SPE MP ······ 2024-2025

PROGRAMME DE COLLE 19

Cours et exos : PRODUITS SCALAIRES RÉELS (tout)

Définition d'une forme bilinéaire, d'une forme bilinéaire symétrique , d'une forme bilinéaire positive et d'une forme bilinéaire définie positif.
Produit Scalaire, espace Pré-hilbertien réel (espace vectoriel munit d'un PS) et espace euclidien $\mathbb{R}$-eve (espace vectoriel de dimension finie munit d'un PS). Norme, distance euclidiennes associés à un P.S.
Expression matriciel du P.S. : $X^{\mathbf{T}}AY$ et $X^{\mathbf{T}}Y$.
Relation de polarisation entre produit scalaire et norme. Identité du parallélogramme.
Base OTN, expression du PS dans une base OTN
Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour une suite libre. Matrice de passage en dimension finie.
Orthogonal d'un sous-ensemble de E : $F^{\perp}$, propriétés.
Théorème : Si $E = F \oplus G$ et $F \perp G$ alors $G = F^{\perp}$.
• **Théorème fondamental** : Si F est un SEV de dimension finie d'un PHR E, alors $F \oplus F^{\perp} = E$.
• **Contre-exemples où $F \oplus F^{\perp} \neq E$** :

• $E = C^o([a,b], \mathbb{R})$ et F l'ensemble des fonctions polynomiales avec le PS $(f|g) = \displaystyle\int_{[a,b]} fg$.
• $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in E \text{ tel que } P(1) = 0\}$ son PS canonique.

Projection orthogonale, expression dans une base OTN, distance vecteur-SEV.
Isomorphisme canonique entre un espace euclidien et son dual.
Adjoint : définition - expression dans une base OTN - sous-espace stable - matrice de l'adjoint.
• $\ker u^* = (Imu)^{\perp}$, $Imu^* = (\ker u)^{\perp}$, rang
Automorphismes orthogonaux (isométries (vectorielles)), matrices orthogonales, réflexions, symétries orthogonales.
• Groupes $\mathcal{O}(E)$, $O_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}^+(E)$ $SO_n(\mathbb{R})$, étude complète en dimension 1 , 2 et 3.
(Les étudiants doivent savoir parfaitement trouver les éléments (axe et angle) d'une rotation).
Angle orientés de 2 vecteurs d'un plan orienté.
•* Décomposition :

$$\forall A \in O_n(R) \text{ , il existe 2 entiers } p \text{ et } q\text{, des réels } \theta_1,...., \theta_r \text{ tel que } A = P \begin{pmatrix} I_p & & & & 0 \\ & -I_q & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\text{avec } P \in O_p(\mathbb{R}) \text{ et } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

• Diagonalisation (OTN) des endomorphismes symétriques et matrices symétriques : **théorème spectral** (version endomorphisme et matriciel). Caractérisation des projecteurs orthogonaux.
Endomorphismes, matrices symétriques positives ou définies positives.
Notation $S^+(E)$, $S^{++}(E)$, $S_n^+(\mathbb{R})$, $S_n^{++}(\mathbb{R})$.
• Caractérisation avec le spectre.
• Norme subordonnée à une norme euclidienne : $|||u|||^2$ est la plus grande valeur propre de $u^* \circ u$.
Complément (HPTS) : produit scalaire canonique et norme de Schur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Prévisions : Équations différentielles, systèmes différentiels.