

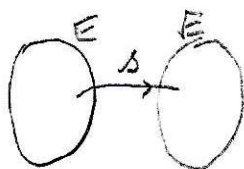
1°) Soit $f: E \longrightarrow F$ une bijection de E sur F (ça existe car ils ont même cardinalité),

Posons $T_n(E)$: l'ensemble des involutions de E

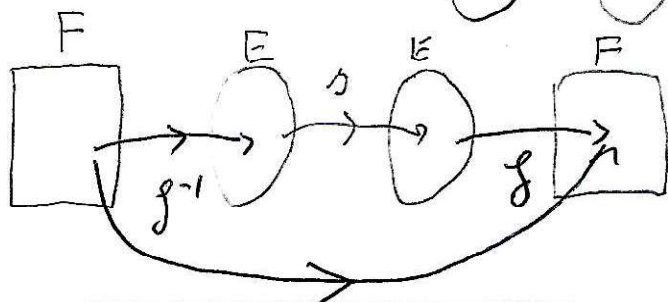
$T_n(F)$: _____ F

Il faut pour toute involution $s \in T_n(E)$ associer une involution

$s_1 \in T_n(F)$, L'idée



que l'on encode :



$s_1 = f \circ s \circ f^{-1}$ semble convenir.

Posons $\boxed{\phi: T_n(E) \longrightarrow T_n(F)}$ ϕ est bien définie car $\forall s \in T_n(E)$

$$s \longmapsto f \circ s \circ f^{-1}$$

$f \circ s \circ f^{-1} \in \mathcal{F}(F, F)$ et $(f \circ s \circ f^{-1}) \circ (f \circ s \circ f^{-1}) = f \circ \underbrace{s \circ s}_{id_E} \circ f^{-1} = id_F$
donc $f \circ s \circ f^{-1} \in T_n(F)$ soit $s \in T_n(F)$;

Comme $s = f \circ s \circ f^{-1} \Leftrightarrow s \circ f = f \circ s \Leftrightarrow f^{-1} \circ s \circ f = s$ qui est unique quand s est fixé et qui vérifie $(f^{-1} \circ s \circ f) \circ (f^{-1} \circ s \circ f) = id_E$,

on a ϕ qui est bijective et $\phi^{-1}: T_n(F) \longrightarrow T_n(E)$

$$s \longmapsto f^{-1} \circ s \circ f$$

ça rappelle
quoi??

Par bijectivité, $\boxed{\text{card } T_n(E) = \text{card } T_n(F)}$ (2)

2°) et plein d'autres possibilités

2°) $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 4$ et $T_4 = 10$

3°) a) $\sigma|_{\llbracket 1, n-1 \rrbracket} = \sigma_1$ vérifie $\sigma_1 \circ \sigma_1 = \text{id}_{\llbracket 1, n-1 \rrbracket}$
 $\hookrightarrow$ restriction à $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$

de plus $\sigma_1(\llbracket 1, n-1 \rrbracket) = \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ car $\sigma(n) = n$ et σ_1 bijective.

cl $\boxed{\text{le nombre recherché est de : } \underline{\underline{T_{n-1}}}}$

b) si $\sigma(n) = k$ alors $\underbrace{\sigma \circ \sigma(n)}_{=n} = \sigma(k)$

donc $\sigma(k) = n$

Autrement dit σ échange n et k .

Soit $E' = \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{n, k\}$ et $\sigma_1 = \sigma|_{E'}$

σ_1 est une involution de E' : il y en a donc $\boxed{\underline{\underline{T_{n-2}}}}$

4°) Soit I l'ensemble des involutions de $E = \llbracket 1, n \rrbracket$,

I_0 l'ensemble des involutions de I tel que $\sigma(n) = n$

$\left\{ \begin{array}{l} I_k \\ k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \end{array} \right.$ $\sigma(n) = k$

on a $I = I_0 \cup (I_1 \cup \dots \cup I_{n-1})$ réunion disjointe

$T_n = \text{card } I = T_{n-1} + (T_{n-2} + \dots + T_{n-2}) = T_{n-1} + (n-1)T_{n-2}$

$$d: \forall n \geq 3 \quad T_n = T_{n-1} + (n-1)T_{n-2}$$

③

```
>>> ===== RESTART =====
>>>
>>> def invo(n): # version itérative de T(n)
    if n<=2:
        return(n)
    else:
        a=1
        b=2
        for i in range(3,n+1):
            aux=a
            a=b
            b=b+(i-1)*aux
        return(b)

>>> for n in range(1,16):
    print('T_',n,' = ',invo(n))
```

```
T_ 1 = 1
T_ 2 = 2
T_ 3 = 4
T_ 4 = 10
T_ 5 = 26
T_ 6 = 76
T_ 7 = 232
T_ 8 = 764
T_ 9 = 2620
T_ 10 = 9496
T_ 11 = 35696
T_ 12 = 140152
T_ 13 = 568504
T_ 14 = 2390480
T_ 15 = 10349536
>>>
```

ou en récursif :

```
def T(n):
    if n==1:
        return 1
    elif n==2:
        return 2
    else:
        return T(n-1)+(n-1)*T(n-2)
```

exercice 2

①

1) * $\mathcal{H}_1 \in \mathcal{I}$ et $\mathcal{H}_1$ est une partition.

