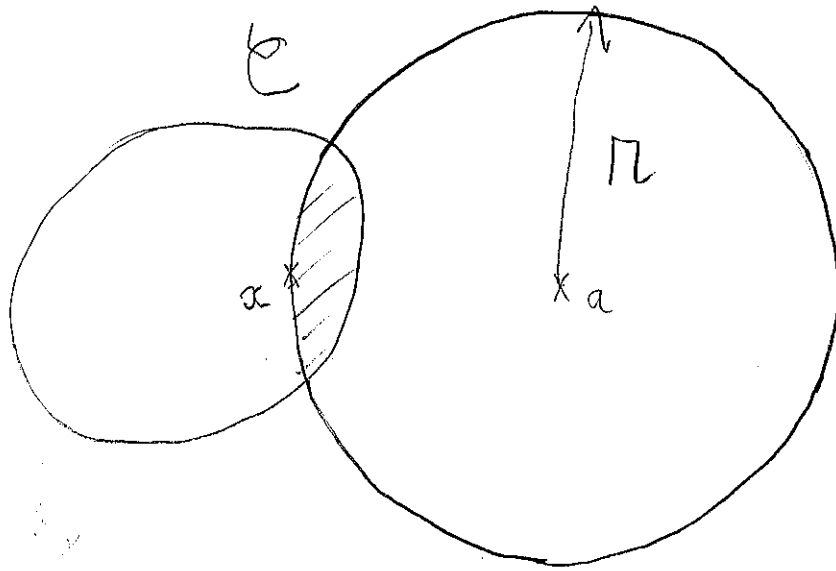


(1)

Pb 2

1) a)

au cas où $r=a!$

soit $x \in C$ ($C \neq \emptyset$) soit $r = \|x - a\| + 1$ $x \in B_F(a, r) \cap C$
 $\underline{\square} B_F(a, r) \cap C \neq \emptyset$ > 0

b) $B_F(a, r) \cap C$ est donc fermé (intersection de fermé)
 et borné (inclus dans $B_F(a, r)$) donc compact de $\mathbb{R}^n$
 (non vide)

Soit $f: B_F(a, r) \cap C \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \|x - a\|$ f est continue (car 1-lipschitzienne)

d'où f est bornée et atteint ses bornes (T.B.A.):
 $\exists b \in B_F(a, r) \cap C \setminus f(b) = \|b - a\| = \min(\|x - a\|, x \in B_F(a, r) \cap C)$

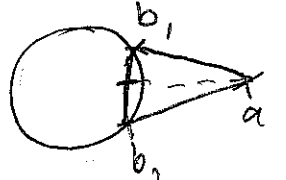


$\forall x \in \mathcal{C}$: si $x \in B_F(a, r)$: $\|x - a\| \geq \|b - a\|$, si

$x \notin B_F(a, r)$ alors $\|x - a\| > r \geq \|b - a\|$ car $b \in B_F(a, r)$

Comme $b \in \mathcal{C}$ on a $\boxed{d(a, \mathcal{C}) = \|b - a\|}$

supposons

c)  soit $d(a, \mathcal{C}) = \|b_1 - a\| = \|b_2 - a\|$ et $\underline{\underline{b_1 \neq b_2}}$

on "voit" m le dessin que $\frac{b_1 + b_2}{2} \in \mathcal{C}$ par convexité.

et $\|\frac{b_1 + b_2}{2} - a\| < \|b_1 - a\|$. Démonstration :

Poseons $b' = \frac{b_1 + b_2}{2} = \frac{1}{2}b_1 + (1 - \frac{1}{2})b_2 \in \mathcal{C}$ (convexe)

$$(b_1 - b_2 \mid b' - a) = (b_1 - b_2 \mid \frac{b_1 + b_2}{2} - a) = \frac{1}{2}(b_1 - b_2 \mid b_1 + b_2) - (b_1 - b_2 \mid a)$$

$$= \frac{1}{2} [\underbrace{\|b_1\|^2 - \|b_2\|^2 - 2(b_1 \mid a) + 2(b_2 \mid a)}_{=0}]$$

$$= \frac{1}{2} [\|b_1 - a\|^2 - \|a\|^2 - (\|b_2 - a\|^2 - \|a\|^2)]$$

$$= \frac{1}{2} (\|b_1 - a\|^2 - \|b_2 - a\|^2) = \frac{1}{2} (d(a, \mathcal{C})^2 - d(a, \mathcal{C})^2) = 0$$

$$\text{donc } b_1 - b_2 \perp b' - a \quad \text{d'où} \quad b_1 - a = b_1 - b' + b' - a \\ = \frac{b_1 - b_2}{2} + b' - a$$

$$\text{et grâce à Pythagore : } \|b_1 - a\|^2 = \frac{\|b_1 - b_2\|^2}{4} + \|b' - a\|^2$$

$$\text{d'où } \|b' - a\|^2 < \underbrace{\|b_1 - a\|^2}_{= d(a, \mathcal{C})^2} \text{ car } b_1 \neq b_2$$

$$\begin{matrix} b' \in \mathcal{C} \\ \text{Abuse} \end{matrix} \text{ donc } b_1 = b_2 \quad \underline{\text{cf}} \quad \boxed{b \text{ est unique}}$$

d) Dans $\mathbb{R}$, $\neq \mathcal{C} =]0, 1[$ et $a = 3$

(3)

$d(a, \mathcal{C}) = 2 \neq |b - a|, \forall b \in \mathcal{C}$: le projeté n'existe pas et $\mathcal{C}$ convexe.

