

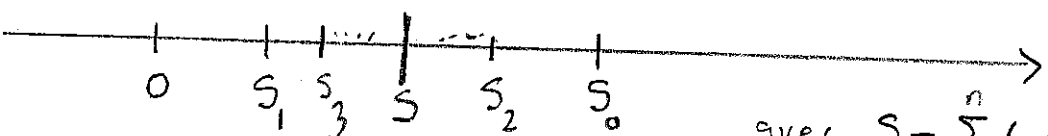
Exercice 3

1.) Par TSA, la série $(\sum (-1)^n u_n)$ converge et R_n existe
 ↳ grâce à i) et iii)

$$R_n = (-1)^n u_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k u_k = (-1)^n u_n + R_{n+1}$$

donc $R_n - R_{n+1} = (-1)^n u_n$

Or par le théorème TSA, on sait que si $S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u_k$

on a :  avec $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$

donc S_{n-1} et S_n sont de part et d'autre de S d'où :

$R_n = S - S_{n-1}$ et $R_{n+1} = S - S_n$ sont de signes opposés.

d'où $|R_n - R_{n+1}| = \left| \underbrace{\pm |R_n| - (\mp |R_{n+1}|)}_{\substack{\uparrow \\ \uparrow}} \right| = \left| \pm (|R_n| + |R_{n+1}|) \right|$
 $= |R_n| + |R_{n+1}| = |(-1)^n u_n| = u_n$

d $\forall n \in \mathbb{N} \quad |R_n| + |R_{n+1}| = u_n$

2.) $\forall Q \in \mathbb{N} \quad \sum_{p=0}^Q (-1)^p [u_{n+p} - u_{n+p+1}] = \sum_{p=0}^Q (-1)^p u_{n+p} - \sum_{p=0}^Q (-1)^p u_{n+p+1}$
 $= (-1)^n \sum_{p=0}^Q (-1)^{n+p} u_{n+p} - (-1)^{n-1} \sum_{p=0}^Q (-1)^{n+p+1} u_{n+p+1}$

②

$$\text{donc } \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p [u_{n+p} - u_{n+p+1}] = (-1)^n \left[\sum_{i=n}^{n+\infty} (-1)^i u_i + \sum_{i=n+1}^{n+\infty} (-1)^i u_i \right]$$

$$\xrightarrow{Q \rightarrow +\infty} (-1)^n (R_n + R_{n+1})$$

Toujours d'après TSA et le dessin du 1), R_n positif si n est pair et négatif sinon, $(-1)^n R_n \geq 0$ donc $(-1)^n R_n = |R_n|$.

$$\text{d'où } (-1)^n (R_n + R_{n+1}) = |R_n| - |R_{n+1}|$$

4. la série $\left(\sum (-1)^p [u_{n+p} - u_{n+p+1}] \right)$ converge et
sa somme vaut $|R_n| - |R_{n+1}|$

Si on pose $v_n = u_n - u_{n+1}$, l'hypothèse iv) assure que (v_n) est décroissante, comme (u_n) décroît vers 0, on a $v_n \geq 0$ et $\lim v_n = 0$. Toujours grâce à TSA pour $(\sum (-1)^n v_n)$ on a $R'_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k v_k$ et du signe de n

soit $(-1)^n R'_n \geq 0$.

$$\text{On } \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p [u_{n+p} - u_{n+p+1}] = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k-n} v_k = (-1)^{-n} R'_n = (-1)^n R'_n \geq 0$$

4 $\forall n \in \mathbb{N} \quad |R_n| - |R_{n+1}| \geq 0$ et $(|R_n|)$ décroissante

3.) $|R_n| + |R_{n+1}| \geq |R_n| + |R_n|$ grâce à $\nearrow$
donc $|u_n| \geq 2|R_n|$ d'où $|R_n| \geq \frac{|u_n|}{2}$

De même $u_{n-1} = |R_{n-1}| + |R_n| \geq 2|R_n|$ d'où $|R_n| \leq \frac{u_{n-1}}{2}$ ③

$$d. \quad \boxed{\forall n \geq 1 \quad \frac{u_n}{2} \leq |R_n| \leq \frac{u_{n-1}}{2}}$$

4.) Comme $u_{n-1} > 0$, $\forall n \geq 1$ on a $\frac{u_n}{2u_{n-1}} \leq \frac{|R_n|}{u_{n-1}} \leq \frac{1}{2}$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, donc par théorème

d'encadrement : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|R_n|}{u_{n-1}} = \frac{1}{2}$ donc $|R_n| \sim \frac{u_{n-1}}{2}$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = 1$, $u_{n-1} \sim u_n$ et comme $|R_n| = (-1)^n R_n$,

on conclut : $\boxed{R_n \sim (-1)^n \frac{u_n}{2}}$

5.) Posons $u_k = \frac{\ln k}{k}$ pour $k \neq 0$ et $u_0 = 1$

on a facilement i). Le ii) grâce à $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(k+1)}{\ln k} = \frac{\ln k + \ln(1 + \frac{1}{k})}{\ln k} = \frac{\ln k + \ln(1 + \frac{1}{k})}{\ln k}$

Le iii) par croissance comparée et par

la décroissance de la fonction $g(t) \mapsto \frac{\ln t}{t}$:

$$g'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$$

0	e	$+\infty$
+	0	-
$-\infty$	$\nearrow \frac{1}{e}$	$\searrow 0$

donc $(u_k)_{k \geq 3}$ est décroissante

Le iv) :

$$u_{n+2} - u_{n+1} \geq u_{n+1} - u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \leq \frac{u_n + u_{n+2}}{2} \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow f(n+1) \leq \frac{f(n) + f(n+2)}{2} \quad \text{et} \quad n+1 = \frac{n + n+2}{2} \quad \text{d'où}$$

pour avoir (iv) il suffit que f soit convexe

$$\forall t > 0 \quad f''(t) = \frac{-3 + 2 \ln t}{t^3} \geq 0 \Leftrightarrow -3 + 2 \ln t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq e^{\frac{3}{2}} \approx 4.49 \dots$$

d'où (u_n) vérifie iv à partir de $n \geq 5$.

On vérifie facilement que tous les résultats des questions précédentes restent valable si l'on a les hypothèses i, ii, iii, iv qu'à partir de $n=5$

$$d : \quad R_n = a_n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{p_k k}{k} \sim (-1)^n \frac{p_{2n}}{2n}$$