SPE MP ······ 2024-2025 | **PROGRAMME DE COLLE 14**

FONCTIONS INTÉGRABLES : COURS

EXERCICES : intégration sur un segment et/ou calcul simple d'intégrales généralisées

1. **Définition** d'une intégrale convergente, absolument convergente dans tous les cas d'intervalles.

2. **Définition** d'une fonction réelle ou complexe intégrable sur un intervalle quelconque I.

3. **Théorème Fondamental**

   $\boxed{\bullet}$ (démo au choix : soit avec $0 \leqslant f + |f| \leqslant 2|f|$... soit avec $\displaystyle\int_a^{x_n} f$ est bornée et n'admet qu'une seule valeur d'adhérence lorsque x_n tend vers b.... :

   > Soit f de I, un intervalle quelconque dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. f est absolument convergente alors elle est convergente.

4. **7 Intégrales de référence** $\boxed{\bullet}$:

   $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ **SSI** $\alpha > 1$.

   $t \mapsto \dfrac{1}{|t|^\alpha}$ est intégrable sur $]-\infty, -1]$[**SSI** $\alpha > 1$.

   $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1]$ **SSI** $\alpha < 1$.

   $t \mapsto \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[a, b[$ **SSI** $\alpha < 1$.

   $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ est intégrable sur $]a, b]$ **SSI** $\alpha < 1$.

   $t \mapsto e^{\lambda t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ **SSI** $\lambda < 0$.

   $t \mapsto -\ln t$ est intégrable sur $]0, 1]$.

5. **Théorème de Comparaison** $\boxed{\bullet}$: Manipulation, pour montrer l'intégrabilité ou la non intégrabilité d'une fonction, des 5 signes : O, o, $\geqslant$, $\leqslant$, $\sim$.

6. **Théorème de Changement de variable** $\boxed{\bullet}$:

   > Si φ est C^1 **et bijective** de I' dans I et si f va de I dans $\mathbb{C}$ alors
   > $\displaystyle\int_{I'} (f \circ \varphi) \cdot |\varphi'|$ et $\displaystyle\int_I f$ sont de même nature et s'il y a convergence : $\displaystyle\int_{I'} (f \circ \varphi) \cdot |\varphi'| = \int_I f$.
   > **Conséquence importante** : f est intégrable sur I **SSI** $(f \circ \varphi) \cdot |\varphi'|$ est intégrable sur I.

7. **Pour le calcul d'IPP** : on doit vérifier que 2 des 3 blocs convergent.

8. **Propriétés de l'intégrale** : Chasles-Linéarité-Croissance

9. **Dérivation**

   > Soit $I = [\alpha, +\infty[$ et soit $f \ : \ I \longrightarrow \mathbb{C}$ **continue** et **intégrable** sur I.
   >
   > On **définit la fonction** F par $F : [\alpha, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$
   > $$x \longmapsto \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$
   > F est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = -f(x)$.
   >
   > On a le même résultat en remplaçant $+\infty$ par $b \in \mathbb{R}$ et donc I par $I = [\alpha, b[$.
   >
   > On a un résultat similaire en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$ et donc I par $I =]-\infty, \beta]$.

10. **Intégration des relations de comparaisons**

a) Théorème 1 (convergence)

Soit $f : [\alpha, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux sur $[\alpha, b[$ (le plus souvent étant $b = +\infty$).

Soit $\varphi : [\alpha, b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et **intégrable** sur $[\alpha, b[$.

Domination :

Si $f(x) \underset{x\to b}{=} O(\varphi(x))$, alors $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} O\left(\int_x^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)$

Négligeabilité :

Si $f(x) \underset{x\to b}{=} o(\varphi(x))$, alors $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} o\left(\int_x^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)$

Équivalence :

Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} \lambda\varphi(x)$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \lambda \int_x^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque : On a un résultat similaire si $I =]a, \beta]$

b) Théorème 2 (divergence)

Soit $f : [\alpha, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux sur $[\alpha, b[$ (le plus souvent étant $b = +\infty$).

Soit $\varphi : [\alpha, b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et **non intégrable** sur $[\alpha, b[$.

Domination :

Si $f(x) \underset{x\to b}{=} O(\varphi(x))$, alors $\displaystyle\int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} O\left(\int_\alpha^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)$

Négligeabilité :

Si $f(x) \underset{x\to b}{=} o(\varphi(x))$, alors $\displaystyle\int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} o\left(\int_\alpha^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)$

Équivalence :

Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} \lambda\varphi(x)$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors $\displaystyle\int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \lambda \int_\alpha^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque : On a un résultat similaire si $I =]a, \beta]$

11. **Intégrales impropres** **Exemple fondamental** :

$$\textbf{SI } 0 < \alpha \leqslant 1 \text{ alors } t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha} \text{ admet une intégrale semi-convergente sur } [\pi, +\infty[.$$

12. **Théorèmes de convergence (juste les énoncés qui doivent être parfaitement sus)** :

Théorème de convergence DOMINÉE pour les suites de fonctions.

Théorème de convergence DOMINÉE pour les séries de fonctions : Théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue.

Prévisions : Fonctions intégrables : suite et fin - Suites et séries de fonctions

BONNES FÊTES DE FIN D'ANNÉE ET BONNE ANNÉE $27^2 + 36^2$