Mines MP$_1$ 2019

Dm 4 : corrigé

1. * Posons $u_n = \frac{(pn)^n}{(pn)!} z^n$ avec $z \neq 0$.

$\forall n \geq 1$ $\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\cancel{p^n}(n+1)^n}{(p(n+1))!} \times \frac{(pn)!}{\cancel{p^n} n^n} z$

$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \times \frac{1}{(pn+p)\cdots(pn+1)} \times z$

$\xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \times 0 \times z = 0$

cqs $\forall z \neq 0$, (Σu_n) crg d'où : $\boxed{R_1 = +\infty}$ (pour les 5/2) = 5/2

* Le terme général de la 2ème série est celui de la 1ère en remplaçant z par z^p

d'où $\boxed{R_2 = +\infty}$ 5/2

2. φ_x est dérivable sur $]1, +\infty[$ par TG et

$\forall t > 1$, $\varphi'_x(t) = (1-x)t^{-x}(t-1)^x + x t^{1-x}(t-1)^{x-1}$

$= t^{-x}(t-1)^{x-1}\left[(1-x)(t-1) + xt\right]$

$= t^{-x}(t-1)^{x-1}(t + x - 1)$

Comme $t>1$ et $n>0$,

t	1		t_n		$+\infty$
φ_n	$-n$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

En effet : * $\lim\limits_{t \to 1^{>}} (t-1)^n = \lim\limits_{t \to 1^{>}} e^{n \ln(t-1)} = 0$ car $n>0$

donc PPC en 1 et $\varphi_n(1) = -n$

* $\varphi_n(t) = t\left(\frac{t-1}{t}\right)^n - n \longrightarrow (+\infty) \times 1^n - n = +\infty$

Par le th. de bijection, d'où $\boxed{\varphi_n \text{ s'annule exactement } 1 \text{ fois sur }]1,+\infty[}$

* $$u_{n+1}(x) - u_n(x) = \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} x^n \left[x - \frac{n^n}{n!} \times \frac{(n+1)!}{(n+1)^n}\right]$$

$$= \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} x^n \left[x - n^n (n+1)^{1-n}\right]$$

$$= \frac{-(n+1)^n}{(n+1)!} x^n \varphi_x(n+1)$$

cqs : si $\underline{n < \lfloor t_n \rfloor}$, $n+1 \leqslant \lfloor t_n \rfloor \leqslant t_n$, donc

$\varphi_n(n+1) \leqslant 0$ et $\underline{u_{n+1}(n) \geqslant u_n(n)}$

Si $n \geqslant \lfloor t_n \rfloor$, $n+1 > t_n$, donc $\varphi_n(n+1) \geqslant 0$

donc $u_{n+1}(n) \leqslant u_n(n)$

cl $\boxed{(u_n) \nearrow \text{ pour } n \leqslant \lfloor t_n \rfloor \text{ et } \searrow \text{ ensuite}}$

3) $*\ \varphi_x(x+\alpha) = (x+\alpha)^{1-r}(n+\alpha-1)^r - n$

$$= x^{1-r}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{1-r} x^r\left(1+\frac{\alpha-1}{n}\right)^r - n$$

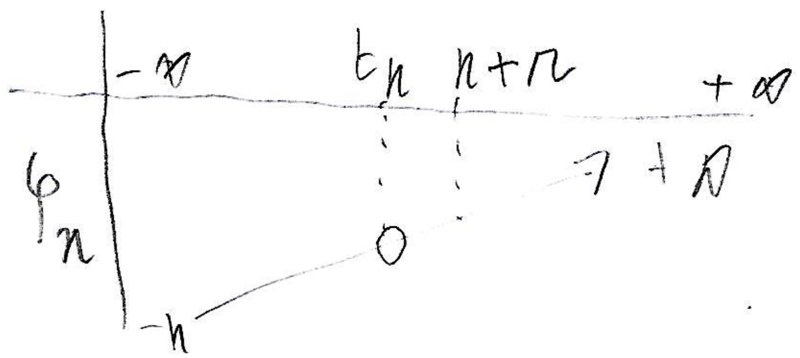
$$= x\left[\left(1+\frac{\alpha(1-r)}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1+\frac{(\alpha-1)r}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1\right]$$

$$= n\left[\cancel{1}+\frac{(\alpha-1)r+\alpha(1-r)}{x}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)-\cancel{1}\right]$$

$$= \alpha - r + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

cl° $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(x+\alpha) = \alpha - r}$

$*$ Pour $\alpha = r$, $\varphi_n(n+\alpha) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = \varphi_n(t_n)$



Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0 \mid \forall A \geq 0$,

$\exists n \geq A \mid |t_n - n - r| > \varepsilon$

donc $t_n > n + r + \varepsilon$ ou $t_n < n + r - \varepsilon$

et donc par $\overset{st}{\text{croissance}}$ de φ_n :

$$\underbrace{\varphi_n(t_n)}_{0} > \varphi_n(n+r+\varepsilon) \text{ ou } \underbrace{\varphi_n(t_n)}_{0} < \varphi_n(n+r-\varepsilon)$$

$$\varphi_n(n+r+\varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varepsilon \qquad \varphi_n(n+r-\varepsilon) \to -\varepsilon$$

Avec $A = n$ $\exists n_n \geq n \mid |t_{n_n} - n_n - r| > \varepsilon$

Soit $I = \{ n \in \mathbb{N} \mid t_{n_n} > n_n + r + \varepsilon \}$

$J = \{ \text{———} \quad t_{n_n} < n_n + r - \varepsilon \}$

Comme $I \cup J = \mathbb{N}$, l'un des 2 est de cardinal infini. Par exemple si I infini, $\exists \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ st $\nearrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$t_{n_{\psi(n)}} > n_{\psi(n)} + r + \varepsilon$$

donc $0 > \varphi_{n_{\psi(n)}}(n_{\psi(n)} + r + \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varepsilon$

qd $n \to \infty$, il vient $0 \geq \varepsilon$: absurde.

d' : $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty}(t_n - n - r) = 0}$

4) Pour x assez gd, en posant $n = \lfloor x \rfloor$, $n + k > 0$ et

$$\frac{u_{n+k}(x)}{u_n(x)} = \frac{(n+k)^r}{(n+k)!} \frac{n!}{n^r} x^k$$

$$= \left(1 + \frac{k}{n}\right)^r \frac{1}{(n+k)\cdots(n+1)} x^k$$

r et k indép. de x

$$= \left(1 + \frac{k}{n}\right)^r \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)} \left(\frac{x}{n}\right)^k$$

Si $x \to +\infty$, $n = \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{\text{fct de } x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, d'où

par TG (sur les limites) et car $\frac{x}{n} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$

(en effet $1 \leq \frac{x}{n} < 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{x-1} \xrightarrow[+\infty]{} 1$),

$$\lim_{x \to \infty} \frac{u_{n+k}(x)}{u_n(x)} = 1^r \times \frac{1}{1} \times 1^k = 1$$

d $\boxed{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor}(x)}$

* $\forall x \neq 0$ $\quad f(x) = \dfrac{\sum_{i=\lfloor x\rfloor-n}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)} \xrightarrow{TG} \sum_{i=\lfloor x\rfloor-n}^{\lfloor x\rfloor} 1 = n+1$

cqs $\exists A>0 \mid \forall x \geq A \quad f(x) \geq n+1-1 = n$

Comme $u_{\lfloor x\rfloor}(x)>0$,

d'où $\boxed{\forall x \geq A \quad \sum_{i=\lfloor x\rfloor-n}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x) \geq n\, u_{\lfloor x\rfloor}}$

5) L'idée pour faire apparaître le e^x : $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$.

$\forall k \in \mathbb{Z}$, pour $x \geq A$ (du 4°)), $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_{\lfloor x\rfloor+k}(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=\lfloor x\rfloor+k-n}^{\lfloor x\rfloor+k} \frac{i^n}{i!} x^i$$

$$\leq \frac{1}{n} (x+k)^n e^x$$ ca tout est positif et $i \leq \lfloor x\rfloor+k \leq x+k$

Soit $\varepsilon>0$, $\exists n \in \mathbb{N}^* \mid \frac{1}{n} \leq \varepsilon$

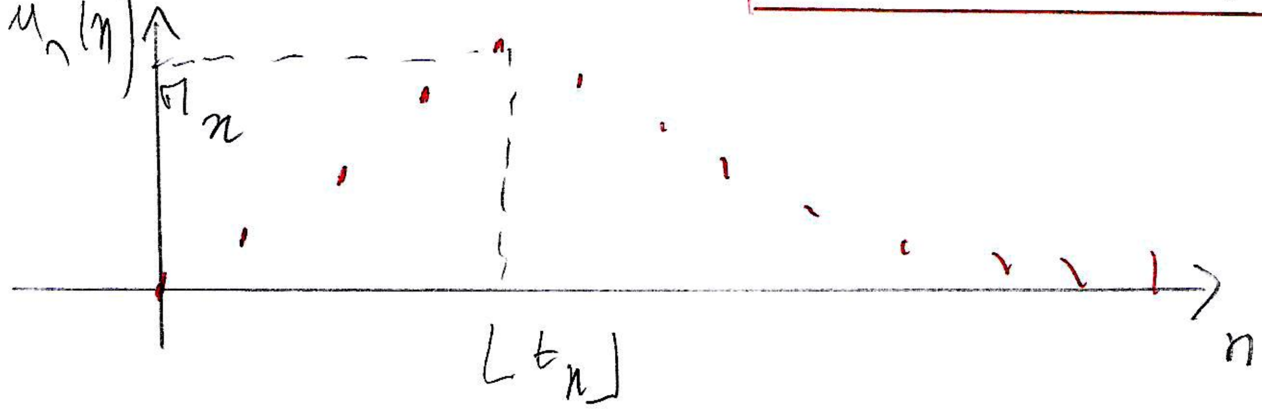
donc $|u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)| \leq \varepsilon x^n e^x \underbrace{\left(1+\frac{k}{x}\right)^n}_{\text{borné qd } x\to\infty}$

donc $\exists M \in \mathbb{R}^+ \mid \forall x > 1 \quad \left(1+\frac{k}{x}\right)^x \leq M$

et donc $\forall x \geq \max(1, A)$:

