exercice 1

DM 2: Corrigé

a) $r^2 - \underbrace{10}_{3+7}r + \underbrace{21}_{3\times 7} = 0$ donc $r = 3$ ou $r = 7$

Cqs $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ \forall n \in \mathbb{N} \ u_n = \lambda 3^n + \mu 7^n$

$$\begin{aligned} n=0 &: \\ n=1 &: \end{aligned} \begin{cases} \lambda + \mu = 6 \\ 3\lambda + 7\mu = 26 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 6 \\ 0 + 4\mu = 8 \quad L_2 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2 \\ \lambda = 6 - 2 = 4 \end{cases}$$

cl° $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 4 \cdot 3^n + 2 \cdot 7^n}$

Enfin $\dfrac{u_n}{2 \cdot 7^n} = 1 + \dfrac{4}{2}\left(\dfrac{3}{7}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$

cl° $\boxed{u_n \sim 2 \cdot 7^n}$

b) Comme pour les éq. diff. :

$u_{n+2} = 10 u_{n+1} - 21 u_n + 12n$ en soustrayant :

$v_{n+2} = 10 v_{n+1} - 21 v_n + 12n$

$(u-v)_{n+2} = 10(u-v)_{n+1} - 21(u-v)_n$ ②

cqs * On recherche toutes les solutions de

$E_0 : u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n$

* On recherche une solution (particulière)

de $E_1 : u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n + 12n$

* E_0 : $\underline{u_n = \lambda \cdot 3^n + \mu \cdot 7^n}$

* E_1 : On essaye de trouver une suite du

type $u_n = an + b$:

$\forall n \in \mathbb{N}; a(n+2) + b = 10(a(n+1)+b) - 21(an+b) = 12n$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ [a - 10a + 21a]n + [2a + b - 10a - 10b + 21b] = 12n$

on a 2 polynômes qui sont égaux sur $\mathbb{N}$, infini,

donc $\begin{cases} 12a = 12 \\ -8a + 12b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \end{cases}$

d'où $\underline{u_n = n + \frac{2}{3}}$

③

cqs la suite (u_n) recherchée est de la forme :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda 3^n + \mu . 7^n + n + 2/3$

$$n=0 : \begin{cases} 0 = \lambda + \mu + \frac{2}{3} \\ 0 = 3\lambda + 7\mu + \frac{5}{3} \end{cases} \quad n=1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = -\frac{2}{3} \\ 0 + 4\mu = -\frac{5}{3} + \frac{6}{3} \quad L_2 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \frac{1}{12} \\ \lambda = \frac{-5}{12} \end{cases}$$

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{-5}{12} \cdot 3^n + \frac{1}{12} \cdot 7^n + n + \frac{2}{3}}$

c) $r^2 - 2r\cos\theta + 1 = 0$, comme $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

$r = e^{i\theta}$ ou $r = e^{-i\theta}$ $\qquad e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = 1$,

si $\theta \not\equiv 0 \ (\pi)$, $e^{i\theta} \neq e^{-i\theta}$ donc $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda e^{in\theta} + \mu e^{-in\theta}$

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu = 0 \\ u_{p+1} = \lambda e^{i(p+1)\theta} + \mu e^{-i(p+1)\theta} = 0 \end{cases}$$

④

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda\, 2i \sin(p+1)\theta = 0 \end{cases}$$

* si $\sin(p+1)\theta \neq 0$, $\lambda = 0$ d'où $\mu = 0$ et $\forall n : u_n = 0$.