$\neq \mathcal{C} = [0, 1] \cup [5, +\infty[$ et $a = 3$

$d(a, \mathcal{C}) = 2 = |1 - 3| = |5 - 3|$: le projeté n'est pas unique et $\mathcal{C}$ fermé.

$$\begin{aligned} 2) \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{C} \quad \|x - a\|^2 &= \|x - b + b - a\|^2 \\ &= \|x - b\|^2 + \underbrace{2(x - b | b - a)}_{\geq 0} + \|b - a\|^2 \\ &\geq \|b - a\|^2 \text{ et comme } b \in \mathcal{C}, \quad \underline{b = p_{\mathcal{C}}(a)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ On peut se l'indiquer : $[b, x] = \{tb + (1-t)x, t \in [0, 1]\}$

$$\text{donc } \forall t \in [0, 1], \|tb + (1-t)x - a\|^2 \geq \|b - a\|^2$$

$$\text{donc } \forall t \in [0, 1], \|(1-t)[x - b] + b - a\|^2 \geq \|b - a\|^2$$

$$\text{on développe : } (1-t)^2 \|x - b\|^2 + 2(1-t)(x - b | b - a) + \cancel{\|b - a\|^2} \geq \cancel{\|b - a\|^2}$$

$$\text{donc } \forall t \in [0, 1[: (1-t)\|x - b\|^2 + 2(x - b | b - a) \geq 0$$

$$\text{on fait tendre } t \xrightarrow{<} 1 : 0 + 2(x - b | b - a) \geq 0$$

$$\underline{\underline{(x - b | b - a) \geq 0}}$$

3) utilisation de 2) avec $b = p_{\mathcal{C}}(a)$ et $x = p_{\mathcal{C}}(a') \in \mathcal{C}$;

$$(p_e(a') - p_e(a) | p_e(a) - a) \geq 0 \quad (1)$$

En échangeant les rôles (symétriques) de a et a' , on a :

$$(p_e(a) - p_e(a') | p_e(a') - a') \geq 0$$

$$\text{donc } (p_e(a') - p_e(a) | a' - p_e(a')) \geq 0 \quad (2)$$

on additionne (1) et (2), par linéarité on a :

$$(p_e(a') - p_e(a) | p_e(a) - a + a' - p_e(a')) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (p_e(a') - p_e(a) | p_e(a) - p_e(a') + a' - a) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \|p_e(a') - p_e(a)\|^2 + (p_e(a') - p_e(a) | a' - a) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \|p_e(a') - p_e(a)\|^2 \leq - (p_e(a') - p_e(a) | a' - a)$$

$$\leq \|p_e(a') - p_e(a)\| \cdot \|a' - a\| \quad \text{par Cauchy-Schwarz}$$

$$\text{Si } \|p_e(a') - p_e(a)\| \neq 0, \text{ on a : } \|p_e(a) - p_e(a')\| \leq \|a - a'\|$$

$$\text{si } \underline{\hspace{2cm}} = 0 \quad \text{; } \underline{\hspace{2cm}} = 0 \leq \underline{\hspace{2cm}}$$

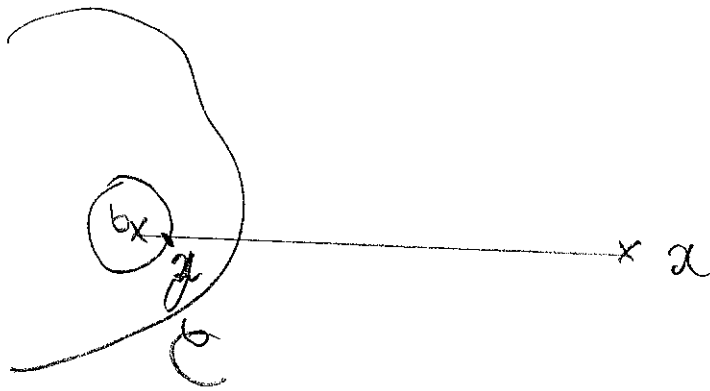
$$\underline{\forall (a, a') \in \mathbb{R}^n \quad \|p_e(a) - p_e(a')\| \leq \|a - a'\|}$$