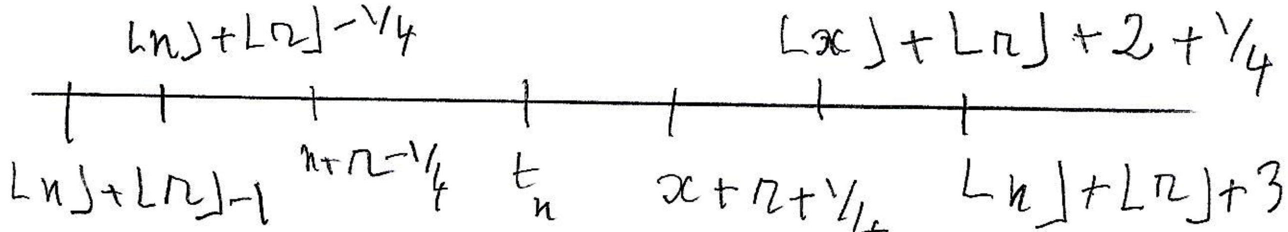
$$|u_{\lfloor x \rfloor + k}(x)| \leq M \varepsilon x^2 e^x$$

d $\boxed{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) = \underset{+\infty}{o}\left(x^x e^x\right)}$



D'après le 13), $\exists A > 0 \mid \forall x > A$, $-1/4 < t_x - x - r < \frac{1}{4}$

donc



cqs $\lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor - 1 \leq t_x < \lfloor x \rfloor + \lfloor r \rfloor + 3$.

d'où $\lfloor t_x \rfloor = [\![\lfloor x \rfloor + i]\!]$ avec $i \in [\![-1, 3[\![$

d'où $M_x = u_{\lfloor x \rfloor + i}(x)$ ⚠ pour la suite le i dépend de x

cqs $\left| \begin{array}{l} r_n \leq \sum_{j=1}^{2} u_{(n)+j} = \sum_{j=1}^{2s} o(n^2 e^n) \\ \forall n \geq A \end{array} \right.$ ⑧

$\uparrow$ il y en a 4

d'où $\boxed{r_n \underset{+\infty}{=} o(n^2 e^n)}$

6) * C'est la transformé d'Abel (HPTS!) :

$$\sum_{n=1}^{N} D_n \left(u_{n-1}(x) - u_n(x) \right)$$

$$\begin{aligned} = \; & D_1 (u_0(x) - u_1(x)) \\ & + D_2 (u_1(x) - u_2(x)) \\ & + D_3 (u_2(x) - u_3(x)) \\ & \vdots \\ & + D_N (u_{N-1}(x) - u_N(x)) \end{aligned} \quad \begin{aligned} = 0 & + u_1(x)(D_2 - D_1) \\ & + u_2(x)(D_3 - D_2) \\ & \vdots \\ & + u_{N-1}(x)(D_N - D_{N-1}) \\ & - D_N u_N(x) \end{aligned}$$

$$= u_1(x) z + u_2(x) z^2 + \dots + u_{N-1}(x) z^{N-1} - D_N u_N(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{k^2}{k!} (zx)^k - D_N u_N(x)$$

Comme $|D_N u_N(x)| \leq N \dfrac{N^2}{N!} x^N \xrightarrow[N \to +\infty]{\text{CC}} 0$, et que $\sum_{k=1}^{N-1} \frac{k^n}{k!}(zx)^k \xrightarrow[N\to\infty]{} S_{n,1}(zx)$, ← Question préliminaire

d'où : $\boxed{\forall x>0,\ \forall z\in\mathbb{C} \mid |z|=1 \text{ et } z\neq 1 : \quad S_{n,1}(zx) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\,(u_{n-1}(x)-u_n(x))}$

* $\forall n\geq 1 \quad |D_n| = \left|\frac{1-z^n}{1-z}\right| \leq \frac{2}{|1-z|}$

