exercice 1 (e_3a - MP - 2015)

Dm 5 : corrigé

(1) L'application $A \longmapsto P(A/B)$ est une probabilité

donc (ici $B=(b=1)$) : $\boxed{1-p = \mathbb{P}(b'=0/b=1)}$

De même $\boxed{q = \mathbb{P}(b'=0/b=0)}$ et $\boxed{1-q = \mathbb{P}(b'=1/b=0)}$

(2) On utilise la F.P.T. :

$$\mathbb{P}(b'=1) = \underbrace{P(b'=1/b=0)}_{1-q}\underbrace{\mathbb{P}(b=0)}_{1-\alpha} + \underbrace{\mathbb{P}(b'=1/b=1)}_{p}\underbrace{\mathbb{P}(b=1)}_{\alpha}$$

d'où : $\boxed{\mathbb{P}(b'=1) = (1-q)(1-\alpha) + p\alpha}$

(3) On cherche $\mathbb{P}(b=1/b'=1)$, utilisons Bayes :

Il faut $P(b'=1) \neq 0$ (petit oubli de l'énoncé, en effet si par exemple $q=1$ et $p=0$, $\mathbb{P}(b'=1)=0$)

Si $p\neq 0$ et $\alpha \neq 0$, $\mathbb{P}(b'=1) \geqslant p\alpha \neq 0$ et donc

$$\mathbb{P}(b=1/b'=1) = \frac{\mathbb{P}(b=1)}{\mathbb{P}(b'=1)} \times \mathbb{P}(b'=1/b=1)$$

d'où : $\boxed{\mathbb{P}\left(b=1 / b'=1\right) = \dfrac{\alpha p}{(1-q)(1-\alpha)+p\alpha}}$

4) $\forall k \in [\![0, n]\!]$: $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X=k / b=1) \times \mathbb{P}(b=1) + \mathbb{P}(X=k / b=0) \times \mathbb{P}(b=0)$

F.P.T.

Or $\mathbb{P}(X=k / b=1)$ est la probabilité d'obtenir k succès (le $b'=1$) sur un tirage de n bits, donc d'après les lois binomiales : $\mathbb{P}(X=k / b=1) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (p proba. d'1 succès)

De même : $\mathbb{P}(X=k / b=0) = \binom{n}{k} (1-q)^k q^{n-k}$

d'où : $\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}\left[\alpha p^k (1-p)^{n-k} + (1-\alpha)(1-q)^k q^{n-k}\right]}$

5) D'après la linéarité de l'espérance et l'espérance d'1 binomiale $B(n,p)$, on a :

$$\boxed{E(X) = \alpha n p + (1-\alpha) n (1-q)}$$

6 On veut $\mathbb{P}(b=1 / X=k)$, donc avec Bayes :

$$\mathbb{P}(b=1 / X=k) = \frac{\alpha \cancel{\binom{n}{k}} p^k (1-p)^{n-k}}{\cancel{\binom{n}{k}}\left[\alpha p^k (1-p)^{n-k} + (1-\alpha)(1-q)^k q^{n-k}\right]}$$

d'où : $$\boxed{\mathbb{P}(b=1 / X=k) = \frac{\alpha p^k (1-p)^{n-k}}{\alpha p^k (1-p)^{n-k} + (1-\alpha)(1-q)^k q^{n-k}}}$$

7 a) On cherche k tel que $\mathbb{P}(b=1 / X=k) > \frac{1}{2}$.

Par symétrie $p=q$, donc on résoud :

$$\frac{\alpha p^k (1-p)^{n-k}}{\alpha p^k (1-p)^{n-k} + (1-\alpha)(1-p)^k p^{n-k}} > \frac{1}{2}$$

car tout est positif.