On en déduit que p_e est 1-lipschitzienne de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et

$$\text{donc } \boxed{\text{continue sur } \mathbb{R}^n.}$$

4) Soit $x \notin \mathcal{C}$, si $b = p_{\mathcal{C}}(x) \in \mathcal{C}$ alors $\exists n > 0$ | (5)

$$B_F(b, r) \subset \mathcal{C}$$



$$\forall n \in \mathcal{C} \text{ et } \|y - n\| < \|n - b\|$$

$$y = b + \frac{x - b}{\|x - b\|} r \in B_F(b, r) \subset \mathcal{C} \quad \left(\begin{array}{l} \|b - n\| \neq 0 \\ \text{car } x \neq b \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \in \mathcal{C} \quad \notin \mathcal{C} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{et } y - x &= b - n + \frac{n - b}{\|n - b\|} r \\ &= (b - n) \left[1 - \frac{r}{\|n - b\|} \right] \end{aligned}$$

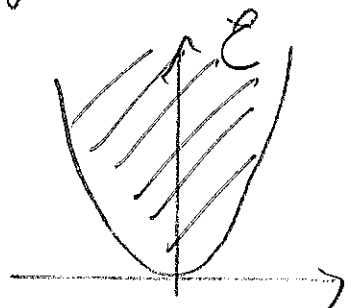
$$\|y - n\| = \|b - n\| \times \left| 1 - \frac{r}{\|n - b\|} \right|$$

Quitte à diminuer r , on peut supposer que $r < \|n - b\|$ et donc

$$\|y - n\| < \|b - n\| \text{ absurde } (\|b - n\| = \min_{y \in \mathcal{C}} \|y - n\|)$$

$$d^0 \quad \boxed{x \notin \mathcal{C} \Rightarrow p_{\mathcal{C}}(x) \neq 0}$$

$$5) a) \mathcal{C} = f^{-1}([0, +\infty[) \text{ avec } f(n, y) = y - n^2$$



Comme f est continue (TG) sur $\mathbb{R}^2$ et $[0, +\infty[$ fermé (6)

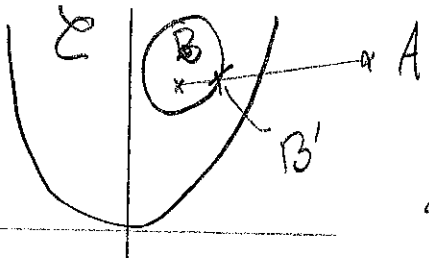
on a $\mathcal{C}$ fermé

$$\forall (x, x') \in \mathcal{C}^2 \quad \forall t \in [0, 1] \quad tx + (1-t)x' = (tx + (1-t)x', ty + (1-t)y')$$

$$\text{et } (tx + (1-t)x')^2 \leq tx^2 + (1-t)x'^2 \text{ car } n \mapsto n^2 \text{ est convexe sur } \mathbb{R} (f'' \geq 0)$$

$$\leq ty + (1-t)y'$$

d'où $tx + (1-t)x' \in \mathcal{C}$ cf $\mathcal{C}$ convexe (autre dmo: épigraphe)

b)  $B \in \mathcal{C}$ donc $b' \geq b^2$ si $b' > b^2$
alors $B \in \mathcal{C}' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$

or $\mathcal{C}' = f^{-1}(]0, +\infty[)$ est ouvert de $\mathbb{R}^2$ donc

$\exists r > 0 \mid \mathcal{B}_F(B, r) \subset \mathcal{C}'$ soit $B' = B + \frac{r}{\|A-B\|} (A-B)$

on a $\|B' - B\| = r$ donc $B' \in \mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ et d'autre part

$$\|B' - A\| = \|(B - A) \left(1 - \frac{r}{\|A-B\|}\right)\| = \left(1 - \frac{r}{\|A-B\|}\right) \|B - A\| < \|B - A\|$$

donc $\begin{cases} B' \in \mathcal{C} \\ \|B' - A\| < \|B - A\| = d(A, \mathcal{C}) \end{cases}$; Absurde cf $b' = b^2$
rem $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$

c) Ici $p_{\mathcal{C}}(A) = B$ et $X = (x, x^2) \in \mathcal{C}$ donc :

$$(X - B) \mid (B - A) \geq 0 \text{ d'où } (x - b)(b - a) + (x^2 - b^2)(b^2 - a^2) \geq 0$$

donc $\forall n \in \mathbb{R} \quad (n-b)[b-a+(n+b)(b^2-a')] \geq 0$

(7)