* $\sin(p+1)\theta = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \setminus (p+1)\theta = k\pi$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \setminus \theta = \frac{k\pi}{p+1}$$

Posons $\boxed{\theta_0 = \frac{k\pi}{p+1}}$

On a alors, pour ce θ_0, $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{p+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mu = -\lambda$

donc $\underline{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2\lambda i \sin \frac{n\pi}{p+1}}$ et $\lambda \neq 0$

Comme pour $\theta = \pi$, on a $\theta_0 < \theta$,

d $\boxed{(u_n) \text{ vérifie la condition ssi } \exists \alpha \in \mathbb{C}^* \setminus \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha \sin \frac{n\pi}{p+1}}$

a)

n	1	2	3	4	5
$\frac{n(n+1)}{2}$	1	3	6	10	15

et $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\left| \begin{array}{l} u_{\frac{n(n+1)}{2}} = n \\ u_{\frac{n(n+1)}{2}+1} = n+1 \end{array} \right.$

- c'est vraie pour $n=1$.
- Si c'est vraie pour n :

$$\underbrace{u_k = u_{k+1} = \dots = u_{\frac{n(n+1)}{2}}}_{n \text{ termes égaux à } n} = n$$

puis $\underbrace{u_{\frac{n(n+1)}{2}+1} = \dots = u_{k'}}_{n+1 \text{ termes égaux à } n+1}$ puis $u_{k'+1} = n+2$

cqs $k' - \frac{n(n+1)}{2} = n+1$

donc $k' = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

d'où $u_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = n+1$ et $u_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}+1} = n+2$

donc H_{n+1} vraie

d'o $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{\frac{n(n+1)}{2}} = n}$

Comme $\frac{13 \times 14}{2} = 91$ et $\frac{14 \times 15}{2} = 105$

n	91	92	100	105	106
u_n	13	14	. . . . . .	14	15

d'o $\boxed{u_{100} = 14}$

b) Si $u_n = x$, c'est que $n \in \left]\!\left] \frac{(x-1)x}{2}, \frac{x(x+1)}{2} \right]\!\right]$

(exemple $u_n = 14$ si $n \in]\!] 91, 105]\!]$)

x est donc le 1er entier i tel que

$$\frac{i(i+1)}{2} \geqslant n$$

cqs

```
def u(n):
    i=1
    while i*(i+1)//2 < n:
        i=i+1
    return i
```

Voir une autre sol. p 5

c) * f est continue et C^1 sur $\mathbb{R}^+$ par TG.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : f'(x) = x + \frac{1}{2} > 0$$

x	0	$+\infty$
f'	$+$	
f	$0 \nearrow$	$+\infty$

par le th de bijection

f bijective de $\mathbb{R}^+$ ds $\mathbb{R}^+$

* Résolvons $y = \dfrac{x(x+1)}{2}$

$$\iff x^2 + x - 2y = 0$$

$$\Delta = 1 + 8y \geqslant 0 \quad \text{car } y \geqslant 0$$

donc $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8y}}{2}$

Comme $x \geqslant 0$, il faut $x = \dfrac{-1 + \sqrt{1+8y}}{2}$

d'où
$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ y &\longmapsto \frac{-1+\sqrt{1+8y}}{2} \end{aligned}}$$

d) Avec le b) $u_n = n \iff f(n-1) < n \leqslant f(n)$

$$\iff x-1 < f^{-1}(n) \leqslant n$$

car f^{-1} st $\nearrow$ sur $\mathbb{R}^+$.

d'où $\quad u_n = n \iff -n \leq -f^{-1}(n) < -n+1$

c'est pour avoir $\leq$ $<$ ds le bon ordre

donc $\quad -n = \lfloor -f^{-1}(n) \rfloor$

d'o $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = -\left\lfloor \frac{1-\sqrt{1+8n}}{2} \right\rfloor}$