* $\mathcal{H}_2 \notin \mathcal{I}$ car $\emptyset \in \mathcal{H}_2$

* $\mathcal{H}_3 \in \mathcal{I}$ mais n'est pas une partition (à cause de 4).

* $\mathcal{H}_4 \notin \mathcal{I}$ car $\{1, 4\} \cap \{2, 4\} \neq \emptyset$

2) * $\mathcal{H}_1 = \{2\mathbb{N}, 2\mathbb{N}+1\} \in \mathcal{H}$ et c'est une partition.

* $\mathcal{H}_2 = \{\{1, 3\}, \{2, 6\}, \{9, 10, 11\}\} \in \mathcal{H}$

* $\mathcal{H}_3 = \{\{ab \ 1^n\}, \{1\}, \{2^n, n \geq 2\}\} \in \mathcal{H}$

* $\mathcal{H}_4 = \{\emptyset, \{1, 3\}\} \notin \mathcal{H}$.

3) Soit $\mathcal{H}_0$ un élément maximal de ϕ .

$$* \forall H \in \mathcal{H}_0, H \neq \emptyset$$

$$* \forall (F, G) \in \mathcal{H}_0^2 \mid F \neq G \text{ alors } F \cap G = \emptyset$$

$$* \text{Supposons que } \bigcup_{H \in \mathcal{H}_0} H \neq E, \text{ alors posons } H_1 = E - \bigcup_{H \in \mathcal{H}_0} H \neq \emptyset$$

$$\text{et posons } \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0 \cup \{H_1\}, \text{ on a } \mathcal{H}_1 \in \mathcal{P}(E),$$

$$\forall H \in \mathcal{H}_1, H \in \mathcal{H}_0 \text{ ou } H = H_1 \text{ donc } H \neq \emptyset \text{ et a.p.}$$

$$\forall (F, G) \in \mathcal{H}_1, F = G \text{ ou } F \cap G = \emptyset \text{ (à rev.)}$$

$$(a) \text{ à l'inverse si } F \in \mathcal{H}_0 \text{ et } G = H_1 : F \cap G = \emptyset$$

$$\text{donc } \mathcal{H}_1 \in \phi, \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_1 \text{ et } \mathcal{H}_0 \neq \mathcal{H}_1 : \text{Absurde}$$

$$\text{d'où } \bigcup_{H \in \mathcal{H}_0} H = E \quad \text{csg : } \underline{\mathcal{H}_0 \text{ est une partition de } E}$$

Réciproquement, soit $\mathcal{H}_0$ une partition de E , on a

$$\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{P}(E), \forall (H, F, G) \in \mathcal{H}_0^3, H \neq \emptyset \text{ et } (F \cap G = \emptyset \text{ ou } F = G)$$

$$\text{donc } \underline{\mathcal{H}_0 \in \phi}$$

③

Soit $H \in \phi$ tel que $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$.

$\forall H \in \mathcal{H}$, $H \neq \emptyset$ (car $\mathcal{H} \in \phi$) d'où $\exists x \in H$.

comme $\mathcal{H}_0$ est une partition de E , $\exists F \in \mathcal{H}_0 \mid x \in F$

comme $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$, $F \in \mathcal{H}$ donc :

$(F, H) \in \mathcal{H}^2$ et $x \in F \cap H \neq \emptyset$, donc $F = H$ ($\mathcal{H} \in \phi$)

d'où $H = F \in \mathcal{H}_0$ donc $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_0$ sq $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$

cl' : Les elt maximaux de ϕ sont exactement les partitions de E

4) Soit $\mathcal{H} \in \phi$, si $\mathcal{H}$ est une partition de E alors
 $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$ convient. Sinon comme $\mathcal{H} \in \phi$, on a

$\bigcup_{H \in \mathcal{H}} H \neq E$, Posons $H_1 = E - \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ et $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H} \cup \{H_1\}$

on a $\mathcal{H}_1 \in \phi$ (vu au 2°) et $\bigcup_{H \in \mathcal{H}_1} H = E$, d'où $\mathcal{H}$, partition de E .

cl : $\forall \mathcal{H} \in \phi$, $\exists \mathcal{H}_1$, partition de E tq, $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_1$

Exercice 3

P' admet 0 et 1 comme racine d'ordre au moins n donc $P' = Qx^n(1-x)^n$. Comme on veut

$$\deg P = 2n+1, \quad Q = \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

$$\text{Donc } P(x) = \lambda \int_0^x t^n(1-t)^n dt \text{ et } P(1) = 1 = \lambda \int_0^1 t^n(1-t)^n dt$$



On en déduit que
$$P(n) = \frac{1}{\int_0^1 t^n (1-t)^n dt} \int_0^1 t^n (1-t)^n dt \quad (2)$$

cette expression prouve l'unicité et l'existence de $\mathbb{R}[X]$.