$\forall N > \lfloor t_n \rfloor \quad \left|\sum_{n=1}^{N} D_n\,(u_{n-1}(x)-u_n(x))\right|$

$$\leq \frac{2}{|1-z|} \sum_{n=1}^{N} |u_{n-1}(x)-u_n(x)|$$

$$\leq \frac{2}{|1-z|}\left(\sum_{n=1}^{\lfloor t_n\rfloor} (u_n(x)-u_{n-1}(x)) + \sum_{n=\lfloor t_n\rfloor+1}^{N} (u_{n-1}(x)-u_n(x))\right)$$

$$\leq \frac{2}{|1-z|}\left(\Pi_x - \underbrace{u_0(x)}_{=0} + \Pi_x - \underbrace{u_N(x)}_{>0}\right)$$

$$\leq \frac{4}{|1-z|}\Pi_x$$

qd $N\to\infty$, il vient $\boxed{|S_{n,1}(zx)| \leq \frac{4\Pi_x}{|1-z|}}$

On conclut avec la 5) : $\boxed{S_{r,1}(z x) \underset{+\infty}{=} o(x^r e^x)}$

7.) $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\zeta^k x) = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^r}{n!} (\zeta^k x)^n$

$\displaystyle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{n^r}{n!} \zeta^{kn} x^n$ (linéarité de $\sum$)

$\displaystyle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^r}{n!} x^n \sum_{k=0}^{p-1} (\zeta^n)^k$

Or $\zeta^n = 1 \iff p \mid n$ et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} (\zeta^n)^k = \begin{cases} \frac{\overbrace{1-(\zeta^n)^p}^{=0}}{1-\zeta^n} & \text{si } p \nmid n \\ p & \text{si } p \mid n \end{cases}$

d'où $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\zeta^k x) = p\, S_{r,p}(x)}$

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\zeta^k x) = S_{r,1}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}(\underbrace{\zeta^k}_{\zeta^k \neq 1} x)$

$\displaystyle \underset{x \to +\infty}{=} S_{r,1}(x) + o(x^r e^x)$ car p ind. de x et 6)

dc $p S_{r,p}(x) - S_{r,1}(x) = o(x^r e^x)$

d'où si $(H_{r,1})$ vraie, $p S_{r,p}(x) - S_{r,1}(x) = o(S_{r,1}(x))$

d'où $\quad p S_{r,p}(x) \underset{+\infty}{\sim} S_{r,1}(x) \sim x^r e^x$

cqs $\quad S_{r,p}(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^r e^x}{p}$: c'est $(H_{r,p})$

<u>Récip.</u> si $(H_{r,p})$ vraie, $p S_{r,p}(x) - S_{r,1}(x) = o\left(S_{r,p}(x)\right)$

dc $\quad S_{r,1}(x) \sim p S_{r,p}(x) \sim x^r e^x$

d'où $\boxed{(H_{r,1}) \iff (H_{r,p})}$

8) Grâce à Bienaymé-Tchebichev :

$0 \leqslant P(|X_n - \underbrace{n}_{=E(X_n)}| > \alpha n^{2/3})$ ($Y > \beta \Rightarrow Y \geqslant \beta$ donc $P(Y>\beta) \leqslant P(Y \geqslant \beta)$)

$\leqslant P(|X_n - n| \geqslant \alpha n^{2/3}) \leqslant \dfrac{V(X_n)}{(\alpha n^{2/3})^2} = \dfrac{n^{1-4/3}}{\alpha^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Par th. d'encadrement : d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - n| > \alpha n^{2/3}) = 0}$

9) * $|A_n| \leqslant \dfrac{X_n^{\,n}}{\alpha^n}$ par Th. de transfert, $X_n^{\,n} = f(X_n)$ admet une espérance finie car $\left(\sum n^n P(X_n = n)\right) = \left(\sum n^n e^{-n} \dfrac{n^n}{n!}\right)$ crg (Q. préliminaire), par linéarité et domination, A_n admet une espérance finie, idem pour B_n

* $\forall \omega \in \Omega \setminus Z_n(\omega) < 1 - n^{-1/3}$, $0 \leqslant A_n(\omega) \leqslant (1 - n^{-1/3})^n$

Si $Z_n(\omega) \geqslant 1 - n^{-1/3}$, $A_n(\omega) = 0$,

donc $0 \leqslant A_n \leqslant \mathbb{1}_{(Z_n < 1 - n^{-1/3})} (1 - n^{-1/3})^n$

d'où $0 \leqslant E(A_n) \leqslant P(Z_n < 1 - n^{-1/3})(1 - n^{-1/3})^n$

On $\left(Z_n < 1-n^{-1/3}\right) = \left(\frac{X_n}{n} < 1-n^{-1/3}\right)$ (13)

$$= \left(X_n < n - n^{2/3}\right) \quad \text{car} \quad n>0$$

$$= \left(x - X_n > n^{2/3}\right)$$

$$\subset \left(|x - X_n| > n^{2/3}\right) \quad \text{car} \quad n^{2/3} > 0$$

Cqs $\quad 0 \leq E(A_n) \leq \underbrace{P\left(|X_n - n| > n^{2/3}\right)}_{\xrightarrow[+\infty]{} 0 \ (8^\circ)} \underbrace{\left(1-n^{-1/3}\right)}_{\xrightarrow[+\infty]{} 0 \ (TG)}{}^{n}$