si $n > b$ on a donc $b-a+(n+b)(b^2-a') \geq 0$

qd $n \xrightarrow{>} b$, il vient : $b-a+2b(b^2-a') \geq 0$

si $n < b$ on a donc $b-a+(n+b)(b^2-a') \leq 0$

qd $n \xrightarrow{<} b$, il vient : $b-a+2b(b^2-a') \leq 0$

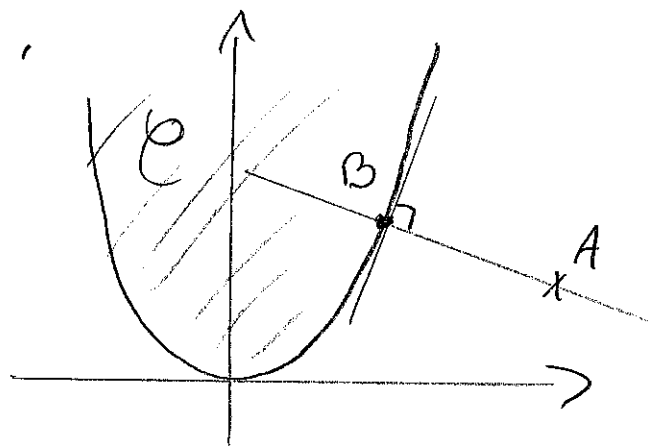
d $\boxed{(a-b)+2b(a'-b^2)=0}$

On reconnaît l'équation $n+2by=0$ dont le vecteur $\overrightarrow{BA}$ vérifie cette équation. cette droite $D/n+2by=0$

est la normale au vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2b \end{pmatrix}$ qui est

le vecteur dérivé de la fonction $\gamma: t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ en

B . La droite (AB) est donc la normale à la parabole en B .



1) Comme f est linéaire et $\mathbb{R}^n$ de dim. finie, f est continue sur $\mathbb{R}^n$ d'où $E_{\mathcal{H}}^+$ et $E_{\mathcal{H}}^-$ sont ouverts. (8)

$E_{\mathcal{H}}^+ \subset F = \{n \in \mathbb{R}^n \mid f(n) \geq \alpha\}$ et F fermé
donc $E_{\mathcal{H}}^+ \subset F$ réciproquement si $\alpha \in F$,

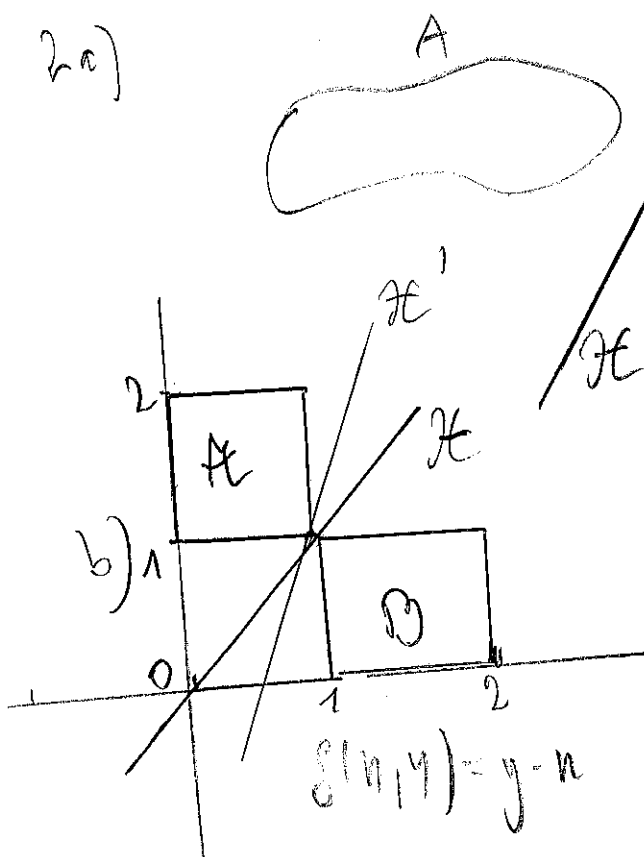
comme $f \neq 0$, $\exists n_0 \in E \setminus f(n_0) \neq 0$. Posons $\alpha = \frac{f(n_0)}{f(n_0)}$

on a $\alpha \in E$ et $f(\alpha) = 1$, soit $n_n = n + \frac{1}{n} \alpha$

$f(n_n) \geq \alpha + \frac{1}{n} > \alpha$ donc $n_n \in E_{\mathcal{H}}^+$ et $n_n \rightarrow n$ donc

$\overline{E_{\mathcal{H}}^+} = F$ d'où $F \cap (E_{\mathcal{H}}^+) = \mathcal{H}$ idem $F \cap (E_{\mathcal{H}}^-) = \mathcal{H}$

2a)



$\forall (n,y) \in A \quad y > n$ donc $f(n,y) > 0$

$\forall (n,y) \in B \quad y < n$ donc $f(n,y) < 0$

soit $\mathcal{H}' / y = 2n - 1$

Posons $g(n, y) = y - 2n$ et $\mathcal{H}' : g(n, y) = -1$ (9)