Montrons que $P \in \mathbb{R}[X]$:

Calculons
$$I_n = \int_0^1 \underbrace{t^n}_u \underbrace{(1-t)^n}_v dt = \left[\underbrace{\frac{t^{n+1}}{n+1}}_{\text{pp}} (1-t)^n \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} n(1-t)^{n-1} dt$$

$$= \frac{n}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} (1-t)^{n-1} dt \quad (\text{vase communicant})$$

$$= \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n+2} \int_0^1 t^{n+2} (1-t)^{n-2} dt$$

$$= \frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{n+2} \times \dots \times \frac{1}{2n} \times \int_0^1 t^{2n} \underbrace{(1-t)^0}_{=1} dt$$

$$= \frac{n!}{(n+1)(n+2)\dots \times 2n} \times \frac{1}{2n+1} = \frac{n! \times n!}{(2n+1)!}$$

d'où
$$P(n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k t^{n+k} dt$$

$$= \frac{(2n+1)!}{n!^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{x^{n+k+1}}{n+k+1}$$

Poss on) $a_k = \frac{(2n+1)!}{n! 2^k} \binom{n}{k} \frac{1}{n+k+1}$ par tout $k \in [0, n]$ ③

$$= \frac{(2n+1)!}{n! 2^k} \times \frac{n!}{k! (n-k)!} \times \frac{1}{n+k+1}$$

$$= \frac{(2n+1) \cdots \times (n+k+2) \cancel{(n+k+1)} \times \cdots \times \cancel{n} \times \cancel{(n-1)} \cdots \times 1}{\cancel{n!} k! (n-k)! \cancel{(n+k+1)}}$$

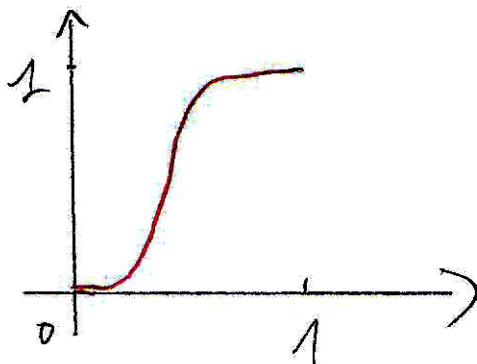
$$= \frac{\overbrace{(2n+1) \cdots (n+k+2)}^{n-k \text{ termes}}}{(n-k)!} \times \frac{\overbrace{(n+k) \times \cdots \times n}^{k \text{ termes}}}{k!}$$

$$= \binom{2n+1}{n-k} \times \binom{n+k}{k} \in \mathbb{Z}$$

d': $P(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{n-k} \binom{n+k}{k} n^{n+k+1} \in \mathbb{Z}_{2n+1}[X]$

Mon le graphe donne :

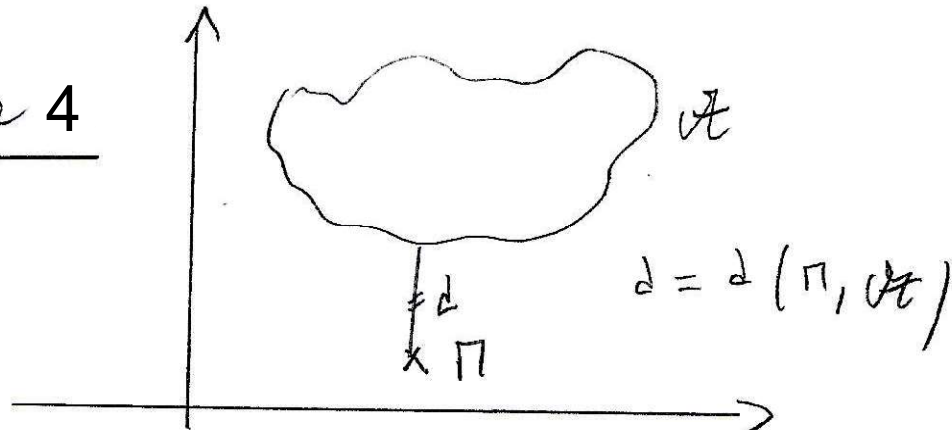
p est toujours plate en 0 et 1



exercice 4

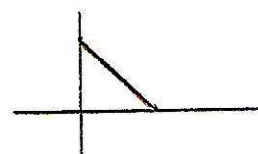
①

1')