Par TE : $\quad$ d'o $\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(A_n) = 0}$

* Posons $F = \left(|Z_n - 1| \leq n^{-1/3}\right)$

($n>1$) Si $\omega \in F$, $|Z_n(\omega) - 1| \leq n^{-1/3}$, alors

$0 < \left(1-n^{-1/3}\right)^n \leq Z_n^n(\omega) \leq \left(1+n^{-1/3}\right)^n$, donc :

$$0 < \left(1-n^{-1/3}\right)^n \mathbb{1}_F(\omega) \underset{\overset{\uparrow}{= \text{ si } \omega \notin F}}{\leq} B_n(\omega) \leq \left(1+n^{-1/3}\right)^n \mathbb{1}_F(\omega)$$

Cqs $\quad \left(1-n^{-1/3}\right)^n \mathbb{1}_F \leq B_n \leq \left(1+n^{-1/3}\right)^n \mathbb{1}_F$

d'où par croissance de l'espérance ;
linéarité

$$\underset{\substack{\downarrow +\infty \ (TF) \\ 1}}{(1-x^{-1/3})^n}\ \underset{\substack{\downarrow \text{ avec } 9') \\ 1-0}}{\underbrace{\mathbb{P}(F)}} \leq E(B_n) \leq \underset{\substack{\downarrow +\infty \\ 1}}{(1+n^{-1/3})}\ \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\mathbb{P}(F)}$$

Par Th d'encadrement : d' $\boxed{\lim_{+\infty} E(B_n) = 1}$

10') * Comme au 9'), $|Y_{N,n}| \leq f(X_n)$ et

$\left(\sum f(n) e^{-n} \frac{n^n}{n!}\right)$ crg car :

car N indép. de n.

$$f(n) e^{-n} \frac{n^n}{n!} \sim \underset{\geq 0}{\frac{n^N x^n}{n!} e^{-n}}$$; $\sum$ crg avec le préliminaire

Par TC et $\hat{c}$ au 9') d' $\boxed{Y_{N,n} \text{ admet une esp. finie}}$

Rappel : $\in \mathbb{N}$

$$* \quad Y_{N,x}(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } X_x(w) \leq n + n^{2/3} \\ 0 & \text{si } X_n(w) > \text{——} \text{ et } X_n(w) \leq N-1 \\ \prod_{k=0}^{N-1} (X_n(w) - k) & \text{si } \left| \begin{array}{l} X_x(w) > n + x^{2/3} \\ X_n(w) \geq N \end{array} \right. \end{cases}$$

cqs avec la formule de transfert :

$$E(Y_{N,x}) = \sum_{\substack{n=N \\ n > x + x^{2/3}}}^{+\infty} \prod_{k=0}^{N-1} (n-k)\, P(X_x = n)$$

$$= \sum_{n=N,\, n > x + x^{2/3}}^{\infty} n(n+1)\cdots(n-N+1) \times \frac{e^{-x} x^n}{n!}$$

$$= \sum_{\substack{n=N \\ n > x + x^{2/3}}}^{\infty} \frac{\cancel{n!}}{(n-N)!}\, e^{-x} \frac{x^n}{\cancel{n!}}$$

$$= x^N \sum_{\substack{n=N \\ n > x + x^{2/3}}}^{\infty} \frac{e^{-x} x^{n-N}}{(n-N)!} \qquad n - N = k \quad \text{cdv}$$

$$= x^N \sum_{\substack{k=0 \\ k > x + x^{2/3} - N}}^{\infty} e^{-x} \frac{x^k}{k!}$$

$$= x^N P\Big(\bigsqcup_{k > x + x^{2/3} - N} X_x = k \Big)$$

comme $\bigsqcup_{k > x + x^{2/3} - N} (X_x = k) = (X_x > x + x^{2/3} - N)$,

d'où $$\boxed{E(Y_{N,x}) = x^N P(X_x > x + x^{2/3} - N)}$$

* $(X_n > n + n^{2/3} - N) = (X_n - n > n^{2/3} - N)$ (16)

donc N étant fixé, $\forall n > N^{3/2}$, $n^{2/3} - N > 0$,

$$(X_n > n + n^{2/3} - N) = (|X_n - n| > \underbrace{n^{2/3} - N}_{pb.})$$

Avec le 8), on a le choix du α ;

on veut $n^{2/3} - N \geq \alpha n^{2/3}$ pour n assez gd

$\Leftrightarrow (1-\alpha) n^{2/3} \geq N$

cqs $\alpha = 1/2 > 0$ convient $\exists A \mid \forall n \geq A \cdot n^{2/3} - N \geq \frac{1}{2} n^{2/3}$

