SPE MP ...... 2024-2025 **PROGRAMME DE COLLE 7**

COURS et EXERCICES : PROBABILITÉS (Tout sauf fonctions génératrices)

A) ESPACES PROBABILISÉS

Axiomatique de Kolmogorov, Tribu, Système complet d'évènements, Lien entre le vocabulaire ensembliste et le vocabulaire probabiliste, Probabilité, Définition d'une probabilité à partir des singletons dans le cas fini ou dénombrable.

B) PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES PROBABILITÉS

Continuité croissante $\boxed{\bullet}$, continuité décroissante $\boxed{\bullet}$.
Première forme de la formule des probas totales, Inégalité de Boole (sous-additivité) $\boxed{\bullet}$.
Évènement presque sûr , propriété est vraie presque sûrement , évènement négligeable , réunion dénombrable d'évènements négligeables , intersection dénombrable d'évènements presque sûrs.

C) PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET INDÉPENDANCE

Proba. conditionnelles, formule des probas composées $\boxed{\bullet}$, formules des probas totales $\boxed{\bullet}$, formules de Bayes.
Indépendance, indépendance d'une famille d'évènements.
Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}^n$ $(n \geqslant 1)$, n évènements indépendants, si on note $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$, alors $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ sont des évènements indépendants $\boxed{\bullet}$.

D) VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Variable aléatoire discrète (VAD) , Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.
Notation : Si la VAD X a la même la loi que la VAD Y, alors on note $X \sim Y$. On dit aussi que X et Y sont équidistribuées ,
Fonction de répartition (HPTS) : positivité, croissance et limite en $\pm\infty$.

E) COUPLES DE VAD, VAD INDÉPENDANTES

Généralités, couple de variables aléatoires discrètes, Loi conjointe, Lois marginales,

$$\forall i \in I \ , \mathbf{P}(X = x_i) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{j\in J}[(X = x_i) \cap (Y = y_j)]\right) = \sum_{j \in J} p_{i,j}$$

$$\text{et } \forall j \in J \ , \mathbf{P}(Y = y_j) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i\in I}[(X = x_i) \cap (Y = y_j)]\right) = \sum_{i \in I} p_{i,j}.$$

Loi conditionnelle , Extension aux n-uplets, vecteurs aléatoires discrets , Couple de variables aléatoires indépendantes
Soient X et Y deux VAD indépendantes , alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont des VAD indépendantes $\boxed{\bullet}$.
Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes
Lemme des coalitions : Soient $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes, alors $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ sont des VAD indépendantes $\boxed{\bullet}$; généralisation à $p \geqslant 3$ coalitions.

F) LOIS USUELLES

Probabilité uniforme sur un ensemble fini, Loi de Bernoulli, Loi binomiale.
Soient $X_1, \ldots, X_n$, n VAD indépendantes qui suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p, alors $S = X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p $\boxed{\bullet}$.
Loi hypergéométrique (HPTS)
Loi géométrique (ou loi de Pascal)
HPTS :Loi sans mémoire $(P((X > n + k)/(X > n)) = P(X > k))$.
Loi de Poisson
Approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson $\boxed{\bullet}$.

G) ESPÉRANCE

Espérance dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ d'une variable aléatoire positive Espérance finie d'une variable aléatoire réelle. Variable centrée.
Espérance des lois usuelles Espérance d'une fonction indicatrice - Espérance d'une fonction constante - Linéarité $\boxed{\bullet}$ - Positivité et croissance - Soit Y, une VADR admettant une espérance finie et soit X, une VADR telle que $|X| \leqslant Y$, alors X admet une espérance finie et $|E(X)| \leqslant E(Y)$.
Formule de transfert $\boxed{\bullet}$ - Inégalité de Markov $\boxed{\bullet}$ - Espérance d'un produit de VAD indépendantes.

Formule de l'antirépartition : $E(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant n)$ $\boxed{\bullet}$.

H) VARIANCE , ÉCART-TYPE ET COVARIANCE

Moments - Moments d'ordre 2 - Cauchy-Schwarz - variance , écart-type - variable réduite - Propriétés
Formule de König-Huygens - $V(aX + b) = a^2V(X)$ - Variance et écart-type des lois usuelles. Covariance de deux VADR- Formule de König-Huygens - Cas de 2 VADR indépendantes - $Cov(aX + b \ , \ cY + d) = ac\ Cov(X, Y)$ - Variance d'une somme de VADR - Variance d'une somme de VADR indépendantes.
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev $\boxed{\bullet}$
Théorème : Loi faible des grands nombres $\boxed{\bullet}$

<u>Prévisions</u> : Algèbre linéaire : EV - Matrices - Déterminants....