

$$* \forall \theta \in]0, \pi/2[\quad \sin(2n+1)\theta = \operatorname{Im} \{ e^{i(2n+1)\theta} \}$$

$$\boxed{\text{Délinéarisation}} = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k \sin^{2k+1} \theta / \cos^{2n-2k} \theta$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1} \theta} = \sum_{h=0}^n (-1)^h \binom{2n+1}{2h+1} \frac{\cos^{2n-2h} \theta}{\sin^{2n-2h} \theta}$$

$$\text{Cqs } \boxed{P_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{n-k}} \quad \text{convient}$$

* L'énoncé demande l'unicité : c'est toujours l'histoire de l'infinité de racines : $\ln |\cotan^2 \theta|_{\theta \in]0, \pi/2[}$
 $P_n(\cotan^2 \cdot) = Q_n(\cotan^2 \cdot) \Rightarrow P_n - Q_n = 0$

* On cherche les racines de P_n de la forme

$$\cotan^2 \theta \rightarrow \boxed{x_k = \cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)} \quad k \in [1, n]$$

Comme $d^0 P_n = n$ (coeff. dominant : $(-1)^0 \binom{2n+1}{1} \neq 0$)
 (de $d^0 n$)

et que $0 < \frac{\pi}{2n+1} < \dots < \frac{n\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$ et que $\cotan^2$

est bijective de $]0, \pi/2[$ sur $]0, +\infty[\rightarrow$

d° $n_1, \dots, n_n$ sort (totale) les racines de P_n

$$P_n = \binom{2n+1}{1} X^n + \alpha X^{n-1} + \dots \quad \text{et } \alpha = (-1)^1 \binom{2n+1}{3}$$

$$= \binom{2n+1}{1} \prod_{k=1}^n (X - n_k)$$

Par identification le terme X^{n-1} :

$$\alpha = -(2n+1) \sigma_1 \quad \text{où } \sigma_1 = n_1 + \dots + n_n$$

$$\text{d } \sigma_1 = \frac{\binom{2n+1}{3}}{2n+1} = \frac{2n(2n-1)}{6}$$

← T.A.F.

* $\forall \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad \tan \theta = \tan \theta - \tan 0 = \theta(1 + \tan^2 \theta)$

donc $0 < \theta < \tan \theta \Rightarrow \cotan^2 \theta < \frac{1}{\theta^2}$

* Analyse $\frac{1}{\theta^2} < 1 + \cotan^2 \theta \Leftrightarrow \frac{1}{\theta^2} < 1 + \frac{c^2}{s^2} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$

$\Rightarrow \sin^2 \theta < \theta^2$ ne A.F.

$$\text{d } \cotan^2 \theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cotan^2 \theta$$

* On l'applique avec $\frac{k\pi}{2n+1}$ et on somme: ② 55

$$\sum_{k=1}^n x_k < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} < n + \sum_{k=1}^n x_k$$

$$\Rightarrow \frac{2n(2n-1)}{6(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi^2 k^2} < \frac{n+2n(2n-1)}{6(2n+1)^2}$$

$$\searrow \frac{1}{6} \leftarrow \text{T.E.}$$

$$\text{d'où } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{d } \boxed{\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}}$$