n° 60

* fct C^0 / TG sur $[0,1]$

⚠ cdv $u = t^n \Leftrightarrow t = u^{1/n}$ C^1 - bijectif / $]0,1]$

$$u_n = n\int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt = \cdots = \int_0^1 \underbrace{\frac{\ln(1+u)}{u^{1-1/n}}}_{f_n(u)}\,du$$

*(f_n) CS. vers $f : u \longmapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$ sur $]0,1]$ (à vérifier avec $\ln$)

* f_n et f C^0 / $]0,1]$ / TG ← idem!

* $\forall u \in]0,1]$ $\forall n \geq 1$ $|f_n(u)| \leq \frac{\ln(1+u)}{u} = \varphi(u)$

PPC en 0 + TC → φ int / $]0,1]$

<u>d'1</u> $\lim u_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du = l$

DSE. $\longrightarrow = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} u^n}{n\,u}\,du = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n u^n}{n+1}}_{v_n(u)}\,du$

$(\sum v_n)$ CS / $]0,1[$ + v_n et $u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$ C^0 / $]0,1[$ +

$\left(\sum \int |v_n|\right) = \left(\sum \frac{1}{(n+1)^2}\right)$ cvg d'où Th d'I.T.à.T :

$l = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ et en découpant $\sum \frac{1}{n^2} = P + I$ ($3\sum$ cvg....)

on a $l = I - P = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \boxed{\frac{\pi^2}{12}}$