$$\Leftrightarrow 2\alpha p^k (1-p)^{n-k} > \alpha p^k (1-p)^{n-k} + (1-\alpha)(1-p)^k p^{n-k}$$

$$\Leftrightarrow \alpha p^k (1-p)^{n-k} > (1-\alpha)(1-p)^k p^{n-k}$$

$$\Leftrightarrow p^{2k-n} (1-p)^{n-2k} > \frac{1-\alpha}{\alpha}$$ car $\underline{0} < 1-p < \frac{1}{2} < p < 1$

$$\Leftrightarrow (2k-n) \ln \frac{p}{1-p} > \ln \frac{1-\alpha}{\alpha}$$ ($\ln$ est $\nearrow$)

comme $0 < 1-p < p$, $\frac{p}{1-p} > 1$ et $\ln \frac{p}{1-p} > 0$

donc $\mathbb{P}(b=1 / X=k) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2k-n > \dfrac{\ln\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)}{\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)}$

d'où : $\boxed{k \text{ vérifie la condition ssi } k > \frac{1}{2}\left(n + \dfrac{\ln\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)}{\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)}\right)}$

b) Si $\alpha = 1/2$, $\ln\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) = 0$, la condition devient :

$$\boxed{k > \frac{n}{2}}$$

8 a) On cherche la probabilité de l'évènement :

$$A = (b=1 \text{ et } X < n/2) \cup (b=0 \text{ et } X > n/2)$$

↑ réunion disjointe

d'où avec F.P.T. :

$$\boxed{f(n) = \sum_{0 \leq k < n/2} \mathbb{P}(b=1 / X=k)\,\mathbb{P}(X=k) + \sum_{n/2 < k \leq n} \mathbb{P}(b=0 / X=k)\,\mathbb{P}(X=k)}$$

b) Avec les formules du 4°) et du 5°), on a :

$$\boxed{f(n)=\sum_{k<n/2}\binom{n}{k}\frac{1}{2}p^k(1-p)^{n-k}+\sum_{k>n/2}\binom{n}{k}\frac{1}{2}(1-p)^k p^{n-k}}$$

5

c)

```
def binome(n,p):
    if n<p:
        return 0
    elif p==0:
        return 1
    else:
        return(binome(n-1,p)+binome(n-1,p-1))
```

d)

```
def f(n,p):
    if n%2==0:
        k1=(n//2)-1
        k2=(n//2)+1
    else:
        k1=n//2
        k2=n//2
    s1=sum([binome(n,k)/2*p**k*(1-p)**(n-k) for k in range(0,k1+1)])
    s2=sum([binome(n,k)/2*p**(n-k)*(1-p)**k for k in range(k2,n+1)])

    return s1+s2

for n in range(11):
    for p in range(n+2):
        print(binome(n,p),end=' ')

    print()

print('pour p=0.95 et n=10 , f(n)= ', f(10,0.95))
```

```
In [63]: (executing lines 1 to 35 of "e3a_Bits_2015.py")
1 0
1 1 0
1 2 1 0
1 3 3 1 0
1 4 6 4 1 0
1 5 10 10 5 1 0
1 6 15 20 15 6 1 0
1 7 21 35 35 21 7 1 0
1 8 28 56 70 56 28 8 1 0
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1 0
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1 0
pour p=0.95 et n=10 , f(n)=  2.7545826171875143e-06
```

triangle de P.

A. N. de d)

exercice 2 ①

1°a) On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$, donc $D(\Omega) = \mathbb{Z}$ et $I(\Omega) = \mathbb{N}$

$\forall (d, i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, posons $p_{d,i} = \mathbb{P}(D = d, I = i)$

$= \mathbb{P}(X - Y = d, \min(X, Y) = i)$

1er cas : $d < 0$, $p_{d,i} = \mathbb{P}(\underbrace{X = Y + d}_{(<Y)}, X = i)$

$= \mathbb{P}(X = i, Y = i - d)$

$= \mathbb{P}(X = i) \cdot \mathbb{P}(Y = i - d)$ (X et Y indép.)

$= p \cdot q^i \cdot p \cdot q^{i-d} = p^2 q^{2i-d}$ $(-d = |d|)$

2e cas $d \geq 0$, $p_{d,i} = \mathbb{P}(\underbrace{X = Y + d}_{(\geq Y)}, Y = i)$

$= \mathbb{P}(X = i + d, Y = i) = p^2 q^{2i+d}$ $(d = |d|)$

d'où : $\boxed{\forall (d, i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \ \mathbb{P}(D = d, I = i) = p^2 q^{2i+|d|}}$

b) $\forall d \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{P}(D = d) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(D = d, I = i)$ (par F.P.T.)