voir p 5

```
from math import *

def u(n):
    k=1
    while k*(k+1)//2<n:
        k=k+1
    return k

def v(n):
    pas=1
    nbpas=1
    for i in range(1,n):# on ne fait brien si n=1
        if nbpas==pas:
            pas=pas+1
            nbpas=1
        else:
            nbpas=nbpas+1
    return pas

def f(x):
    return(x*(x+1)/2)

def g(y):
    return (-1+sqrt(1+8*y))/2

def uu(n):
    return -floor(-g(n))

def verif(n):
    for i in range(1,n+1):
        if u(n)!=u(n):
            return False
    return True

for n in range(1,20):
    print([n,u(n),v(n),uu(n)],end=' ')

In [1]: (executing lines 1 to 36 of "uusuitedm.py")
[1, 1, 1, 1] [2, 2, 2, 2] [3, 2, 2, 2] [4, 3, 3, 3]
[5, 3, 3, 3] [6, 3, 3, 3] [7, 4, 4, 4] [8, 4, 4, 4]
[9, 4, 4, 4] [10, 4, 4, 4] [11, 5, 5, 5] [12, 5, 5, 5]
[13, 5, 5, 5] [14, 5, 5, 5] [15, 5, 5, 5] [16, 6, 6, 6]
[17, 6, 6, 6] [18, 6, 6, 6] [19, 6, 6, 6]

In [2]: verif(1000)
Out[2]: True
```

exercice 3

1) et 2) Posons $f_n(x) = e^x - x^n$

f_n est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ par TG.

$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f_n'(x) = e^x - n x^{n-1}$ par facile.

Autre chose : $\begin{cases} e^x = x^n \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = n \ln x \\ x > 0 \end{cases}$

$e^0 \neq 0^n, \forall n \geq 1$ $\qquad \iff \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{n} \\ x > 0 \end{cases}$

Posons $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, g C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ par TG

$\forall x > 0 \quad g'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

x	0		e		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

par le thm de la bijection, g bijective

- de $]0, e]$ sur $]-\infty, \frac{1}{e}]$
- de $[e, +\infty[$ sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$

$\frac{1}{n} \in]0, \frac{1}{e}] \iff n \geq e$

$\frac{1}{n} \in]-\infty, \frac{1}{e}] \iff n \geq e$ $\qquad$ comme $\lfloor e \rfloor = 2$

2

d'où $\boxed{\forall n \geq 3,\ \text{l'équation admet exactement 2 solutions } ; u_n, v_n \text{ tq } 0 < u_n \leq e \leq v_n}$

) on a $u_n \leq e$ donc $\dfrac{\ln u_n}{u_n} = \dfrac{1}{n}$

donc $0 < u_n = n \ln u_n \leq e$

D'où $0 < \ln u_n \leq \dfrac{e}{n}$; $\ln u_n \longrightarrow 0$

$\underline{TE}$

par critère séquentiel ; $u_n \longrightarrow e^0 = 1$

d'où $\boxed{(u_n) \text{ cvg vers } 1}$

Posons $u_n = 1 + \alpha_n$ et $\alpha_n \longrightarrow 0$.

$$\frac{\ln(1+\alpha_n)}{1+\alpha_n} = \frac{1}{n} \quad , \text{ or } \left| \begin{array}{l} \ln(1+\alpha_n) \sim \alpha_n \\ 1+\alpha_n \sim 1 \end{array} \right.$$

donc $\dfrac{\alpha_n}{1} \sim \dfrac{1}{n}$ d'où $\boxed{u_n - 1 \sim \dfrac{1}{n}}$

exemple ; $u_{100} \overset{\text{Maple}}{\approx} \underbrace{1,01}_{1+1/100},015\ldots$

4) Si (v_n) cvg vers $\ell \in \mathbb{R}$, comme $\left| \begin{array}{l} v_n \geq e, \\ \forall n \geq 3 \end{array} \right.$

$\ell \geq e$ et donc $\dfrac{\ln v_n}{v_n} \xrightarrow[n \to \infty]{TG} \dfrac{\ln \ell}{\ell} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$

donc $\ln \ell = 0$ soit $\ell = 1$ absurde

Comme $\dfrac{\ln v_n}{v_n} = \dfrac{1}{n}$, $v_n = n \ln v_n \geq n \ln e = n$

par T.E., $\boxed{(v_n) \text{ dvg vers } +\infty}$

Comme $v_n \geq n$, $\underbrace{n \ln v_n}_{= v_n} \geq n \ln n \Rightarrow \underline{v_n \geq n \ln n}$