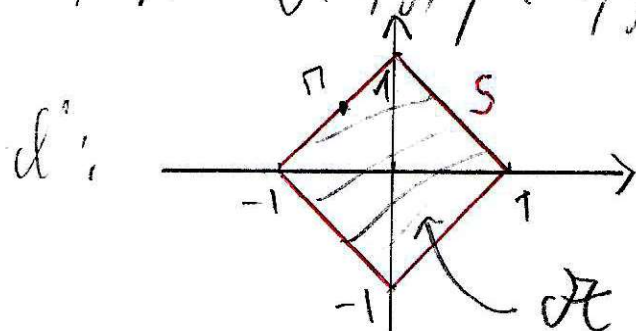


$\{\pi, N \in A\} \subset \mathbb{R}_1$ non vide et minoré par 0: d' : $d(\pi, A)$ existe

2') si $\pi = (x, y) \in S$, alors $(\pm x, \pm y) \in S$. on se limite donc à $S \cap (\mathbb{R}^+)^2$: $x + y = 1$



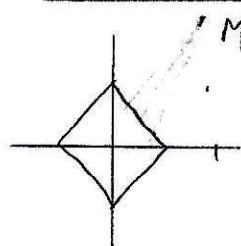
$(-x, -y) = s_0(x, y)$, $(-x, y) = s_{0y}(x, y)$ et $(x, -y) = s_{0x}(x, y)$



$\forall n \geq 2 \quad N_n = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \in A \quad (|-\frac{1}{2}| + |\frac{1}{2} - \frac{1}{n}| = 1 - \frac{1}{n} < 1)$

d' ou $MN_n = \frac{1}{n} \geq d(\pi, A) \geq 0$, et $n \rightarrow \infty$ il vient;

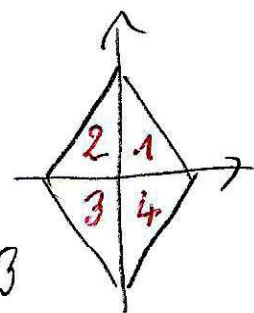
$$d(\pi, A) = 0$$



* Notons 1-2-3-4 les régions:

si N appartient à la région 2 ou 3

notons N' son symétrique % à Oy



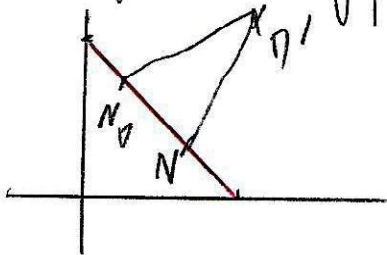
2


$$\exists N' \in "N_4" \mid N' \cap' \prec N \cap'$$

cs9 $\forall n \in \mathcal{A}, \exists n' \in \mathcal{A}, (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{Z}} = \mathcal{A}_1 \mid n'n \leq n$

* on va d'abord chercher $N_0 \in [A, B]$, $A = (0, 1)$ et $B = (1, 0)$

tal que $N_0 \cap' = \bigcup \{ N \cap' \mid N \in [A, B] \}$



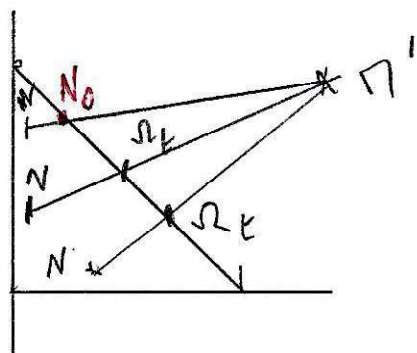
$$[A, B] = \{ tA + (1-t)B = (1-t, t), t \in [0, 1] \}$$

Polaris $\Omega_t = (1-t, t)$

$$\begin{aligned} (\Omega_{\mathbb{E}} \eta)^2 &= (1-t-2)^2 + (t-5/2)^2 = (t+1)^2 + (t-5/2)^2 \\ &= 2t^2 - 3t + \frac{29}{4} = f(t) \quad f'(t) = 4t - 3 \end{aligned}$$

$$g'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 3/4$$

t	0	3/4	1
p'	-	0	+
f			



d'où $N_0 = \Omega_{3/4} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ ③

et $N_0 \pi' = \sqrt{f(3/4)} = \frac{7}{\sqrt{9}} = \frac{7\sqrt{2}}{4}$

$\forall N \in \mathcal{A} \cap (\mathbb{R}^+)^2 = \mathcal{A}_1$, monotone ;
 $\exists t \in [0, 1] \setminus \Omega_t \in [N, \pi']$

