exo 72

① 72

1) * $a_{i,j} \geqslant 0 \quad \forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2 = I$

* $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in J} \frac{1}{2n}$

$(i,j) \in J \iff |i+j-n-2| = 1$ et $(i,j) \in I$

$\iff i+j-n-2 = \pm 1$

$\iff j = n+2-i \pm 1$

Pour $i=1$: $j = n+1 \pm 1 \iff j = \cancel{n+2}$ ou $j = n$

$\vdots$

$i = n+1$: $j = 1 \pm 1 \iff j = \cancel{0}$ ou $j = 2$

cqs $J = \{ (1,n)$ ← 1

$(2,n-1), (2,n+1)$

$(3,n-2), (3,n)$

$\vdots$

$(n-1,2), (n-1,4)$

$(n,1), (n,3)$

$(n+1,2)$ ← 1

$2 \times (n-1)$

$\underline{|J| = 2n}$

cqs $\displaystyle\sum_{I} a_{ij} = 1$ et donc $\boxed{\text{loi de proba de couple}}$

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/2n & 0 \\ \vdots & & & & 0 & 1/2n \\ 0 & & & & & 0 \\ 1/2n & & & & & \\ 0 & 1/2n & & & 0 & \end{pmatrix}$ + T.S.

72

3) $P(X=i) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j}$ = somme des coeff. de la i-ème ligne

$= \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{si } i=1 \text{ ou } i=n+1 \\ \frac{1}{n} & \text{si } i \in [\![2,n]\!] \end{cases}$ et $\boxed{Y \sim X}$

4) $P(X=i / Y=j) = \frac{a_{ij}}{P(Y=j)}$ d'où

$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1/2 & 0 \\ & & & 1 \\ 1/2 & & & 1/2 \\ 1 & & & \\ 0 & 1/2 & & 0 \end{pmatrix}$ $Bv = (c_i)$ avec

$c_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_{i,j} \cdot P(X=j) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j} = P(X=i)$

d $\boxed{Bv = v}$