Comparons v_n à $n \ln n$; Posons $\alpha_n = \dfrac{v_n}{n \ln n}$

$$\frac{\ln v_n}{v_n} = \frac{1}{n} \Rightarrow v_n = n \ln v_n$$

$$\Rightarrow \ln v_n = \ln n + \ln(\ln v_n)$$

$$\Rightarrow \ln v_n - \ln(\ln v_n) = \ln n$$

$$\Rightarrow \ln v_n \Big[1 - \underbrace{\frac{\ln(\ln v_n)}{\ln v_n}}_{\to 1 \ (CC)} \Big] = \ln n$$

donc $\ln v_n \sim \ln n$, comme $v_n = n \ln v_n$

$$\alpha_n \sim \frac{n \ln n}{n \ln n} = 1$$

cqs $\alpha_n \to 1$ d' $\boxed{v_n \sim n \ln n}$

5) Reprenons g :

$$g(v_n) - g(n\ln n) \overset{\text{TAF}}{=} (v_n - n\ln n)\, g'(c_n)$$

avec $n\ln n < c_n < v_n$ (*)

Or $g'(c_n) = \dfrac{1 - \ln c_n}{c_n^2}$

(*) donne $1 < \dfrac{c_n}{n\ln n} < \dfrac{v_n}{n\ln n}$ donc $\underline{c_n \sim n\ln n}$

$\to 1$ TE

cqs $1 - \ln c_n \sim -\ln c_n = -\ln(n\ln n(1+\alpha_n))$ et $\alpha_n \to 0$

$= -\ln(n\ln n) - \underbrace{\ln(1+\alpha_n)}_{\to 0}$

$\sim -\ln(n\ln n)$

$\underline{\text{cqs}}$ $g'(c_n) \sim \dfrac{-\ln(n\ln n)}{(n\ln n)^2}$

Or $g(v_n) - g(n\ln n) = \dfrac{1}{n} - \left(\dfrac{\ln n + \ln(\ln n)}{n\ln n}\right)$

$= -\dfrac{\ln(\ln n)}{n\ln n}$

⑤

d'où $\quad \dfrac{\ln(\ln n)}{n\ln n} \sim (v_n - n\ln n) \times \left(\dfrac{-\ln(n\ln n)}{(n\ln n)^2}\right)$

cqs $\quad v_n - n\ln n \sim \dfrac{\ln(\ln n)}{n\ln n} \times \dfrac{(n\ln n)^2}{\ln(n\ln n)}$

$$\sim \frac{\ln(\ln n)}{\ln(n)+\ln(\ln n)} \times n\ln n$$

$$\sim \frac{\ln(\ln n)}{\cancel{\ln n}} \times n\cancel{\ln n}$$

$$\sim n\ln\ln n$$

d'où $\boxed{v_n = n\ln n + n\ln(\ln n) + o(\ln(\ln n))}$

exemple avec Maple

$v_{10000} \approx \underbrace{11}\,671,14\ldots$

$n\ln n + n\ln(\ln n) \approx \underbrace{11}\,4306,67\ldots$

avec $n = 10000$

exercice 4*

a) $|z_n| = \prod_{k=1}^{n} \left|1+\frac{i}{k}\right| = \sqrt{\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k^2}\right)}$

Posons $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k^2}\right)$, comme $1+\frac{1}{k^2} > 0$,