$= p^2 q^{|d|} \sum_{i=0}^{\infty} q^{2i} = \dfrac{p^2 q^{|d|}}{1 - q^2}$ $(|q^2| < 1)$

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(I=i) = \sum_{d\in\mathbb{Z}} p^2 q^{2i+|d|}$$

$$= p^2 q^{2i}\left(q^0 + 2\sum_{d=1}^{\infty} q^d\right)$$

$$= p^2 q^{2i}\left(1 + \frac{2q}{1-q}\right) = p q^{2i}(1+q)$$

$$\forall (d,i) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N},\ \mathbb{P}(D=d)\mathbb{P}(I=i) = \frac{p^2 q^{|d|}}{\underbrace{1-q^2}_{(1-q)(1+q)}} p q^{2i}(1+q)$$

$$= p^2 q^{2i+|d|} = \mathbb{P}(D=d, I=i)$$

d $\boxed{\begin{array}{l} \forall d \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{P}(D=d) = \dfrac{p^2 q^{|d|}}{1-q^2} \\ \forall i \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{P}(I=i) = p q^{2i}(1+q) \end{array} \quad \text{et } D \,\&\, I \text{ indépendants}}$

2) $\forall d \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(D=d, I=i) = \mathbb{P}(X = Y + \underbrace{d}_{\geq 0}, Y=i) = \mathbb{P}(X=i+d, Y=i)$$

Par indépendance, on a : $\mathbb{P}(D=d)\mathbb{P}(I=i) = \mathbb{P}(X=i+d)\mathbb{P}(Y=i)$

$= \mathbb{P}(X=i+d)\mathbb{P}(X=i)$ car $X \sim Y$

pour $d=0$, $\mathbb{P}(X=i)^2 = \mathbb{P}(D=0)\mathbb{P}(I=i)$

$d=1$, $\mathbb{P}(X=i+1)\mathbb{P}(X=i) = \mathbb{P}(D=1)\mathbb{P}(I=i)$

Tout est non nul car $\forall i\ \mathbb{P}(Y=i) \neq 0$, donc par quotient

③

$$\frac{P(X=i+1)}{P(X=i)} = \frac{P(D=1)}{P(D=0)} = q \neq 0, \text{ constante}$$

cqs $\forall i \in \mathbb{N}$ $P(X=i) = q^i P(X=0)$

comme $\left(\sum P(X=i)\right)_{i\in\mathbb{N}}$ cvg et a pour somme 1,

on a $q<1$ et $1 = \frac{1}{1-q} P(X=0)$: $P(X=0) = p = 1-q$

d'où $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X=k) = p \cdot q^k}$

exercice 3

① 7

essai initial

1) On a $X_n = 1 \times Z_1 \cdots \times Z_n$

$\forall i \in \mathbb{N}^*$ $E(Z_i) = (1+a)\frac{1}{2} + (1-a)\frac{1}{2} = 1$

Par indépendance, $E(X_n) = E(Z_1) \times \cdots \times E(Z_n)$ d'où $\boxed{E(X_n) = 1}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $V(X_n) = E(X_n^2) - 1$

$= E(Z_1^2 \cdots Z_n^2) - 1$

$= \prod_{i=1}^{n} E(Z_i^2) - 1$ (par indép. des Z_i^2 (coalitions))

Or $E(Z_i^2) = (1+a)^2\frac{1}{2} + (1-a)^2\frac{1}{2}$ (formule de transfert)

$= 1+a^2$, donc $V(X_n) = (1+a^2)^n - 1$

Comme $1+a^2 > 1$, d'où $\boxed{\lim_{n\to\infty} V(X_n) = +\infty}$

3) D'après le cours, comme les VAD $(Y_1, \cdots, Y_n)$ sont indépendantes (c'est le lemme des coalitions), on a (avec B.T.) :

$\forall \varepsilon > 0$, $P(|\hat{Y}_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon}$ où $m = E(Y_1)$ et $\sigma^2 = V(Y_1)$

Or $m = \frac{1}{2}\ln(1+a) + \frac{1}{2}\ln(1-a) = \frac{1}{2}\ln(1-a^2) < 0$

et $(\hat{Y}_n - m > \varepsilon) \subset (|\hat{Y}_n - m| > \varepsilon) \subset (|\hat{Y}_n - m| \geq \varepsilon)$

$$0 \leq \mathbb{P}(\hat{Y}_n > m + \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon}$$

pour $\varepsilon = -\frac{m}{2} > 0$, posons $\delta = -m - \varepsilon = -\frac{m}{2} > 0$

$$\forall n \geq 1 \quad 0 \leq \mathbb{P}(\hat{Y}_n > -\delta) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon}$$

$\downarrow_{n \to \infty}$ T. E.

