SPE MP ······ 2024-2025 **PROGRAMME DE COLLE 6**

COURS : ENSEMBLES DÉNOMBRABLE - FAMILLES SOMMABLES DE $\mathbb{C}$

EXERCICES : SÉRIES et FAMILLES SOMMABLES DE $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

I. Séries de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$: voir programme de colle 5

II. Familles sommables $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Ensemble dénombrables (s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$).

Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.

Caractérisation avec un injection de A dans $\mathbb{N}$ ou une surjection de $\mathbb{N}$ dans A.

- Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
- L'ensemble $[0,1]$ n'est pas dénombrable **Démonstrations (trichotomie ou Cantor)**
- Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne sont pas dénombrables.
- Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- Une réunion finie d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.

Familles sommables de $\mathbb{R}^+$, de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. **Somme d'une famille sommable**.

Théorème de sommation par paquets dans $\mathbb{R}^+$, dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$: Démonstration hors programme.

Invariance de la sommabilité et de la valeur de la somme par permutation de l'ensemble des indices

Lien avec l'absolue convergence des séries.

Théorème de Fubini pour un ensemble d'indice du type $I \times J$.

- **Séries doubles : les 3 partitions classiques lorsque $u_{p,q} \in \mathbb{C}$:**

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p+q=n} u_{p,q}.$$ **Démo. à l'aide de sommation par paquets**

Prévisions : Probabilités.