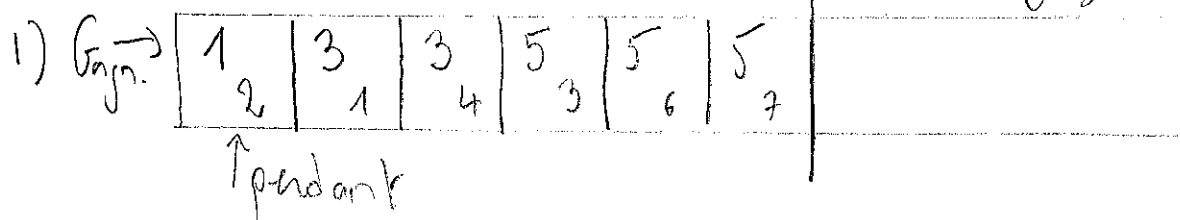


exercice

↳ 5 gagne

①



Notons J_n : "j_n joue" et G_n : "j_n gagne"

$$\text{On a } J_n \cap G_n = G_n \text{ car } G_n \subset J_n$$

$$\begin{aligned} \text{donc } p_n &= P(G_n) = P(G_n \cap J_n) \\ &= P(G_n | J_n) P(J_n) \end{aligned}$$

s'il joue, il doit gagner 3 parties pour gagner le jeu
donc $P(G_n | J_n) = (\frac{1}{2})^3$ par indépendance des parties.

$$\text{d' } \boxed{p_n = \frac{1}{8} q_n}$$

2a) on a clairement $\underline{q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1}$ (ils sont sûrs de jouer).

b) Notons $J_n(k)$: "j_n joue pour la $k^{\text{ème}}$ fois contre j_k"
 $J_n(k) = \emptyset$ si $k \leq n-3$ (et $n-3 \geq 2$ car $n \geq 5$). En effet

j_n joue pour la $1^{\text{ère}}$ fois contre j_p avec $p \leq k-1$, puis il
joue (s'il gagne) contre j_{k+1} puis j_{k+2} et $k+2 \leq n-1$
 $< n$

Comme j_n joue au max. 3 parties, j_k ne rencontre jamais
j_n.

d'autre part, $J_n = \prod_{k=1}^{n-1} J_n(k) = J_n(n-1) \pm J_n(n-2)$. (2)

Donc $q_n = \mathbb{P}(J_n) = \mathbb{P}(J_n(n-1)) + \mathbb{P}(J_n(n-2))$

Or $J_n(n-1) = J_n(n-1) \cap J_{n-1}$ car si on a $J_n(n-1)$

alors on a J_{n-1} .

d'où $\mathbb{P}(J_n(n-1)) = \mathbb{P}(J_{n-1}) \times \mathbb{P}(J_n(n-1) | J_{n-1})$

$$= q_{n-1} \times \frac{1}{2}$$

↳ car J_{n-1} doit gagner sa 1^{ère} partie.

de même $\mathbb{P}(J_n(n-2)) = q_{n-2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$

↳ J_{n-2} doit gagner ses 2 1^{ères} parties.

$$\text{d'où : } \forall n \geq 5 : q_n = \frac{1}{2} q_{n-1} + \frac{1}{4} q_{n-2}$$

3) La récurrence de 2) b) ne relie que $q_3, q_4, q_5, q_6, \dots$

Pour faciliter les calculs, on va introduire la suite

$$(u_n) \text{ telle que } \left| \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = \frac{1}{2} u_{n+1} + \frac{1}{4} u_n \\ u_3 = u_4 = q_3 = q_4 = 1 \end{array} \right.$$

On aura donc $\forall n \geq 3 : q_n = u_n$

(3)

Rechercher de u_0, u_1, u_2 :

$$u_4 = \frac{1}{2} u_3 + \frac{1}{4} u_2 \quad \text{d'où} \quad \boxed{u_2 = 2}$$

$$u_3 = \frac{1}{2} u_2 + \frac{1}{4} u_1 \quad \text{d'où} \quad \boxed{u_1 = 0}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{4} u_0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{u_0 = 8}$$

L'équation caractéristique est $x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ de sol : $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$

q.s $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ avec $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$

$$\text{avec } u_0 \text{ et } u_1 : \begin{cases} \lambda + \mu = 8 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où : } \forall n \geq 3 : q_n = \left(4 - \frac{4}{5}\sqrt{5}\right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \left(4 + \frac{4}{5}\sqrt{5}\right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$$

$$\text{et } p_n = q_n / 8$$