$\to 0 \leftarrow$

d'
$$\boxed{\text{pour } \delta = -\frac{m}{2} > 0, \ \lim \mathbb{P}(\hat{Y}_n > -\delta) = 0}$$

4) $(X_n > \varepsilon) = (Z_1 \cdots Z_n > \varepsilon) = (Y_1 + \cdots + Y_n > \ln \varepsilon)$ ($\ln$ st $\nearrow$)

$\underline{\forall \varepsilon > 0}$

$$= \left(\hat{Y}_n > \frac{\ln \varepsilon}{n}\right)$$

du 3)

Comme $\frac{\ln \varepsilon}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \ \forall n \geq n_0 : \frac{\ln \varepsilon}{n} \geq -\delta$

d'où $(X_n > \varepsilon) \subset (\hat{Y}_n > -\delta)$

donc $0 \leq \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(\hat{Y}_n > -\delta)$

$\forall n \geq n_0$ $\to 0 \leftarrow$ T. E.

d'
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = 0}$$

Exercice 4

1) * La matrice nulle (0) vérifie $A(0) = (0)A = (0)$

donc $\underline{(0) \in F}$

* $\forall (M,N) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda MA + NA = (\lambda M + N)A$$

donc $\underline{\lambda M + N \in F}$

d'où $\boxed{F \text{ sev donc } \mathbb{R}\text{-ev}}$

* $A \in F$ ($AA = AA$!) et $I_2 \in F$

Mq (I_2, A) libre :

ds la base $(E_{11}; E_{2,1}; E_{1,2}; E_{22})$

→ avec le rg : $rg(I_2, A) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 : \underline{\text{libre}}$$

$C_2 - C_1$

→ avec la déf. : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda I_2 + \mu A = (0)$:

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 2\mu = 0 \\ 5\mu = 0 \\ \lambda + 4\mu = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda = \mu = 0 : \text{libre}$$

Comme $\mathrm{vect}(I_2, A) \subset F$ et $\dim \mathrm{vect}(I_2, A) = 2$

d'où $\boxed{\dim F \geq 2}$

2) Soit $M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$

$$AM = MA \iff \begin{pmatrix} x+5y & z+5t \\ 2x+4y & 2z+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z & 5x+4z \\ y+2t & 5y+4t \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \cancel{x}+5y = \cancel{x}+2z \\ 2x+4y = y+2t \\ z+5t = 5x+4z \\ 2z+\cancel{4t} = 5y+\cancel{4t} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2z = 5y & L_1 = L_4 \\ 2t = 2x+3y & L_2 \\ 5t = 5x+3z & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = \frac{5}{2}y \\ t = x+\frac{3}{2}y \\ t = x+\frac{3}{5}z = x+\frac{3}{2}y \end{cases}$$

$$\iff M = \begin{pmatrix} x & \frac{5}{2}y \\ y & x+\frac{3}{2}y \end{pmatrix}$$

$$\iff M = x I_2 + y \begin{pmatrix} 0 & 5/2 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Si on pose $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 5/2 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix}$, on a

$\underline{F = \text{vect}(I_2, M_0)}$ d'où $\underline{\dim F \leq 2}$

Or on a vu que $\dim F \geq 2$, cqs $\dim F = 2$.

(I_2, A) est libre (1°) donc base de F

(I_2, M_0) est génératrice

d'où $\boxed{\dim F = 2 \text{ et } (I_2, M_0) \text{ base de } F}$

3°) D'après le T.B.I., comme

(I_2, M_0) libre et $(I_2, M_0, E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$ génér

on peut trouver une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ "entre les 2".