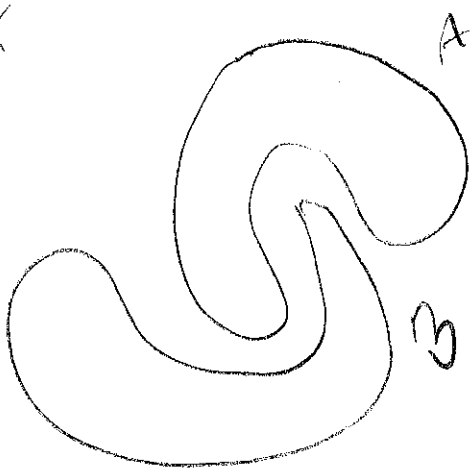
$$\forall (n, y) \in \mathcal{A} \quad \begin{array}{l} 1 < y < 2 \\ -2 < -2n < 0 \end{array}$$

$$-1 < y - 2n \quad \text{donc } g(n, y) > -1$$

$$\text{de } \hat{m} \quad \forall (n, y) \in \mathcal{B}, \quad g(n, y) > 1$$

d' $\mathcal{H}'$ sépare strictement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

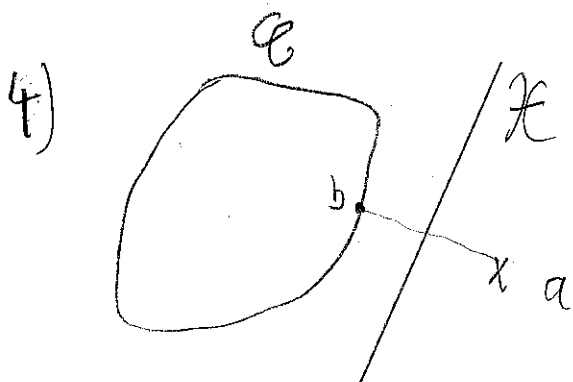
ex



$\nexists \mathcal{H}$ qui sépare st $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

$$3) \quad \forall f: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ linéaire}, \exists ! a \in E \setminus$$

$$\forall n \in E \quad f(n) = (n | a)$$



$$\text{posons } b = p_C(a)$$

Avec $C \subset \mathbb{R}^2$, on a :

$$\forall n \in C \quad (x - b | b - a) \geq 0$$

Posons donc $f(n) = (n | b - a)$

$$\text{On a } \mathcal{C} \subset \{n \in \mathbb{R}^n \mid f(n) \geq (b | b - a)\}$$

$$\begin{aligned} \text{et } f(a) &= (a | b - a) = (a - b + b | b - a) \\ &= (b | b - a) - \|a - b\|^2 \end{aligned}$$

$$\text{cgs posons } \alpha = (b | b - a) - \frac{1}{2} \|a - b\|^2$$

comme $a \notin \mathcal{C}$, $b \neq a$ et donc $\|a - b\|^2 > 0$

$$\text{si } n \in \mathcal{C} \quad f(n) \geq (b | b - a) > \alpha$$

$$f(a) = \alpha - \frac{1}{2} \|a - b\|^2 < \alpha$$

d'où $\mathcal{H} / f(n) = \alpha$ sépare strictement $\{a\}$ et $\mathcal{C}$.

5) a) Soit $(a, b) \in \mathcal{A}^2$, soit $t \in [0, 1]$

$$\exists (c, c') \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \text{ et } \exists (d, d') \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \setminus$$

$$a = c - c' \text{ et } b = d - d' \text{ d'où :}$$

$$\begin{aligned} ta + (1-t)b &= [tc + (1-t)d] - [tc' + (1-t)d'] \\ &\in \mathcal{C} \text{ (convexe)} \quad \in \mathcal{C}' \end{aligned}$$

donc $ta + (1-t)b \in \mathcal{A}$ cgs $\mathcal{A}$ convexe.

Montrons que $\mathcal{A}$ est fermé à l'aide de la caractérisation ⁽¹¹⁾
séquentielle: soit (a_n) suite de $\mathcal{A}$ qui cvg vers $l \in \mathbb{R}^n$

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists (c_n, c'_n) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \setminus a_n = c_n - c'_n$$

Comme $\mathcal{C}$ est compact, $\exists \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ st $\nearrow$ et $\exists c \in \mathcal{C}$

$$c_{\varphi(n)} \longrightarrow c \quad \text{d'où} \quad c'_{\varphi(n)} = c_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)} \xrightarrow{\text{TC}} c - l$$

et comme $\mathcal{C}'$ fermé, $c' = c - l \in \mathcal{C}'$

$$\text{cgs } l = c - c' \in \mathcal{A}$$

d'où $\mathcal{A}$ convexe et fermé

b) Si $0 \in \mathcal{A}$ alors $\exists c \in \mathcal{C}$ et $\exists c' \in \mathcal{C}' \setminus 0 = c - c'$ et

donc $c \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$: absurde d'où $0 \notin \mathcal{A}$

