

Si $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$, c'est du com :

ex 6)

$\exists n \setminus u^{n-1}(n) \neq 0$ $b = (u^{n-1}(n), \dots, n)$ base de E

$$\text{et } \Pi_b(u) = \begin{pmatrix} 0^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = J$$

Récip. si $\exists b \setminus \Pi_b(u) = J$ avec $b = (e_1, \dots, e_n)$, on a

$$u(e_1) = 0, u(e_2) = e_1, \dots, u(e_n) = e_{n-1}$$

donc (réc.) $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

$$\left[u^i(e_1) = \dots = u^i(e_{i-1}) = u^i(e_i) = 0, u^i(e_{i+1}) = e_1, \dots, u^i(e_n) = e_{n-i} \right]$$

$$\text{d'où } u^{n-1}(e_1) = \dots = u^{n-1}(e_{n-1}) = 0 \text{ et } u^{n-1}(e_n) = e_1 \neq 0$$

$$\text{donc } \boxed{u^{n-1} \neq 0 \text{ et } u^n = 0}$$

Notons $A = \begin{pmatrix} 0^1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = \Pi_b(v)$ idem $\uparrow$

$$v(e_1) = 0, v(e_2) = e_1, v(e_3) = e_1 + e_2, \dots$$

$$v^{n-1}(e_1) = \dots = v^{n-1}(e_{n-1}) = 0, v^{n-1}(e_n) = e_{n-1}$$

$$\text{donc } \boxed{A^{n-1} \neq 0 \text{ et } A^n = 0}$$

autre méth. $A = J + J^2 + \dots + J^{n-1}$ et $(I_n - J)A = J - J^n = J$

on (classique) $I_n - J$ inv. $[(I_n - J)(I + \dots + J^{n-1}) = I_n]$ et $I_n - J$ et A

commutent cq/ $(I_n - J)^{n-1} A^{n-1} = J^{n-1} \neq 0$ et $(I_n - J)^n A^n = 0 \dots$