d'où $\forall n \geq \max(N^{3/2}, A) : (X_n > n + n^{2/3} - N) \subset (|X_n - n| \geq \frac{1}{2} n^{2/3})$

donc $0 \leq P(X_n > n + n^{2/3} - N) \leq P(\text{———}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ (8')

d° $\boxed{E(Y_{N,n}) = o(n^N)}$

11) Posons $Q_n(X) = \prod_{k=0}^{n-1} (X - k)$, $\left| \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}^* \\ Q_n \in \mathbb{R}[X] \\ d^\circ Q_n = n \end{array} \right.$

cqs à redémontrer ici $(Q_1, \dots, Q_N)$ libre ds $\mathbb{R}_N[X]$,

Considérons $F = \{ Q \in \mathbb{R}_N[X] \mid Q(0) = 0 \}$
$= \operatorname{Ker} \ell$ où $\ell : \mathbb{R}_N[X] \longrightarrow \mathbb{R}$
$Q \longmapsto Q(0)$

cqs F hyperplan de $\mathbb{R}_N[X]$; on en déduit que $(Q_1, \dots, Q_N)$ base de F. Comme $X^N \in F$,

$$\exists (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N \mid X^N = \sum_{k=1}^{N} a_k Q_k$$

---

cqs $$X_n^N \mathbb{1}_{(X_n > n + n^{2/3})} = \sum_{k=1}^{N} a_k \underbrace{Q_k(X_n) \mathbb{1}_{(X_n > n+n^{2/3})}}_{Y_{k,n}}$$

d'où $$\boxed{\mathbb{1}_{(X_n > n+n^{2/3})} X_n^N = \sum_{k=1}^{N} a_k Y_{k,n}}$$

* $(Z_n > 1 + n^{-1/3}) = (X_n > n + n^{2/3})$ (tjs car $n > 0$)

$$E\left(\mathbb{1}_{(Z_n > 1+n^{-1/3})} Z_n^N\right) = E\left(\sum_{k=1}^{N} a_k \frac{Y_{k,n}}{n^N}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} a_k \frac{E(Y_{k,n})}{n^N} \xrightarrow[n \to \infty]{\text{TG} + 10)} 0$$

d'où $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} E\left(\mathbb{1}_{(Z_n > 1+n^{-1/3})} Z_n^N\right) = 0}$$

12) * Soit $N \in \mathbb{N}^* \mid n \leq N$.

Si $Z_n(w) > 1 + n^{-1/3} > 1$, $Z_n^n(w) \leq Z_n^N(w)$

donc $0 \leq \mathbb{1}_{(Z_n > 1 + n^{-1/3})}(w)\, Z_n^n(w) \leq \mathbb{1}_{(Z_n > 1 + n^{-1/3})}(w)\, Z_n^N(w)$

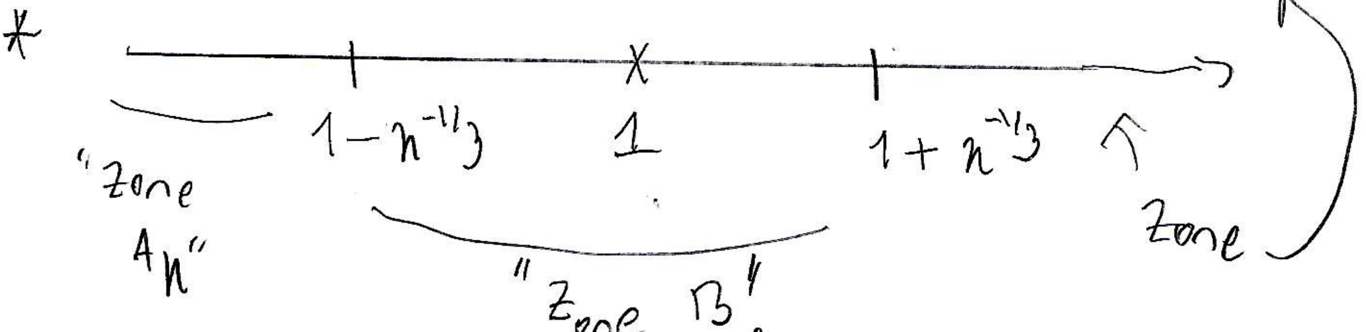
$= 0$ si $w \notin (Z_n > 1 + n^{-1/3})$

d'où $0 \leq \mathbb{1}_{(Z_n > 1 + n^{-1/3})} Z_n^n \leq \mathbb{1}_{(Z_n > 1 + n^{-1/3})} Z_n^N$

Par croissance de l'espérance et th. d'encadrement :

d'où $\boxed{\lim_{n \to \infty} E\left(\mathbb{1}_{(Z_n > 1 + n^{-1/3})} Z_n^n\right) = 0}$