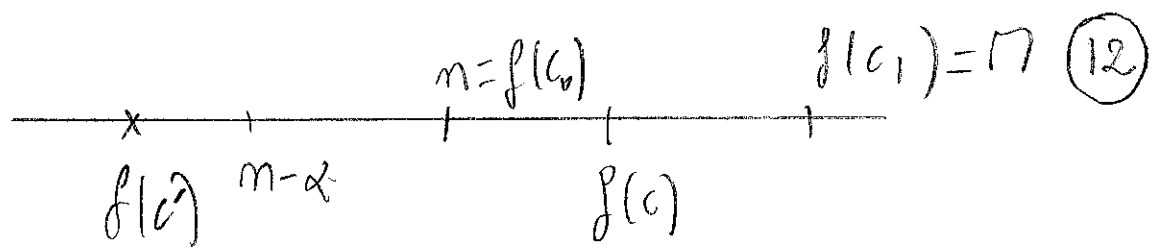
c) d'après le 4), il existe $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\forall a \in \mathcal{A} \quad f(a) > \alpha \quad \text{et} \quad f(0) < \alpha$$

Comme f est linéaire, $f(0) = 0$ et donc $\alpha > 0$

$$\text{On a } \forall c \in \mathcal{C}, \forall c' \in \mathcal{C}' \quad f(c - c') = f(c) - f(c') > \alpha$$

$$\text{soit } f(c') + \alpha < f(c)$$



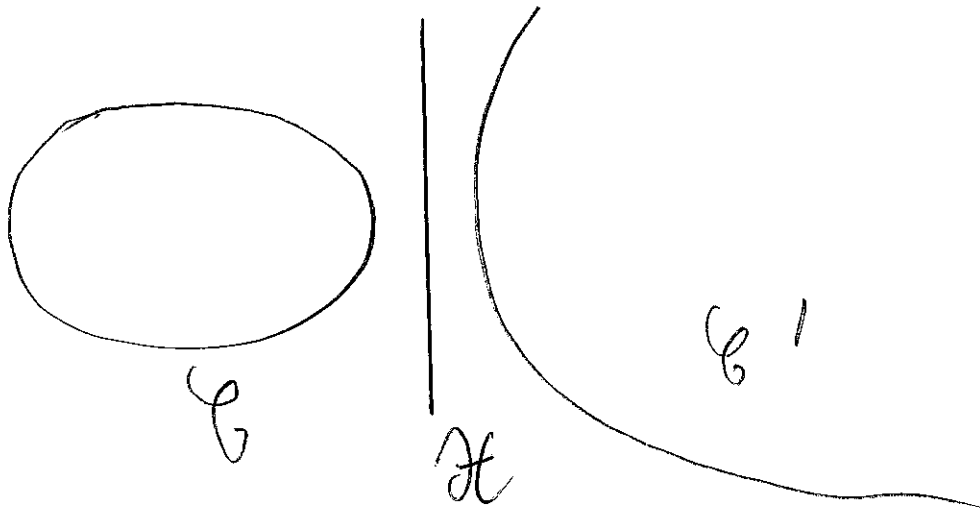
$\mathcal{C}$ étant compact, par TBA, $\exists c_0, c_1 \in \mathcal{C} \setminus$

$$\forall c \in \mathcal{C}: m = f(c_0) \leq f(c) \leq f(c_1)$$

et donc $\forall c' \in \mathcal{C}': f(c') < m - \alpha_0 < m - \alpha/2$

$$\forall c \in \mathcal{C}: f(c) \geq m > m - \alpha/2$$

d' l'hyperplan $\mathcal{H}/f(n) = m - \alpha/2$ sépare st. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$



b) Comme $a \notin \mathcal{C}$, $\forall n > 0: B_F(a, n) \not\subset \mathcal{C}$

Pour $n = \frac{1}{2^p} > 0$, $\exists a_p \in B_F(a, \frac{1}{2^p})$ et $a_p \notin \mathcal{C}$

Comme $0 \leq \|a_p - a\| \leq \frac{1}{2^p}$, $\lim_{p \rightarrow \infty} a_p = a$ et $\forall p: a_p \notin \mathcal{C}$

b) On applique le 4) à $\mathcal{C}$ et a_p :

$$\exists f_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \exists \alpha_p \in \mathbb{R} \setminus$$

$$\forall n \in \mathcal{C} \quad f_p(n) > \alpha \quad \text{et} \quad f_p(a_p) < \alpha$$

$$\text{on } \exists u_p \in \mathbb{R}^n \setminus \quad \forall n \in \mathbb{R}^n \quad f_p(n) = (\vec{u}_p | n) \\ \text{(iso. canonique)}$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathcal{C} \quad (\vec{u}_p | n) > \alpha \\ -(\vec{u}_p | a_p) > -\alpha$$

$$\hline (\vec{u}_p | n - a_p) > 0$$

$$\text{cgs posons } \vec{N}_p = \frac{\vec{u}_p}{\|\vec{u}_p\|} \quad (\vec{u}_p \neq \vec{0} \text{ car } f_p \neq 0)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathcal{C}, \forall p \in \mathbb{N} \quad (\vec{N}_p | n - a_p) > 0}$$