$S_n = \ln P_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$

Comme $\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \sim \frac{1}{k^2} \geq 0$ et que $\left(\sum \frac{1}{k^2}\right)$ cvg,

par T.C., $\left(\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)$ cvg

Posons $r = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ $\quad (r \simeq 1,3\ldots)$

d° $\boxed{(|z_n|) \text{ cvg vers } e^{r} \simeq 3,6\ldots}$

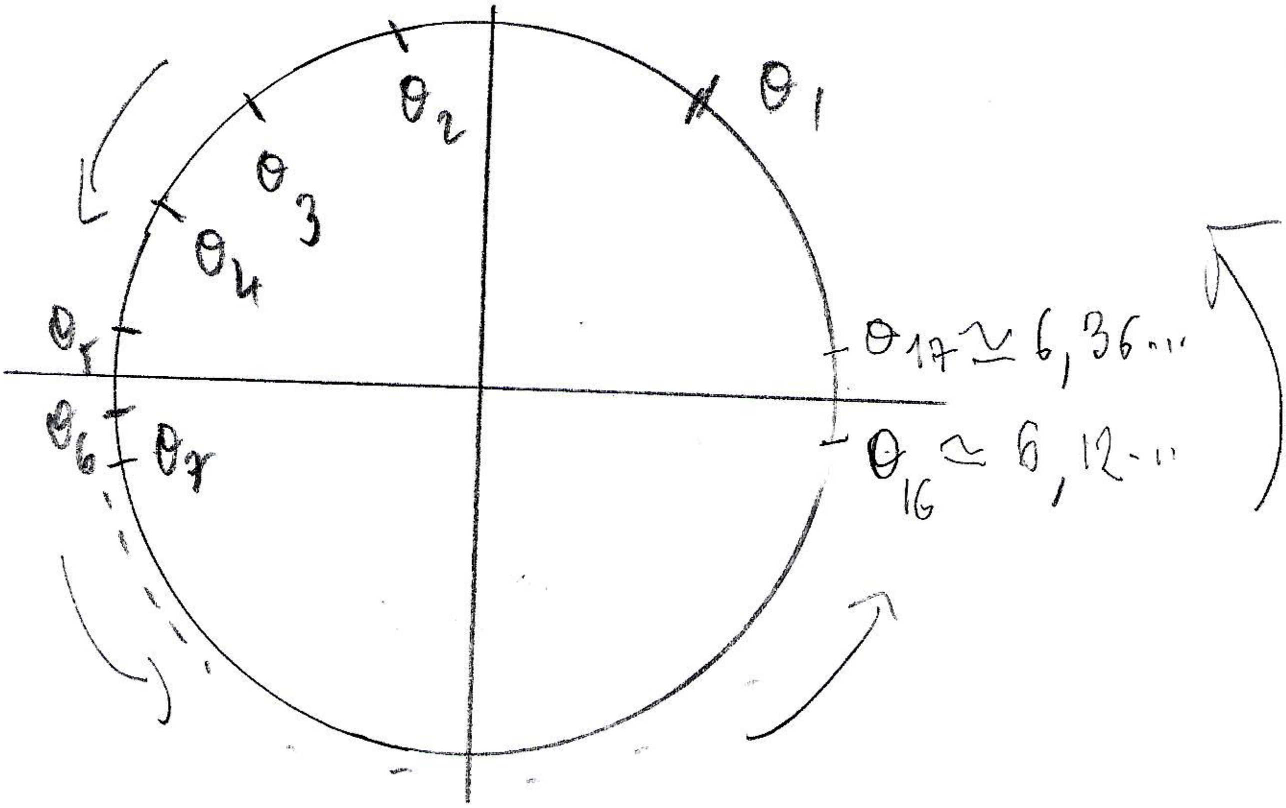
b) $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$ avec $\underline{\theta_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan} \frac{1}{k}}$ car $\operatorname{Re}\left(1+\frac{i}{k}\right) > 0$.