Pour tout $N = (x, y)$ (comme $N \in \mathcal{A}_1$, $x + y < 1$),

$$[N, \pi'] = \left\{ t(x, y) + (1-t)(2, 5/2), t \in [0, 1] \right\}$$

$$t(x, y) + (1-t)(2, 5/2) = (tx + (1-t)2, ty + (1-t)\frac{5}{2})$$

Pour tout $f(t) = tx + 2(1-t) + ty + \frac{5}{2}(1-t) \in C^0/[0, 1]$

$$f(0) = 2 + 5/2 > 1 \quad \text{et} \quad f(1) = x + y < 1$$

Par valeurs intermédiaires, $\exists t_0 \in [0, 1] \setminus f(t_0) = 0$

d'où : $\forall N \in \mathcal{A}_1, \exists t \in [0, 1] \setminus \Omega_t \in [N, \pi']$

et donc $N \pi' \geq \Omega_t \pi' \geq N_0 \pi' = \frac{7\sqrt{2}}{4}$

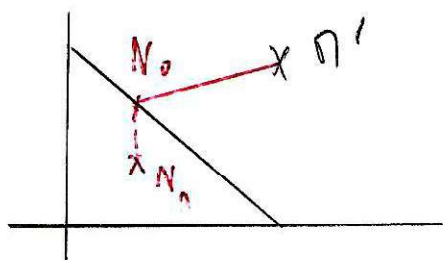
CS9 : $\underline{d(\pi', \mathcal{A}) \geq \frac{7\sqrt{2}}{4}}$

Soit $N_n = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} - \frac{1}{n} \right)$ avec $n \geq 3$

(4)

$$0 < \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{n} < 1 \text{ donc } N_n \in \mathcal{A}, \forall n \geq 3$$

$$\text{et } N_n \Pi' = \sqrt{\left(\frac{1}{4} - 2\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{n} - \frac{5}{4}\right)^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{T.E.}} \sqrt{\left(\frac{1}{4} - 2\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\right)^2} = N_0 \Pi'$$



$$\text{donc } d(\Pi', \mathcal{A}) \leq N_n \Pi'$$

$$\text{et } n \rightarrow \infty : d(\Pi', \mathcal{A}) \leq N_0 \Pi'$$

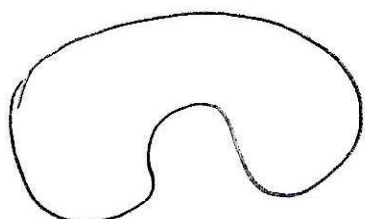
$$\text{d'où : } d(\Pi', \mathcal{A}) = N_0 \Pi' = \frac{7\sqrt{2}}{4}$$

3) voir à la fin p 10 & 11

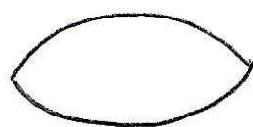
4) Pour $N = \Pi \in \mathcal{A}$ $0 \leq d(\Pi, \mathcal{A}) \leq \Pi N = 0$

$$\text{d'où : } \Pi \in \mathcal{A} \Rightarrow d(\Pi, \mathcal{A}) = 0. \text{ Réciproque fautive de 2°)}$$

5°)



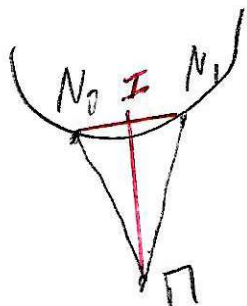
non convexe



convexe

6°) Supposons qu'il existe $(N_0, N_1) \in \mathcal{A}^2$

$$d(\Pi, \mathcal{A}) = \Pi N_0 = \Pi N_1 \text{ et } N_0 \neq N_1$$

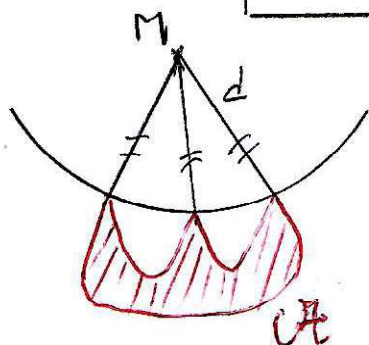


considérons I le milieu de $[N_0, N_1]$ (5)

On a par Pythagore, $IP = \sqrt{PN_0^2 - IN_0^2} < PN_1$

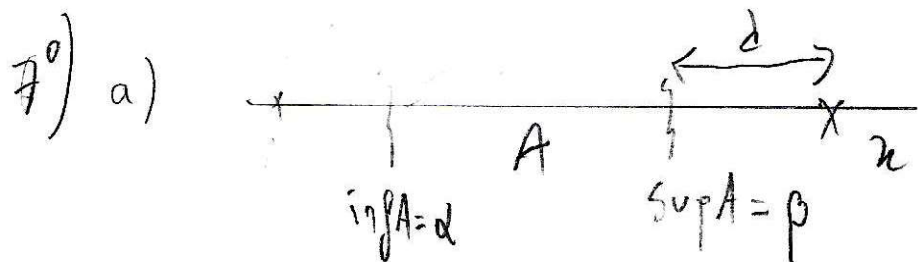
Or $I \in \mathcal{A}$ car A convexe, donc absurde

d': $d(P, \mathcal{A})$ atteint en 0 ou 1 pt de $\mathcal{A}$.