*



$\Omega = (Z_n < 1 - n^{-1/3}) \sqcup (|Z_n - 1| \leq n^{-1/3}) \sqcup (Z_n > 1 + n^{-1/3})$

donc $Z_n^n = A_n + B_n + \mathbb{1}_{(Z_n > 1 + n^{-1/3})} Z_n^n$

avec 9') 9') 12')

et par linéarité, par TG $\boxed{\lim_{x \to +\infty} E(Z_x^r) = 1}$

Par th. de transfert, $E(Z_x^r) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^r \frac{x^n}{n!} \frac{e^{-x}}{x^r} \xrightarrow[+\infty]{} 1$

d'où $\boxed{S_{r,1}(x) \sim x^r e^x \text{ : c'est } H_{r,1}}$

14)

Question préliminaire : $\forall n \geq 2$

$$v_n - v_{n-1} = \ln n + x(\ln n - \ln(n-1)) - \ln(x+n)$$

$$= \cancel{\ln n} - x\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \cancel{\ln n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

$$= -x\left(\cancel{-}\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \cancel{\frac{x}{n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } \frac{1}{n^2} \geq 0, \left(\sum \frac{1}{n^2}\right) \text{ cvg}.$$

cqs : Par T.C. $\underline{\left(\sum v_n - v_{n-1}\right) \text{ cvg}}$

Par C.B.S.S. $\underline{\text{la suite } (v_n) \text{ cvg vers } l \in \mathbb{R}}$

Or $v_n = \ln n! + \ln n^x - \ln \prod_{k=0}^{n} (x+k) \xrightarrow[n \to \infty]{} l$

Par critère séquentiel : >0 car $x>0$

$$e^{v_n} = \frac{n!\, n^x}{\prod_{k=0}^{n} (x+k)} \longrightarrow e^{l} = \lambda \neq 0$$

donc $\boxed{\prod_{k=0}^{n} (x+k) \sim \frac{n!\, n^x}{\Gamma(x)}}$ et $\Gamma(x) = e^{-l}$

Remarque**: On peut montrer que $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$! 21) ②

15) c'est le th. de Cauchy-Lipschitz linéaire, car $t \mapsto t$ $C^0/\mathbb{R}$.

16) Soit $x = \sum_{n=0}^\infty a_n t^n$ que l'on injecte dans (A_i):

$$\sum_{n=0}^\infty (n+1)(n+2) a_{n+2} t^n - \sum_{n=0}^\infty a_n t^{n+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^\infty (n+1)(n+2) a_{n+2} t^n - \sum_{n=1}^\infty a_{n-1} t^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n=0 : a_2 = 0 \\ n \geq 1 : (n+1)(n+2) a_{n+2} = a_{n-1} \end{cases}$$

rel. de 3 en 3

Par récurrence, $a_2 = a_5 = a_8 \cdots = \underline{a_{3p+2} = 0}$

De même, comme $a_1 = f'(0) = 0$, $\underline{a_{3p+1} = 0}$

$$\forall p \geq 1 \quad a_{3p} = \frac{a_{3(p-1)}}{3p(3p-1)} = \frac{a_{3(p-2)}}{3p\, 3(p-1)\, (3p-1)\, (3(p-1)-1)}$$

$$= \frac{a_0}{3p\, 3(p-1) \cdots \times 3 \times 1 \times (3p-1)(3(p-1)-1) \cdots (3\times 1 - 1)}$$

Comme $a_0 = f(0) = 1$, $a_{3p} = \dfrac{1}{3^p p! \, 3^p \prod\limits_{k=} (k - 1/3)}$ ③ 22

Posons $g(t) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{1}{9^p p! \prod\limits_{k=1}^{p} (k - 1/3)} t^{3p}$

soit $t \neq 0$ et $u_p = \dfrac{1}{9^p p! \prod\limits_{k=1}^{p} (k - 1/3)} t^{3p}$

$$\frac{u_p}{u_{p-1}} = \frac{t^3}{3p(3p-1)} \xrightarrow[p \to \infty]{} 0 \quad \text{donc } R = +\infty$$

et g définie et solution (par équivalence) au pb de Cauchy : $\begin{cases} x'' = t x \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$, par unicité ;

d'où $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^{3n}}{9^n n! \prod\limits_{k=1}^{n} (k - 1/3)}}$

17) $\prod\limits_{k=1}^{n} (k - 1/3) = \prod\limits_{k=0}^{n-1} (k + 1 - 1/3) = \prod\limits_{k=0}^{n-1} (k + 2/3)$

$$= \frac{1}{n + 2/3} \prod_{k=0}^{n} (k + 2/3) \sim \frac{1}{n} \, \frac{n^{2/3} \, n!}{\Gamma(2/3)} \quad \text{avec } h\,2)$$

cqs $a_{3n} = \dfrac{1}{9^n n! \prod_{k=1}^{n} (k-1/3)} \sim \dfrac{\Gamma(2/3)}{9^n n! n^{-1/3} n!}$

