$

F_n : (il mange une "4-fromages" le n -ième jeudi)

R_n : (_____ "régina" _____)

S_n : (_____ "4-saisons" _____)

* (F_n, R_n, S_n) est un système complet d'événements, donc :

$$f_{n+1} = P(F_{n+1}) = P(F/F_n) \cdot P(F_n) + P(F/R_n) \cdot P(R_n) + P(F/S_n) \cdot P(S_n)$$

$$\text{donc } \underline{f_{n+1} = \frac{1}{3} f_n + \frac{1}{4} r_n + \frac{1}{4} s_n}$$

De $\hat{m}$ avec R puis avec S ;

(2)

$$\begin{cases} \pi_{n+1} = \frac{1}{3} s_n + \frac{1}{4} \pi_n + \frac{1}{2} d_n \\ d_{n+1} = \frac{1}{3} s_n + \frac{1}{2} \pi_n + \frac{1}{4} d_n \end{cases}$$

$$d : p_{n+1} = A p_n \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

3) def

```
from math import *
```

```
def p(n):  
    if n==0:  
        return([9/20,1/4,3/10])  
    else:  
        q=p(n-1)  
        aux=[  
            q[0]/3+q[1]/4+q[2]/4,  
            q[0]/3+q[1]/4+q[2]/2,  
            q[0]/3+q[1]/2+q[2]/4  
        ]  
        return(aux)
```

```
In [6]: p(100)  
#ut[6]: [0.27272727272727265, 0.36363636363636354,  
0.36363636363636354]
```

```
In [5]: p(200)  
Out[5]: [0.27272727272727265, 0.36363636363636354,  
0.36363636363636354]
```

4°) La somme des elts des colonnes vaut 1 donc :

(3)

$${}^t A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc 1 valeur propre de ${}^t A$: $\chi_{{}^t A}(1) = 0$.

Or $\chi_A(n) = \chi_{{}^t A}(n)$ donc 1 valeur propre de A

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = n \\ \frac{n}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = y \\ \frac{n}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 3y - 3z = 0 & L_1 = L_2 + L_3 \\ 4x - 9y + 6z = 0 & L_2 \\ 4n + 6y - 7z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4n - 9y + 6z = 0 & L_2 \\ 15y - 15z = 0 & L_3 - L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{3}{4}z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \quad \underline{d'} \quad E_1(1) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

$$5°) \begin{cases} \frac{n}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = -\frac{n}{4} \\ \frac{n}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = -\frac{y}{4} \\ \frac{n}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = -\frac{z}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7n + 3y + 3z = 0 \\ 4n + 6y + 6z = 0 \\ 4n + 6y + 6z = 0 \end{cases}$$

(4)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 6y + 6z = 0 & (2L_1) \\ 4x + 6y + 6z = 0 & (L_2 = L_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \quad \mathcal{L}' : \boxed{E_{-1/4}(f) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$$

6°) Comme $\text{Tr}(f) = \text{Tr}(A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \underbrace{1 + (-\frac{1}{4}) + \lambda}_{\text{Somme des vp}}$

On a donc $\lambda = \frac{1}{12}$ valeur propre de A

$\mathcal{L}' : A$ est diagonalisable (3 valeurs propres 2 à 2 $\neq$: "2 en car.")
et $\text{sp}(A) = \left\{ \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{12} \right\}$

7°) $\chi_A(n) = (n-1)(n+\frac{1}{4})(n-\frac{1}{12})$ et comme χ_A et π_A

ont les mêmes racines et que $\pi_A \mid \chi_A$, on conclut :

$$\boxed{\pi_A(n) = \chi_A(n) = (n-1)(n+\frac{1}{4})(n-\frac{1}{12})}$$

8°) $\forall n \in \mathbb{N}^* : X^n = (X-1)(X+\frac{1}{4})(X-\frac{1}{12})Q_1 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$

$$\begin{cases} X=1 : \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ X=-\frac{1}{4} : \frac{\alpha}{16} - \frac{\beta}{4} + \gamma = -\frac{1}{4} \\ X=\frac{1}{12} : \frac{\alpha}{144} + \frac{\beta}{12} + \gamma = \frac{1}{12} \end{cases}$$

puis on résout d'où les valeurs α, β, γ de l'énoncé

(5)

On en déduit en l'appliquant à A :

$$A^n = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$$

Comme $1^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, $(-1/4)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $(1/12)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on

a par TG (sur les suites d'1 evn) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \frac{48}{55} A^2 + \frac{9}{55} A - \frac{1}{55} I_3$$

g) On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 5/18 & 13/48 & 19/48 \\ 13/36 & 19/48 & 1/3 \\ 13/36 & 1/3 & 19/48 \end{pmatrix}$ et donc :

$$L = \frac{48}{55} A^2 + \frac{9}{55} A - \frac{1}{55} I_3 = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } L p_0 = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9/20 \\ 1/4 \\ 9/10 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$d' : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \frac{3}{11}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{4}{11}$$