κ cercle dont P est le centre

$$d = d(P, \mathcal{A})$$



soit $x \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A \quad x > a$. $\forall q \quad d(x, A) = x - \beta$

$\forall a \in A \quad |x - a| = x - a \geq x - \beta \quad (\text{car } a \leq \beta)$

donc $d(x, A) \geq x - a \geq x - \beta$; $x - \beta$ min sur $\{|x - a|, a \in A\}$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists a_0 \in A \mid a_0 > \beta - \varepsilon$ (car $\beta = \sup A$)

d'où $x - a_0 < x - \beta + \varepsilon$

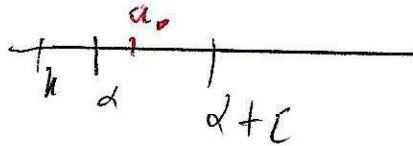
on a donc $n-\beta$ qui vérifie $\left. \begin{array}{l} n-\beta \text{ minore } X = \{|n-a|, a \in A\} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists y \in X \setminus y < n-\beta \end{array} \right\}$ (6)

Par caractérisation de l'inf :

$$d(n, A) = n - \beta = n - \sup A$$

b) $\forall a \in A \quad |n-a| = a-n \geq \alpha-n$ donc $d(n, A) \geq \alpha-n$

soit $\varepsilon > 0, \exists a_0 \in A \mid a_0 < \alpha + \varepsilon$



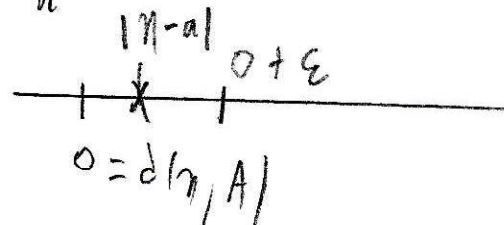
d'où $a_0 - n < \alpha - n + \varepsilon$ donc comme $a \vee a)$ on a :

$$d' : \boxed{d(n, A) = \alpha - n = \inf A - n}$$

8) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$



$\exists a \in A \setminus |n-a| < \varepsilon$

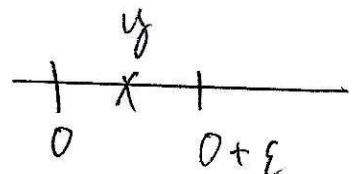


donc $a \in]n-\varepsilon, n+\varepsilon[\cap [n-\varepsilon, n+\varepsilon] \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow * 0$ minore $X = \{|n-a|, a \in A\}$

$* \forall \varepsilon > 0, \exists a \in [n-\frac{\varepsilon}{2}, n+\frac{\varepsilon}{2}] \cap A$ donc

$y = |n-a| \in X$ et $y \leq \frac{\varepsilon}{2} < 0 + \varepsilon$



d'où $0 = \inf X$ i.e. $\underline{d(n, A) = 0}$

$$d' : \boxed{d(n, A) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad [n-\varepsilon, n+\varepsilon] \cap A \neq \emptyset}$$

comme $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{R} \quad (n-\varepsilon, n+\varepsilon] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ ⑦

$$\underline{\text{cl}} \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{R} : d(n, \mathbb{Q}) = 0}$$

$$g') \quad \forall (n, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall a \in A : |n - a| \leq |n - y| + |y - a|$$

$$\text{or } d(n, A) \leq |n - a| \text{ donc } d(n, A) \leq |n - y| + |y - a|$$

$$\text{d'où } \forall a \in A : |y - a| \geq d(n, A) - |n - y|$$

$$\text{donc } d(n, A) - |n - y| \text{ minore } \gamma = \{|y - a|, a \in A\}$$

$$\text{d'où } d(y, A) \geq d(n, A) - |n - y| \quad (+ \text{gd des minoraants de } \gamma)$$

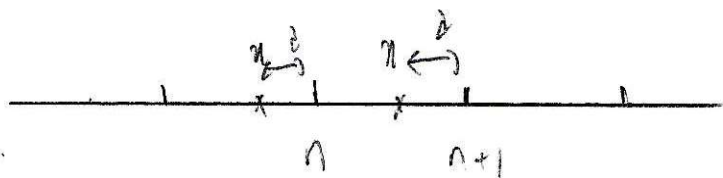
$$\text{soit } \underline{d(n, A) - d(y, A) \leq |n - y|}$$

Posons $\alpha = d(n, A) - d(y, A)$, on a $\alpha \leq |n - y|$ et
en échangeant n & y , on a : $-\alpha \leq |y - n| = |n - y|$

$$\text{d'où } |\alpha| = \max(\alpha, -\alpha) \leq |n - y|$$

$$\text{cl'} : \boxed{\forall (n, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |d(n, A) - d(y, A)| \leq |n - y|}$$

10)



(8)

* f est définie sur $\mathbb{R}$.