Essayons (E_{12}, E_{22}) :

$$\text{rg}(I_2, M_0, E_{11}, E_{21}) = \text{rg}\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 1 & 0 \\ 1 & 3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} (1,1) \\ (2,1) \\ (1,2) \\ (2,2) \end{array}$$

$$= 4$$

d'où $\boxed{G = \text{vect}(E_{1,2}, E_{2,2}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \text{ suppl. de } F}$

4) Mq F est une sous-algèbre : (4)

* F stable par $+$ et $\cdot$ (c'est au 1°)

* $I_2 \in F$

* Mq F stable par $\times$:

Utilisons la base (I_2, M_0) :

$\forall (M,N) \in F^2 \ \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 \ \backslash$

$M = \alpha I_2 + \beta M_0$ et $N = \gamma I_2 + \delta M_0$

$$MN = \underbrace{\alpha\gamma I_2}_{\in F} + \underbrace{(\beta\gamma + \alpha\delta) M_0}_{\in F} + \beta\delta \underbrace{M_0^2}_{?}$$

$$M_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 5/2 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5/2 & 15/4 \\ 3/2 & 19/4 \end{pmatrix}$$

Si $M_0 \in F$, $M = x I_2 + y M_0$ (bas de la page (2))

donc il faut $x = \frac{5}{2}$ et $y = \frac{3}{2}$, vérifions :

$$\frac{5}{2} I_2 + \frac{3}{2} M_0 = \begin{pmatrix} 5/2 & \frac{3}{2}\frac{5}{2} \\ 3/2 & \frac{3}{2}\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 15/4 \\ 3/2 & 19/4 \end{pmatrix} = M_0^2$$

cqs $MN \in F$ cl $\boxed{F \ \mathbb{R}\text{-algèbre}}$

$\rightarrow$ Soit $M = \begin{pmatrix} x & 5/2\, y \\ y & x + \frac{3}{2} y \end{pmatrix} \in F$. Si $M \neq (0)$, M est-elle inversible et si oui $M^{-1} \in F$?

$\det M = x^2 + \frac{3}{2}xy - \frac{5}{2}y^2$

↑ on voit que cette éq. aura des racines non nulles.

si $y=1$: $x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = 0 \iff x = 1$ ou $-5/2$

↑ racine évidente

cqs $M = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 1 & 5/2 \end{pmatrix} = I_2 + M_0 \in F$, $M \neq (0)$ et

M non inversible

d'où $\boxed{F \text{ n'est pas un corps}}$

5°) a) $P(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -5 \\ -2 & x-4 \end{vmatrix} = (x-1)(x-4) - 10$

d'où $\boxed{P(x) = x^2 - 5x - 6}$ et $\underline{\mathrm{Tr}(f) = 5}$ et $\underline{\det(f) = -6}$

Les racines de P sont -1 (évidente) et 6 (avec le produit des racines) d'où $\boxed{\alpha = -1 \text{ et } \beta = 6}$

b) $\vec{u} = (x,y) \in E_{-1} \iff (A + I_2)X = (0)$

$\iff \begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 2x + 5y = 0 \end{cases}$

$\iff \underline{2x + 5y = 0} \iff x = \frac{-5}{2}y \iff \begin{cases} x = -\frac{5}{2}y \\ y = y \end{cases}$

cqs $\vec{u} = (x,y) \in E_{-1} \Leftrightarrow \vec{u} = y\begin{pmatrix} -5/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{y}{2}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ 6

D'où $\boxed{E_{-1} = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -5/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}$

De même $\vec{u} = (x,y) \in E_6 \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 5y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = y \end{cases}$

d'où $\boxed{E_6 = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$

c) $\text{rg}\left(\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = 2$

$C_2 + 5C_1$

cqs $\boxed{b' \text{ base de } E}$

Comme $f(\vec{u}) = -\vec{u}$ et $f(\vec{v}) = 6\vec{v}$, on a

$$\boxed{M_{b'}(f) = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} f(\vec{u}) & f(\vec{v}) \\ \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \vec{u} \\ \vec{v} \end{array}}$$

Si on note $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \text{Pass}(b, b') = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

on a $\boxed{A = PDP^{-1} \text{ et donc } A \text{ semblable à } D}$

d) $A = PDP^{-1}$, $A^2 = PD\cancel{P^{-1}P}DP^{-1} = PD^2P^{-1}$ et

si $A^n = PD^nP^{-1}$, $A^{n+1} = PD^n\cancel{P^{-1}P}DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$

cqg $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix} P^{-1}$

Comme $P^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$,

$$\boxed{A^n = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5(-1)^n + 2\cdot 6^n & -5(-1)^n + 5\cdot 6^n \\ -2(-1)^n + 2\cdot 6^n & 2(-1)^n + 5\cdot 6^n \end{pmatrix}}$$

