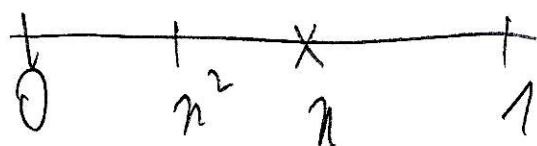


* f, g sol $\Rightarrow \lambda f + g$ aussi $\in$ | $n=57$
 * les fonctions constantes sont solutions. ① 57

* Si f nt sol.

$$f(n) = \frac{f(n)}{2} + \frac{f(n^2)}{2^2} + \dots$$

les séries: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots = 1$



sol, car

x + proche de 0 que n , on pose $g = f - f(0)$

Donc $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0$ (SNALG: $\alpha < 1$) \

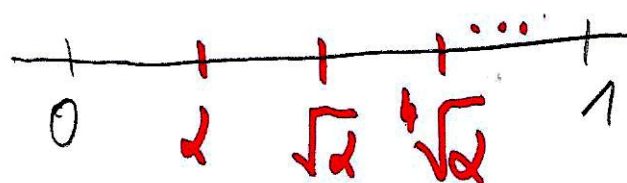
$$0 \leq n \leq \alpha \Rightarrow |g(n)| \leq \varepsilon$$

$$\frac{1}{2} g(n) = \frac{g(n^2)}{4} + \frac{g(n^3)}{2^3} + \dots$$

Si $\alpha \leq n \leq \sqrt{\alpha} \Rightarrow \forall i \geq 2 \quad n^i \leq \alpha$

donc $|\frac{1}{2} g(n)| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2^3} + \dots = \frac{\varepsilon}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2}$

d'où $|g(n)| \leq \varepsilon$



donc idem $\forall n \in [0, \sqrt[n]{\alpha}] |g(n)| \leq \varepsilon$

(2)
59

et (rec) $\forall h \forall n \in [0, \sqrt[h]{\alpha}] |g(n)| \leq \varepsilon$

comme $\sqrt[h]{\alpha} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 1$, il vient :

$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in [0, 1[|g(n)| \leq \varepsilon$

avec $\varepsilon \rightarrow 0$, $\forall n \in [0, 1[g(n) = 0$

comme g est ≤ 1 , $\forall n \in [0, 1] g(n) = 0$

cq s $\boxed{g = g(0) : \text{fct. constante}}$

Autre d'mo. soit $n \in [0, 1[$ et $m_n = \sup_{[0, n]} g = g(n_0)$

$$g(n_0) = \frac{g(n_0^1)}{2} + \frac{g(n_0^2)}{2^2} + \frac{g(n_0^3)}{2^3} + \dots$$

mais on a aussi $g(n_0) = \frac{g(n_0)}{2} + \frac{g(n_0)}{2^2} + \frac{g(n_0)}{2^3} + \dots$

En soustrayant $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{g(n_0) - g(n_0^i)}{2^i} = 0$, comme $n_0^i \in [0, n_0] \subset [0, n]$

donc $\forall i \in \mathbb{N} g(n_0) = g(n_0^i)$ puis $i \rightarrow \infty$:

$g(n_0) = g(0)$ idem avec $m_n = \sup_{[0, n]} g = g(n_1) \dots$
cq s g est ≤ 1 sur $[0, 1[$