* Montrons que f est 1 -périodique

$$\forall n \in \mathbb{R} : \{ |n+1-n|, n \in \mathbb{Z} \} = \{ |n-p|, p \in \mathbb{Z} \}$$

$\uparrow$
car bijection de $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$:

$$p = n-1$$

$$\text{donc } \underline{\Delta(n+1, \mathbb{Z}) = \Delta(n, \mathbb{Z})}$$

* Montrons que f est paire :

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \{ |-n-n|, n \in \mathbb{Z} \} = \{ |n-p|, p \in \mathbb{Z} \}$$

$\uparrow$
 $n = -p$: bijection

$$\text{donc } \underline{\Delta(-n, \mathbb{Z}) = \Delta(n, \mathbb{Z})}$$

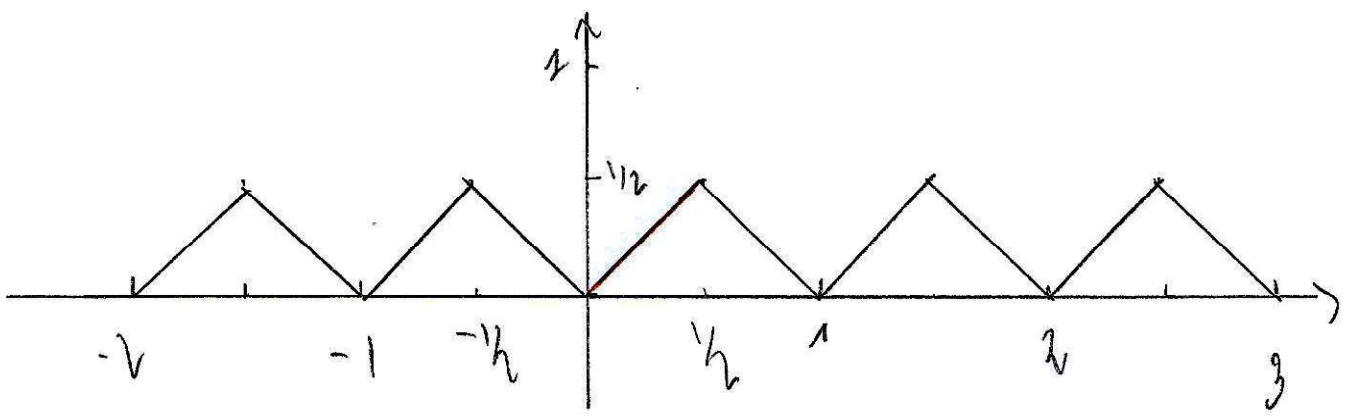
* csg il suffit d'étudier f sur $[0, \frac{1}{2}]$:

$$\underline{\forall n \in [0, \frac{1}{2}] \quad \forall |n| \geq 1 \quad |n-n| \geq ||n|-|n|| \geq n-|n|}$$

$$\geq n - \frac{1}{2}$$

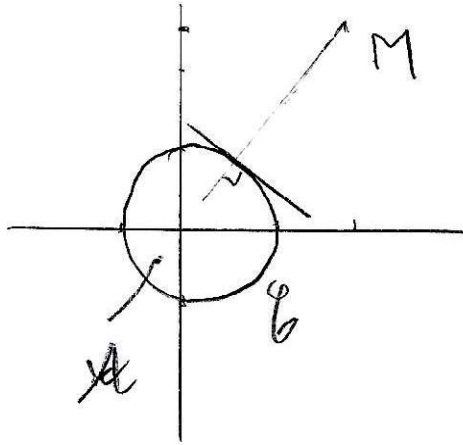
$$\text{et } |n-0| = n \leq \frac{1}{2} \quad \text{donc } \underline{\Delta(n, \mathbb{Z}) = n}$$

9



3)

(10)



chercher d'abord $d(\Pi, \mathcal{C})$ où $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 1$

soit $N(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathcal{C}$

$$\text{Et vu que } f(\theta) = \Pi N(\theta)^2 = (2 - \cos \theta)^2 + (\frac{5}{2} - \sin \theta)^2$$

$$= 4 + \frac{25}{4} + 1 - 4 \cos \theta - 5 \sin \theta$$

$$= \frac{45}{4} - 4 \cos \theta - 5 \sin \theta$$

$$f'(\theta) = 4 \sin \theta - 5 \cos \theta = \sqrt{41} \left(\frac{4}{\sqrt{41}} \sin \theta - \frac{5}{\sqrt{41}} \cos \theta \right)$$

$\theta \in [0, 2\pi]$
 $\hookrightarrow \text{étudier } [0, 2\pi]$

Posons $\alpha = \arccos \frac{4}{\sqrt{41}}$, $f'(\theta) = \sqrt{41} (\cos \alpha \sin \theta - \sin \alpha \cos \theta)$
 $\in [0, \pi/2]$ $= \sqrt{41} \sin(\theta - \alpha)$

