SPE MP ······ 2024-2025 **PROGRAMME DE COLLE 8**

Exercices : PROBAS - PROBAS - PROBAS - PROBAS ! ! ! !

Cours (les 4 piliers de la réduction) :

ESPACES VECTORIELS - MATRICES - DÉTERMINANTS - (POLYNÔMES : fait en début d'année)

Espaces vectoriels

EV - SEV -$\mathbb{K}$-algèbre. Notion de combinaisons linéaires d'une famille finie

Application linéaire - $\mathcal{L}(E,E')$ est un K-ev avec $+$ et $\cdot$ et $\mathcal{L}(E)$ est une K-algèbre avec $+$ et $\circ$ et $\cdot$

Application bi-linéaire

Groupe linéaire : f est bijective SSI f est inversible dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$

SEV - SEV engendré - Somme de 2 SEV - Somme directe - supplémentaire

Noyau Image structure (Sous-espace affine) de l'ensemble des x tels que $f(x) = b$.

Projecteurs - symétrie Caractérisation $\boxed{\bullet}$: Si $f \in \mathcal{L}(E)$ alors f est un projecteur **<u>SSI</u>** $f \circ f = f$.

Famille de projecteurs associée à une décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$

Familles libres/génératrices/bases.

Cas des familles libres de fonctions (exemple : $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre avec $f_a(x) = |x-a|$)

Famille et application linéaire : critère d'isomorphisme

Théorème fondamental : Définition d'une application linéaire à partir d'une base

Espace de dimensionfinie, de dimensioninfinie.

$\boxed{\bullet}$ Théorème de la base incomplète- dimension - caractérisation des bases.

Théorème (démonstration non faite) : Toutes les bases ont même cardinal.

Tout sur le calcul du rang d'une famille de vecteurs : pivot de Gauss.

Dimensions des SEV - Dimension de $F \oplus G$ Dimensions (et base adaptée) des Sommes directes de p SEV

$\boxed{\bullet}$ Théorème des 4 dimensions : dim $(F+G)$ =dim$F$+dim $G-$dim$F \cap G$.

Dimension (et base) d'un produits finis de K-ev de dimensionfinie.

Théorème fondamental : Si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est un base de E et si $(v_1, ..., v_n) \in (E')^n$ alors il existe une unique application linéaire f tel que pour tout i $f(e_i) = v_i$.

$\boxed{\bullet}$ Théorème du rang. Conséquences

MATRICES

Matrice d'une application linéaire - d'un endomorphisme

Formules de changement de base : $X = PX'$, $A = PDP^{-1}$ et $A = QDP^{-1}$

Matrice inversible. Les élèves doivent savoir calculer l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot.

Matrices équivalentes et leurs caractérisation avec la matrice J_r. Matrices semblables

$\boxed{\bullet}$ Trace d'une matrice, d'un endomorphisme Trace d'un projecteur : rg(p)

Opérations élémentaires (sur les lignes et les colonnes)

GROUPE SYMÉTRIQUE ET DÉTERMINANTS

Définition du groupe symétrique,

- Théorème de décomposition en produit de cycles, de transposition.

Signature et groupe alterné.

Définition de forme n-linéaire alternée.

Théorème fondamental de structure des forme n-linéaire alternée en dimension n.

Définition du déterminant d'un famille de vecteurs dans une base, du déterminant d'une matrice et du déterminant d'un endomorphisme.

- Formule de changement de base.
- **Théorème fondamental de la liberté.**

Propriétés telle que $\det f \circ g = \det f \det g$...

Calcul pratique fondé sur la méthode du pivot de Gauss (on fait apparaitre des 0 et du développement selon une ligne ou une colonne).

Applications :

- Formules de Cramer pour un système de n équations à n inconnues.

Mineur - cofacteur - comatrice - formule fondamentale :

- $A\mathrm{com(A)}^{\mathrm{T}} = \mathrm{com(A)}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} = (\det \mathrm{A})\mathrm{I_n}$ - expression de l'inverse d'une matrice
- Déterminants de Van der Monde (résultats et démonstration à connaitre)

Équation cartésiennes de sous-espace affine.

Caractérisation du rang avec les matrices extraites carrées (démo non faite).

Matrices par blocs - Déterminants par blocs.

matrice de transvections par bloc (multiplication à gauche ou à droite par une matrice transvections par bloc de la forme : $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ T & I_q \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} I_p & T \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$) pour faire apparaitre des blocs de 0.

Prévisions : Réductions des endomorphismes et des matrices.