c) $(\vec{N}_p)$ suite de $S(0, 1)$: fermé borné donc compact

d'où $\exists \gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ str $\nearrow$, $\exists \vec{N} \in S(0, 1) \setminus$

$$\vec{N}_{\gamma(p)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \vec{N}$$

comme $a \xrightarrow{p \rightarrow \infty} a$ (suite extraite) et $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\forall p \quad (\vec{N}_{\gamma(p)} | n - a_p) \geq 0, \text{ qd } p \rightarrow \infty : (\vec{N} | n - a) \geq 0 \\ \text{c'est p.s. et c'est bilinéaire}$$

$$d \quad \boxed{\forall n \in \mathcal{C} \quad (\vec{N} | n-a) \geq 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{N}\|=1} \quad (14)$$

d) Un vecteur directeur de la tangente à la parabole au point $(a, a^2) = A$ est $\vec{T} = (1, 2a)$. Une équation

de cette tangente est $\mathcal{C} / 2a(x-a) - (y-a^2) = 0$.

Soit $\vec{N} = (u, v)$ un vecteur unitaire tel que

$$\forall X = (x, x^2) \in \mathcal{C} / y = x^2 : (\vec{N} | X - A) = u(x-a) + v(x^2 - a^2) \geq 0$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{R}, \quad v n^2 + u n - u a - v a^2 \geq 0$$

$$\text{donc il faut que } v > 0 \text{ et } \Delta = u^2 + 4v(ua + va^2) \leq 0$$

$$\text{d'où } v > 0 \text{ et } \Delta = (u + 2av)^2 \leq 0$$

$$\text{soit } v > 0 \text{ et } u + 2av = 0$$

$$\text{Or } (\vec{T} | \vec{N}) = u + 2av \text{ donc il faut } \vec{N} \perp \vec{T},$$

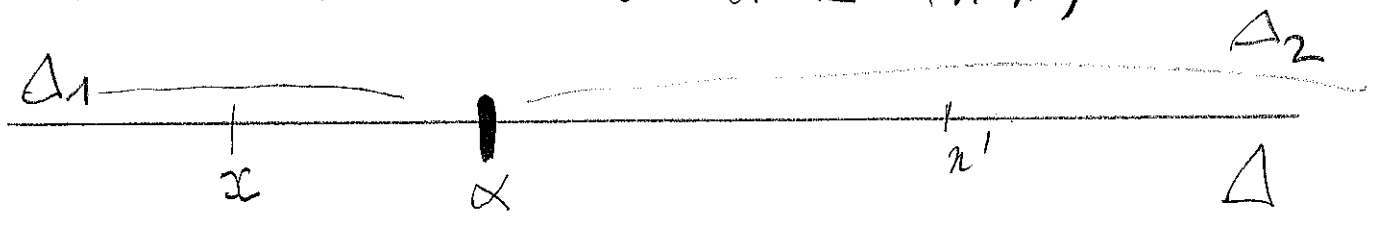
Et donc toute droite d'appui à $\mathcal{C}$ en A est la

droite $A + \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} \cdot$ comme le c) assure qu'il y en a au moins une, d'où

$$\boxed{A + \text{vect}(\vec{N}) = \mathcal{C} \text{ est la seule droite d'appui à } \mathcal{C} \text{ en } A.}$$

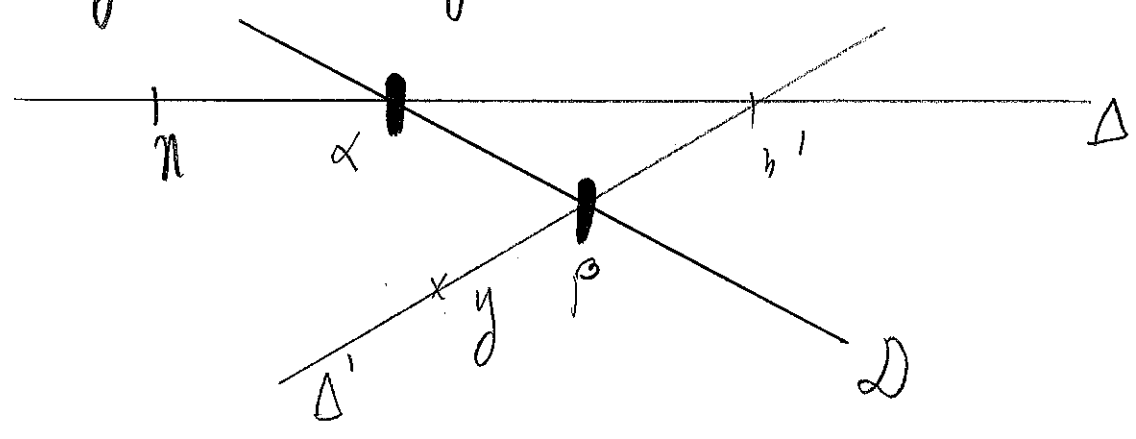
7) Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}' = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ convexes, on suppose que $\mathcal{C} \neq \emptyset$ et $\mathcal{C} \neq \mathbb{R}^2$ (qui sont solutions triviales)