On a $\rho_n \to e^{r}$

Etude de θ_n : on a $(\theta_n) \nearrow$ et $\lim \theta_n = +\infty$

car $\left(\sum \operatorname{Arctan} \frac{1}{h}\right)$ Dvg avec $\operatorname{Arctan} \frac{1}{h} \sim \frac{1}{h} \geq 0$ et TC

et $\theta_{n+1} - \theta_n \longrightarrow 0$



Par exemple 1 est val. d'adh de $(e^{i\theta_n})$ car

$\theta_{17} \simeq 2\pi$ $|\theta_{17} - 2\pi| \sim 0,083...$

$\theta_{53} \simeq 4\pi$, $|\theta_{53} - 4\pi| \sim 0,004...$

Montrons que $\forall u = e^{i\varphi} \in \mathbb{U}$, u est val. d'adh. de $(e^{i\theta_n})$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N}$

* $\exists k \geq N \mid \operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{k}} \leq \varepsilon$ $\left(\lim \operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{k}} = 0\right)$

* Soit $n \in \mathbb{N} \mid 2n\pi + \alpha \geq \theta_k$

Comme $\lim \theta_k = +\infty$ $\exists k_1 \geq k+1 \mid \theta_{k_1} \geq 2n\pi + \alpha$

Soit k_0 le 1er entier tel que :

$k_0 \geq k+1$ et $\theta_{k_0} \geq 2n\pi + \alpha$

On a donc $\theta_{k_0 - 1} < 2n\pi + \alpha \leq \theta_{k_0}$

d'où $\left|\theta_{k_0} - (2n\pi + \alpha)\right| \leq \theta_{k_0} - \theta_{k_0 - 1} = \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{k_0}}$

$\leq \varepsilon$

enfin $\left|e^{i\theta_{k_0}} - e^{i\alpha}\right| = \left|e^{i\theta_{k_0}} - e^{i(\alpha + 2n\pi)}\right|$

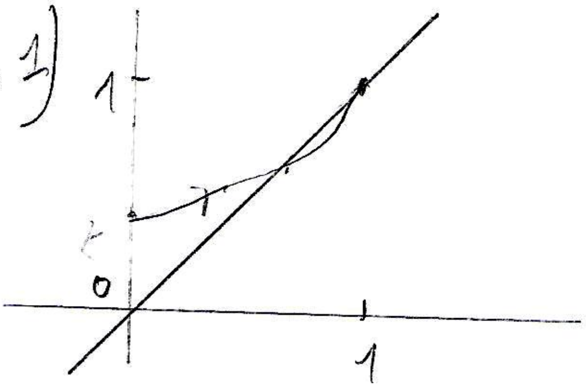
$\leq \left|\theta_{k_0} - (\alpha + 2n\pi)\right|$ inégalité des A.F.

$\leq \varepsilon$

d'où $\boxed{\operatorname{val}((u_n)) = S(0, e^r) \text{ cercle de centre } 0 \text{ et de rayon } e^r}$

Centrale 2015 (PSI)

I, A, 1)



f est croissante et convexe sur $[0,1]$.

Comme $f' \geq 0$, f est croissante sur $[0,1]$ d'où (u_n) est monotone, $u_1 = f(0) \in [0,1]$, donc $u_1 \geq u_0$ d'où (u_n) est croissante. Comme $[0,1]$ stable$/f$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [0,1]$: (u_n) est donc bornée

$\boxed{\text{Par TLM : } (u_n) \text{ converge}}$

I A 2) Soit $A = \{a \in [0,1] \setminus f(a) = a\} \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ car $1 \in A$, donc A possède une borne inférieure α. $\alpha \in \bar{A}$ et il existe (a_n) suite de A telle que $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$

Comme f est $C^0/[0,1]$, par critère séquentiel, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\alpha)$

cqs $f(\alpha)=\alpha$ et $\alpha\in A$ d'où $\underline{\alpha=\min A}$

cl' : $\boxed{\alpha \text{ est la plus petite solution de } f(x)=x}$

$(\alpha = x_f)$

I.A.3)