θ	0	α	$\alpha + \pi$	2π
f'	-	0	+	0
f	$\frac{29}{4}$		$\frac{45}{4} + \sqrt{41}$	

$\frac{45}{4} - \sqrt{41} > 0$

$\frac{29}{4}$

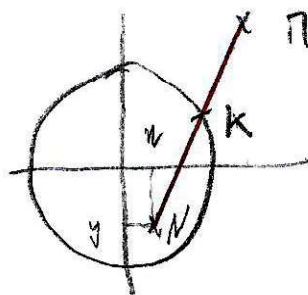
$$\frac{45}{4} - \sqrt{41} > 0$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}, \sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

$$\text{donc } \min_{\mathbb{R}} f = f(\alpha) = \frac{45}{4} - \sqrt{41}$$

Sei $N(x, y) \in \mathcal{A}$

Wann $M \notin \mathcal{A}$



(11)

$[\pi, N] \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ mit $[\pi, N] \cap \mathcal{B} = \{k\}$ an a

$$\text{denn } N\pi = Nk + k\pi \geq k\pi \geq \sqrt{\min_{\mathcal{B}} f}$$

$$\text{d.h. } d(\pi, \mathcal{A}) \geq \sqrt{\min_{\mathcal{B}} f}$$

Sei $N_n = ((1 - \frac{1}{n}) \cos \alpha, (1 - \frac{1}{n}) \sin \alpha) \in \mathcal{A}$ ($1 - \frac{1}{n} < 1, \forall n \geq 2$)

$$\|N_n\|^2 = (2 - (1 - \frac{1}{n}) \cos \alpha)^2 + (\frac{\pi}{2} - (1 - \frac{1}{n}) \sin \alpha)^2$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\alpha) = \min_{\mathcal{B}} f$$

$$\text{d.h. } d(M, \mathcal{A}) \leq \sqrt{\min_{\mathcal{B}} f}$$

$$\text{d.h. } d(\pi, \mathcal{A}) = \sqrt{\frac{4\sqrt{5}}{4} - \sqrt{41}}$$

exercice 5

①

1°) On a $\forall u \in E \quad u \leq u$. (R)

* $\forall (u, y) \in E^2 \mid u \leq y \quad y \leq u$.

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad u_i \leq y_i$ et $y_i \leq u_i$ donc $u_i = y_i$

d'où $u = y$ (S)

* $\forall (u, y, z) \in E^3, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$u_i \leq y_i \leq z_i$ donc $u_i \leq z_i$ csg $u \leq z$ (P)

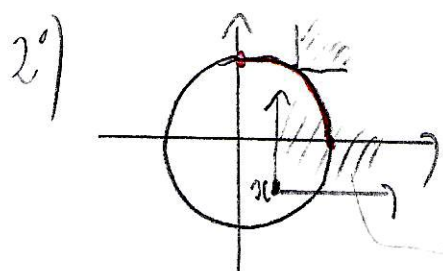
* si $n=1$, alors $\leq = \leq$ d'où totale

si $n \geq 2$, alors $u = (1, 2, 0, \dots, 0)$

$y = (2, 1, 0, \dots, 0)$

on a ni $u \leq y$ ni $y \leq u$ csg pas partielle

cf: $\leq$ est un ordre partiel sauf pour $n=1$



zone de pt $y \mid u \leq y$

(2)

* Soit $a \in B$, si il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $a_i < 0$ alors

$$x = (a_1, \dots, a_{i-1}, -a_i, \dots, a_n) \in B \text{ et } a \leq x \text{ et } x \neq a$$

donc a non elt maximal

* Soit $a \in B \setminus \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket a_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n a_i^2 < 1$

$$\text{Soit } x = \lambda a = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) \text{ et } \exists i_0 \mid a_{i_0} > 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^n a_i^2, \text{ on veut } x \geq a \text{ et } x \in B \text{ par}$$

car il suffit pour $\lambda > 1$ ($a \leq x$) et $\lambda^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 < 1$ soit

$$1 < \lambda < \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}. \text{ Soit } \lambda_0 = \frac{1 + 1/s}{2} \text{ avec } s = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} < 1$$

$$\text{Or } 1 < \lambda_0, \lambda_0 a = x \in B, a \leq x \text{ et } x \neq a$$

donc a non maximal

Si $a = (0, \dots, 0)$ alors $a \leq x = (1, 0, \dots, 0)$ et $x \neq a$

donc $(0, \dots, 0)$ non maximal

* Soit $a \in B \setminus \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket a_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$

Soit $\lambda \in \mathcal{B} \mid a \leq \lambda$ donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket a_i \leq \lambda_i$ ③

d'où $0 \leq a_i^2 \leq \lambda_i^2$ et $1 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq 1$
 $\hookrightarrow \lambda \in \mathcal{B}$

donc $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 1$, comme $\forall i, a_i^2 \leq \lambda_i^2$, on a

donc $\forall i, \lambda_i^2 = a_i^2 \Rightarrow |\lambda_i| = a_i$ or $0 \leq a_i \leq \lambda_i$

donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \lambda_i = a_i$ soit $\lambda = a$

d'où : Les elt maximaux de $\mathcal{B}$ sont les pts $a \in \mathcal{B} \mid$
 $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket a_i \geq 0$ & $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$