d'où $\boxed{a_{3n} \sim \dfrac{\Gamma(2/3)\, n^{1/3}}{9^n (n!)^2}}$

* le $\sqrt{\pi}$ fait penser à Stirling

$$a_{3n} \sim \frac{\Gamma(2/3)\, n^{1/3} (2n)!}{9^n (n!)^2} \frac{1}{(2n)!}$$

$$\sim \frac{\Gamma(2/3)\, n^{1/3}}{9^n} \frac{(2\cancel{n}/\cancel{e})^{2n} \sqrt{\cancel{4}n\pi}}{(\cancel{n}/\cancel{e})^{2n}\, \cancel{2}n\pi} \frac{1}{(2n)!}$$

$$\sim \frac{\Gamma(2/3)\, n^{1/3}}{\sqrt{\pi}\, n^{1/2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!}$$

d'où $\boxed{a_{3n} \sim n^{-1/6} \dfrac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n} \dfrac{1}{(2n)!}}$

18) : voir plus bas

lemme de comparaison asymptotique (apres 12)) :

On va s'inspirer de la démo. des SRC.

$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \exists (\alpha_n)_{n \geqslant n_1} \mid \forall n \geqslant n_1 : a_n = b_n(1+\alpha_n)$ et $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$

Le cours assure que $R_a = R_b = +\infty$.

Posons $n_2 = \max(n_0, n_1)$.

$$(*)\ \forall N > n_2 : \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{n=0}^{n_2} a_n x^n + \sum_{n=n_2+1}^{N} b_n(1+\alpha_n)x^n$$

Posons $f_a(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $f_b(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_3 \geqslant n_2 \mid \forall n \geqslant n_3 + 1 \quad |\alpha_n| \leqslant \varepsilon$

Dans $(*)$, lorsque $N \longrightarrow +\infty$, il vient :

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^{n_3} a_n x^n + \sum_{n=n_3+1}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=n_3+1}^{\infty} b_n \alpha_n x^n$$

donc $f_a(x) = Q(x) + f_b(x) + \sum\limits_{n=n_3+1}^{\infty} b_n \alpha x^n$

et $Q(x) = \underbrace{\sum\limits_{n=0}^{n_3} a_n x^n - \sum\limits_{n=0}^{n_3} b_n x^n}_{\text{polynôme}}$

⑥ 25

Donc $\left|f_a(x)-f_b(x)\right| \leqslant |Q(x)| + \varepsilon \sum_{n=n_3+1}^{\infty} b_n x^n$ $\leftarrow b_n > 0,\ \forall n \geqslant n_0$

$$\leqslant \underbrace{|Q(x)| - \varepsilon \sum_{n=0}^{n_3} b_n x^n}_{R(x)} + \varepsilon f_b(x)$$

On a $d^\circ R \leqslant n_3$ et comme $n_3 \geqslant n_0$:

$$\forall x > 0 : \quad f_b(x) \geqslant \sum_{n=0}^{n_3} b_n x^n + b_{n_3+1} x^{n_3+1} + \sum_{n_3+2} 0$$

cqs $f_b(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $R(x) = o\left(f_b(x)\right)$

$\left(R(x) \underset{+\infty}{\sim} r_k x^k \text{ et } k < n_3+1 \right)$

donc $\underline{\exists A > 0}$ | $\forall x \geqslant A \quad R(x) \leqslant \varepsilon f_b(x)$

d'où $\underline{\forall x \geqslant A \ : \ |f(x) - f_b(x)| \leqslant 2\varepsilon f_b(x)}$

donc $f_a - f_b \underset{+\infty}{=} o(f_b)$

d'o $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}$

18) Posons $a'_n = a_{3n}$ et $b'_n = n^{-1/6} \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!}$ ⑦ 26

* $a'_n \sim b'_n$

* $\forall n > 0$: $b'_n > 0$

* $b'_n = o\left(\frac{1}{(2n)!}\right)$ donc $R_{b'} = +\infty$.

cqs, avec la 5°), $f_{a'}(x) \underset{+\infty}{\sim} f_{b'}(x)$ (notation du 5°)

d'où $f_{a'}(x^3) \underset{+\infty}{\sim} f_{b'}(x^3)$

Soit $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{-1/6}}{(2n)!} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} x^{3n}$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{2^{1/6}\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)^{-1/6}}{(2n)!} \left(\frac{2}{3} x^{3/2}\right)^{2n}$$

$\begin{pmatrix} \alpha = -\frac{1}{6} \\ p = 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ $$\sim 2^{1/6} \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}} \frac{\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)^{-1/6} e^{\frac{2}{3}x^{3/2}}}{2}$$

d'où $\boxed{f(t) \underset{+\infty}{\sim} C\, t^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3} t^{3/2}\right) \text{ et } C = \frac{3^{1/6}\Gamma(2/3)}{2\sqrt{\pi}}}$

$\underset{\text{Maple}}{\simeq} 0,4587\ldots$