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & & x_f \\ \hline f & & & x_f \\ & a & \nearrow & \end{array}$$

$I=[0,x_f]$ est stable$/f$

car $f(I)=[a,x_f]\subset I$

1er cas : $f(0)=0$, alors $x_f=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n=0$

d'où $\underline{(u_n) \text{ cvg vers } 0=x_f}$

2e cas : $f(0)=a>0$, comme $(u_n)\nearrow$, $\forall n\geq 1$;

$u_n\geq u_1=a$ d'où $\ell\geq a$. Or $f(\ell)=\ell$ car

f est continue, comme x_f est la plus petite sol. de $f(x)=x$ et $\ell\in I=[0,x_f]$, on conclut :

cl' $\boxed{\ell = x_f}$

I.B) Si $m=f'(1)>1$, posons $g(x)=f(x)-x$, $g'(x)=f'(x)-1$ et

$g''(x)=f''(x)\geq 0$ d'où,

x	0		c		d		1
g''		$+$		$+$		$+$	
g'	<0	↗	0	0	0	↗	$m-1>0$
g	$\geqslant 0$	↘		→	<0	↗	0

$\begin{cases} g'(0) = f'(0)-1 < 0 \\ g'(1) = m-1 > 0 \end{cases}$

donc $0 < c \leq d < 1$

Attention : g'' n'est que positive donc g' n'est que croissante et non strictement ↗ d'où l'intervalle $[c,d]$

Par stricte décroissance de g sur $[d,1]$, on a $g(d)<0$

comme $g(0) = f(0) \geqslant 0$, par valeur intermédiaire :

$\exists \gamma \in [0,d]$ tq $g(\gamma) = 0$ d'où $0 \leqslant x_f \leqslant \gamma \leq d < 1$

d'où : $\boxed{x_f \in [0,1[}$

I.c) Utilisons la convexité : f est au dessus de ses tangentes car f est convexe $(f'' \geqslant 0)$.

En $x_0 = 1$, la tangente à f est $T / y - f(1) = f'(1)(x-1)$

soit $T / y = 1 + m(x-1)$ et donc :

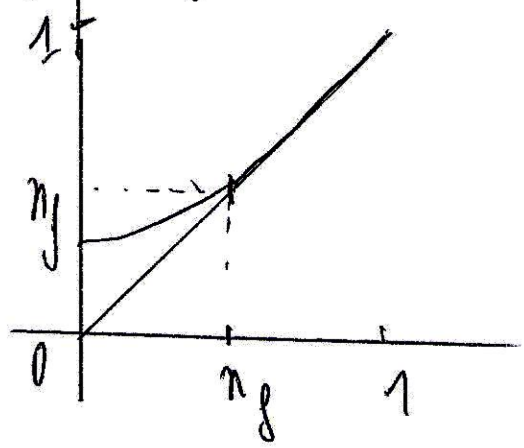
$\forall x \in [0,1] \quad f(x) \geqslant 1 + m(x-1)$

donc $f(x) - x \geqslant 1 + m(x-1) - x = (m-1)x + 1 - m$
$= (m-1)(x-1) \geqslant 0$

Si $x_f < 1$, alors $f(x_f) - x_f = 0 \geqslant (m-1)\underbrace{(x_f - 1)}_{\neq 0} \geqslant 0$ (4)

alors $m = 1$ et $\forall x \in [0,1]$ $f(x) \geqslant x$.

