SPE MP ······ 2024-2025

PROGRAMME DE COLLE 9 : Cours et exercices

COURS : RÉDUCTION (DÉBUT)

Sous-espaces stables par un endomorphisme

f induit sur un SEV F stable un endomorphisme de F noté $\widehat{f}$.

Polynôme d'endomorphismes et de matrices - $\ker P(f)$ et $imP(f)$ sont stable par f-polynôme annulateur - structure d'idéal de l'ensemble des polynômes annulateurs d'un endomorphisme.

Polynôme minimal (noté Π_f) : existence en dimension finie.

- Structure de $\mathbb{K}[f]$ et sa dimension égale au degré de Π_f.
- Théorème de décomposition des Noyaux (TDN).

Valeurs propres - Spectre - Vecteurs propres - Sous-Espaces propres d'endomorphismes.

Stabilité : Si $f \circ g = g \circ f$ alors pour toute valeur propre λ de f : $E_\lambda(f)$ est stable par g.

- Théorème fondamental : Les sous-espaces propres sont en somme directe.

Polynôme d'endomorphisme et éléments propres- valeurs propres possible d'un endomorphisme.

Spectre d'une homothétie, d'un projecteur, d'une symétrie.

Valeurs propres - Spectre - Vecteurs propres des matrices - Immersion $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Matrices semblables et éléments propres.

- Polynôme caractéristique : $\chi_f(x) = x^n - tr(f)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det f$. Les étudiants doivent connaitre et démontrer les 3 coefficients "connus".
- Le polynôme caractéristique de $\widehat{f}$ induit par f sur un SEV F stable divise le polynôme caractéristique de f : $\chi_{\widehat{f}}(x) | \chi_f(x)$.
- Ordre de multiplicité m_λ d'une valeur propre ; $1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant m_\lambda$.

Théorème de Cayley-Hamilton (démonstration non exigible (exigible pour les meilleurs))

- Le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de f ont les mêmes racines.

EXERCICES : TOUT SUR L'ALGÈBRE LINÉAIRE DU PROGRAMME 8
SANS LA DIAGONALISATION ET TRIGONALISATION

Prévisions : Réductions des endomorphismes et des matrices.