

058

$$* q^p - 1 = (q - 1) (q^{p-1} + \dots + q + 1)$$

si $q \geq 3$: $q-1 \geq 2$ et $q^{p-1} + \dots + q + 1 \geq 3$ non 1^h

cqs $\boxed{q=2}$

si $p = ij$ avec $i \geq 2$ et $j \geq 2$,

$$2^{ij} - 1 = \underbrace{(2^i - 1)}_{\geq 3} \underbrace{(2^{i(j-1)} + \dots + 2^i + 1)}_{\geq 3} : \text{non } 1^h$$

cqs $\boxed{p \text{ } 1^h}$ (Δ récip fautive, ex : $2^{11} - 1 = 23 \times 89$)

Analyse : $k \equiv 1 \pmod{2p} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \mid k-1 \\ p \mid k-1 \end{cases}$ car $2np = 1$

Synth : comme k nb 1^h de $2^p - 1$, $k \neq 2$ donc k impair

et donc $\boxed{2 \mid k-1}$

comme $k \mid 2^p - 1$, $2^p \equiv 1 \pmod{k}$. On se place ds $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$: $O(\bar{2}) \mid p$. Comme $p \text{ } 1^h$, $O(\bar{2}) = p$

Or Fermat $2^{k-1} \equiv 1 \pmod{k}$ donc $\boxed{p \mid k-1}$