exercice

le 5 gagne

1) Gagn. →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 |
| 2 | 1 | 4 | 3 | 6 | 7 |

↑ perdant

Notons $J_n$ : "$j_n$ joue" et $G_n$ : "$j_n$ gagne"

On a $J_n \cap G_n = G_n$ car $G_n \subset J_n$

donc $p_n = \mathbb{P}(G_n) = \mathbb{P}(G_n \cap J_n)$

$$= \mathbb{P}(G_n / J_n)\, \mathbb{P}(J_n)$$

s'il joue, il doit gagner 3 parties pour gagner le jeu

donc $\mathbb{P}(G_n / J_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ par indépendance des parties.

d'où $\boxed{p_n = \frac{1}{8} q_n}$

2a) On a clairement $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1$ (ils sont sûrs de jouer).

b) Notons $J_n(k)$ : "$j_n$ joue pour la 1ère fois contre $j_k$"

$J_n(k) = \phi$ si $k \leq n-3$ (et $n-3 \geq 2$ car $n \geq 5$). En effet

$j_k$ joue pour la 1ère fois contre $j_p$ avec $p \leq k-1$, puis il

joue (s'il gagne) contre $j_{k+1}$ puis $j_{k+2}$ et $k+2 \leq n-1 < n$

Comme $j_k$ joue au max. 3 parties, $j_k$ ne rencontre jamais

$j_n$.

d'autre part, $J_n = \coprod_{k=1}^{n-1} J_n(k) = J_n(n-1) \amalg J_n(n-2)$. (2)

Donc $q_n = P(J_n) = P(J_n(n-1)) + P(J_n(n-2))$

Or $J_n(n-1) = J_n(n-1) \cap J_{n-1}$ car si on a $J_n(n-1)$

alors on a $J_{n-1}$.

D'où $P(J_n(n-1)) = P(J_{n-1}) \times P(J_n(n-1) / J_{n-1})$

$= q_{n-1} \times \frac{1}{2}$

↳ car $J_{n-1}$ doit gagner la 1ère partie.

De m̂ $P(J_n(n-2)) = q_{n-2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$

↳ $J_{n-2}$ doit gagner les 2 1ères parties.

d'. $\boxed{\forall n \geq 5 : q_n = \frac{1}{2} q_{n-1} + \frac{1}{4} q_{n-2}}$

3°) La récurrence de 2°) b) ne relie que $q_3, q_4, q_5, q_6 \dots$

Pour faciliter les calculs, on va introduire la suite $(u_n)$ telle que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = \frac{1}{2} u_{n+1} + \frac{1}{4} u_n \\ u_3 = u_4 = q_3 = q_4 = 1 \end{cases}$$

On aura donc $\forall n \geq 3$ : $q_n = u_n$

Recherche de $u_0, u_1, u_2$ :

$u_4 = \frac{1}{2} u_3 + \frac{1}{4} u_2$ d'où $\boxed{u_2 = 2}$

$u_3 = \frac{1}{2} u_2 + \frac{1}{4} u_1$ d'où $\boxed{u_1 = 0}$

$u_2 = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{4} u_0$ d'où $\boxed{u_0 = 8}$

L'équation caractéristique est $x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ de sol : $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$

cqs $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ avec $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$

avec $u_0$ et $u_1$ : $\begin{cases} \lambda + \mu = 8 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 0 \end{cases}$

d'où : $\boxed{\forall n \geq 3 : q_n = \left(4 - \frac{4}{5}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \left(4 + \frac{4}{5}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n}$

$\boxed{\text{et } p_n = q_n / 8}$