Soit $n \in \mathcal{C}$ et $n' \in \mathcal{C}'$ et $\Delta = (n n')$



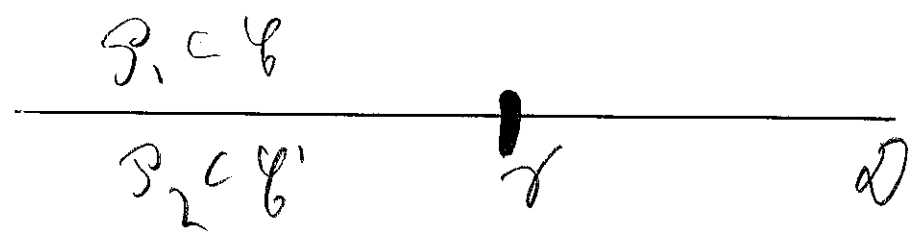
Comme $\Delta \cap \mathcal{C}$ et $\Delta \cap \mathcal{C}'$ convexes, il existe $\alpha \in \Delta$ tel que la demi-droite Δ_1 de Δ contenant n et d'extrémité α soit incluse dans $\mathcal{C}$ idem pour Δ_2 . Quitte à "décaler" n vers la gauche et n' vers la droite, on peut supposer que $n \neq \alpha$ et $n' \neq \alpha$

Soit $y \in \mathcal{C} \cap \Delta$ (y existe sinon $\mathcal{C} = \Delta$, et $\mathcal{C}'$ non convexe)



on fait pareil avec $\Delta' = (y n')$ d'où β idem α
Posons $\mathcal{D} = (\alpha \beta)$

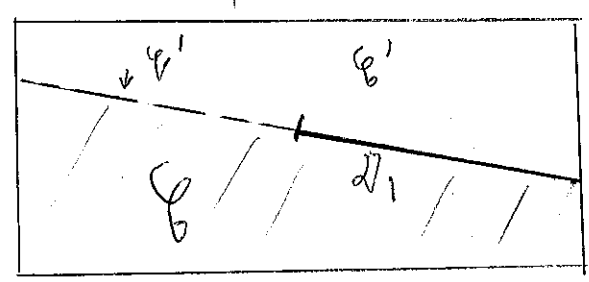
on montre avec différents cas que le demi-plan P_1 ouvert de frontière $\mathcal{A}$ et contenant n et y est inclus dans $\mathcal{C}$ de même l'autre demi-plan $P_2 \subset \mathcal{C}'$



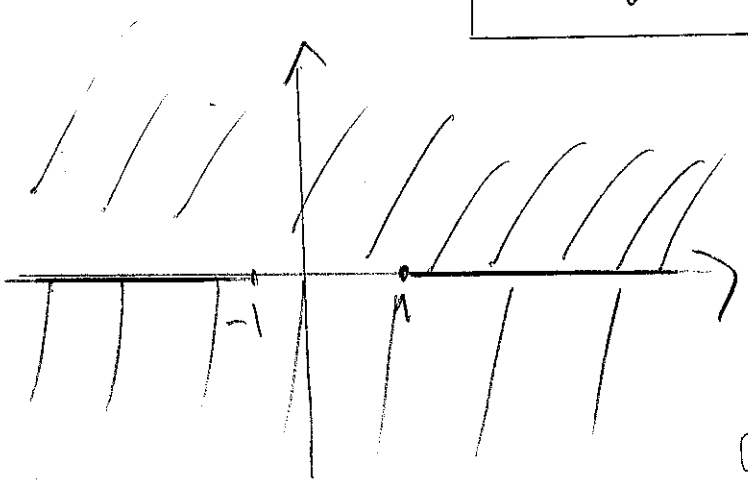
de $\hat{m}$ que par Δ , $\exists \gamma \in \mathcal{A}$ qui crée 2 demi-droites sur $\mathcal{A}$, l'une dans $\mathcal{C}$ l'autre de $\mathcal{C}'$ (ou alors $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ ou $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}'$)

Il Les solutions sont donc par $\mathcal{C}$:

$\emptyset, \mathbb{R}^2$, tous demi-plan ouvert, tous demi-plan fermé et tous demi-plan avec une demi-droite de sa frontière



$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{C}$



$\mathcal{C} = \{(n, y) \mid y > 0\} \cup \{(n, 0), n \geq 1\}$

$\mathcal{C}' = \{(n, y) \mid y < 0\} \cup \{(n, 0), n \leq -1\}$

conviennent par le ct-ex.