D'autre part f est sous la corde $[(x_f, f(x_f)), (1, f(1))]$



Donc $\forall x \in [x_f, 1]$ $f(x) = x$

d'où $\forall x \in [x_f, 1]$ $f''(x) = 0$: $f''(1) = 0$: Absurde

cl$_1$: $\boxed{x_f = 1}$

Avec le tableau du I, A, 3), $J = [0, x_f[= [0,1[$ est stable par f et $u_0 \in J$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \in J$

cl$_2$: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \neq 1}$

I, D, 1) Utilisons T.Y. $f(x) = \overset{=1}{f(1)} + \overset{=1}{f'(1)}(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

↳ à l'ordre 2 en 1 car f $C^2/[0,1]$

(5)

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} = \frac{1}{1-g(u_n)} - \frac{1}{1-u_n} \qquad h = u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,\ \text{dl-c} :$$

$$= \frac{g(u_n)-u_n}{(1-g(u_n))(1-u_n)} = \frac{\cancel{1+}\ (\cancel{u_n}-1) + \frac{g''(1)}{2}(u_n-1)^2 + o((u_n-1)^2) \quad 2-\cancel{u_n}}{\left[-(u_n-1)-\frac{g''(1)}{2}(u_n-1)^2 + o((u_n-1)^2)\right](1-u_n)}$$

$$= \frac{g''(1)/2 + o(1)}{1+o(1)} \quad \text{simplification par } (1-u_n)^2$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{g''(1)}{2} \qquad \text{d'} : \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n}\right) = \frac{g''(1)}{2}}$$

I D 2) Posons $\alpha_n = \frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} \sim \frac{g''(1)}{2} = \beta_n > 0$

Comme $(\Sigma \beta_n)$ dvg, par TC $(\Sigma \alpha_n)$ dvg aussi et avec <u>les sommations de relation de comparaison</u>, on a :

$S_n(\alpha) \sim S_n(\beta)$ soit par telescopage :

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_0} \sim \frac{g''(1)}{2}(n+1)$$

Comme $\varepsilon_n \to 0^+$, $\frac{1}{\varepsilon_n} \to +\infty$ et $\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_0} \sim \frac{1}{\varepsilon_{n+1}}$

d'où $\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} \sim \frac{g''(1)(n+1)}{2}$ d' : $\boxed{1-u_n = \varepsilon_n \sim \frac{2}{g''(1)\,n}}$

I.E.1) $\varepsilon_{n+1} = 1 - g(u_n) = -m(u_n - 1) + o(u_n - 1)$

$= m\,\varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$

d'où $\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} m$

Or $m \geq 0$ car $g' \geq 0$ et $m < 1$ (c'est l'hypothèse)

On conclut par d'Alembert : $\boxed{(\sum \varepsilon_n) \text{ cvg Absolument}}$

on suppose $m > 0$

$$\ln\left(\frac{m^{-(n+1)}\ \varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\ \varepsilon_n}\right) = -(n+1)\ln m + n\ln m + \ln \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}$$

DL (TY)

$$= -\ln m + \ln\left(\frac{m\,\varepsilon_n - \frac{g''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + o(\varepsilon_n^2)}{\varepsilon_n}\right)$$

$$= -\ln m + \ln\left(m - \frac{g''(1)}{2}\varepsilon_n + o(\varepsilon_n)\right)$$

$$= -\cancel{\ln m} + \cancel{\ln m} + \ln(1 + O(\varepsilon_n))$$

$= O(\varepsilon_n)$ d'où par TC : $\boxed{\left(\sum \ln\left(\dfrac{m^{-(n+1)}\ \varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\ \varepsilon_n}\right)\right) \text{ cvg}}$

I.E.2) $\ln\left(\dfrac{m^{-(n+1)}\ \varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\ \varepsilon_n}\right) = \ln \alpha_{n+1} - \ln \alpha_n$ avec $\alpha_n = m^{-n}\varepsilon_n$

Par correspondance bijective suite-série, la suite $(\ln \alpha_n)$ cvg.

Posons $l = \lim \ln \alpha_n$, $\alpha_n \to e^{l} = c > 0$, donc $\alpha_n \sim c$

cqs $\varepsilon_n \sim c\,m^n$, comme $\varepsilon_n = 1 - u_n$, d'où $\boxed{1 - u_n \sim c \cdot m^n}$