SPE MP ······ 2024-2025 | PROGRAMME DE COLLE 1

Remarque :
Le cours étant le point le plus important, la colle commencera systématiquement par une question de cours.
Les démonstrations à savoir par tous sont repérées par un point rouge • Pour celles et ceux qui envisage de passer les concours Centrale - Mines - X ... doivent travailler toutes les démonstrations

Merci

II. POLYNÔMES-ANNEAUX-ARITHMÉTIQUE DES POLYNÔMES

POLYNÔMES

: Polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $\mathbb{K}$ un sous corps de $\mathbb{C}$.
Opérations algébrique, degré, dérivation, formule de Leibniz, de Taylor.
Théorème fondamental :
• Si P est un polynôme de degré au plus n ayant au moins $n+1$ racines alors P est nul (et donc ses coefficients sont tous nuls). Corollaire : Si P est un polynôme ayant une infinité de racines alors P est nul.
Ordre de multiplicité d'une racine - lien avec les dérivées successives.
• Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, **polynômes irréductibles** de $\mathbb{R}[X]$ et de $\mathbb{C}[X]$.
Relation coefficients-racines.
Polynôme d'interpolation de Lagrange :
• Connaitre par coeur la formule $L=\sum_{i=1}^{n} b_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}$, sa démonstration et la détermination de tous les polynômes P en fonction de L tels que pour tout $i\in[1,n]$, $P(a_i)=b_i$.

ANNEAUX-ARITHMÉTIQUE DES POLYNÔMES

Anneaux - sous anneaux - morphismes d'anneaux - groupe des éléments inversibles.
Idéaux d'un anneau.
Divisibilité dans un anneau commutatif et intègre.
ARITHMÉTIQUE DES POLYNÔMES :
• **Théorème fondamental de structure des idéaux de $\mathbb{K}[X]$** :

Idéaux de $\mathbb{K}[X]$: ils sont tous de la forme $P_0\mathbb{K}[X]$ avec P_0 unique et normalisé

PGCD et PPCM : les PGCD et PPCM de P et Q définis en Sup sont les polynômes qui sont les générateurs normalisés des idéaux $P\mathbb{K}[X]+Q\mathbb{K}[X]$ et $P\mathbb{K}[X]\cap Q\mathbb{K}[X]$ (bien connaitre la démonstration)
Bezout - Gauss
Résolution **complète** de l'équation $AU+BV=C$.

1. Trigonométrie :

Tout et entre autre résolution de l'équation $a\cos x+b\sin x=c$

2. $\mathbb{N}$ - $\mathbb{Z}$ - $\mathbb{Q}$ - $\mathbb{R}$:

Récurrence - division euclidienne dans $\mathbb{N}$.
Partie entière d'un réel.
Définition et caractérisation de la borne supérieure (et inférieure).
Densité de A dans $\mathbb{R}$.
Cardinaux de $E\cup F$, $E\times F$, E^F, $\mathcal{P}(X)$.

3. Relations binaires

Relations d'équivalence - classes d'équivalence - partitions (version ensembliste et version familiale).
Relations d'ordre : totale/partielle. Notion de majorant-minorant-plus grand élément-plus petit élément - borne sup/inf. (attention les éléments maximaux n'ont pas été traités en classe).
Relations d'ordre fondamentales :

- $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$
- l'inclusion sur $\mathcal{P}(X)$
- la divisibilité dans $\mathbb{N}^*$ et
- $\leqslant$ sur $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$

Prévisions : Nombres complexes - Suites de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.