Si on evalue cette matrice pour $n = -1$, on trouve

$$\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -5 + \frac{2}{6} & +5 + \frac{5}{6} \\ +2 + \frac{2}{6} & -2 + \frac{5}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & 5/6 \\ 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}$$

Or $A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & 5/6 \\ 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}$ $=$

d'où $\boxed{\text{La formule est valable pour } n = -1}$

<u>Remarque</u>: elle est aussi valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$

ESIM 2002 MP1 PROBLEME

I R. préliminaires

1) a) + B I !

b) Toujours du cours ! si $x \in \overbrace{\text{vect}(e_1, \dots, e_r)}^{F} \cap \ker u$

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i = \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i e_i \Rightarrow \forall i \ \lambda_i = 0$$

d'où F et $\ker u$ en S.D.

si $x \in E$ $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n /$ $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \dots}_{F} + \underbrace{\sum_{i=r+1}^{n} \dots}_{\ker u}$

d'où $\underline{F \oplus \ker u = \mathbb{R}^n}$

Soit $\tilde{u} : F \longrightarrow \text{Im}\, u$ $\quad \ker \tilde{u} = F \cap \ker u = \{0\}$

$x \longmapsto u(x)$ $\quad$ donc $\tilde{u}$ injective

comme $\dim F = n - \dim \ker u = \dim \text{Im}\, u$: $\underline{\tilde{u} \text{ isomorphisme}}$

et donc $\boxed{(u(e_1), \dots, u(e_r)) = (\tilde{u}(e_1), \dots, \tilde{u}(e_r)) \text{ base de } \text{Im}\, u}$

(car image d'1 base de F par $\tilde{u}$ bijective)

c) oui ! par T.B.I. $(u(e_1), \dots, u(e_r), e'_{r+1}, \dots, e'_n)$ base de $\mathbb{R}^n$. Si on pose $b = (e_1, \dots, e_n)$ et $b' = (u(e_1), \dots, u(e_r), e'_{r+1}, \dots, e'_n)$ bases de $\mathbb{R}^n$

II 1) pour $A = B = I_n$: $f(I_n \times I_n) = f(I_n)^2 = f(I_n)$

donc le réel $\alpha = f(I_n)$ vérifie $\alpha^2 = \alpha$ soit $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. Si $\alpha = 0$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $f(A) = f(A \times I_n) = f(A)\alpha = 0$

Absurde $\underline{f \neq 0}$ donc $\alpha = 1$

Soit A inversible $f(A \times A^{-1}) = f(A) f(A^{-1}) = f(I_n) = 1 \neq 0$

d'où $\boxed{f(A) \neq 0}$ (et on a $f(A) = \dfrac{1}{f(A^{-1})}$)

2) a) L'idée est d'appliquer (Application est le titre du paragraphe) le I 2) : $A \times \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline A_2 & 0 \end{array}\right)$

Donc les $n-r$ dernières colonnes sont nuls et on continue avec des matrices du type I 2) :

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 \\ \vdots & \underbrace{1 \cdots 1}_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}}_{r-2} & 0 \\ 0 & 0 & & \end{array}\right)$$

Précisons : soit $A_1 = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, $A_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_n \end{pmatrix}$ avec $\longrightarrow$

$\varepsilon_i = 0$ et $\varepsilon_j = 1 \ \forall j \in [\![1, r+1]\!] - \{i\}$: possible car (4)

$r < n$ donc $r+1 \leqslant n$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{r+1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

où α_i est le produit des élts à la case $[i, i]$ de chacune des matrices $A_1, \dots, A_{r+1}$:

$$\alpha_i = A_1[i,i] \times \dots \times A_{r+1}[i,i]$$

si $i \geqslant r+1$; $A_1[i,i] = 0$ donc $\alpha_i = 0$
si $i \leqslant r$; $A_i[i,i] = \varepsilon_i = 0$ donc $\alpha_i = 0$
car $\forall i$; $\alpha_i = 0$

d'où $\boxed{A_1 \times \dots \times A_{r+1} = 0}$

b) On a déduit que $f(A_1 \times \dots \times A_{r+1}) = f(0)$.

Or $f(0) = f(0)^2$, donc comme pour I_n :

$f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$ si $f(0) = 1$ on a

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $f(A \times 0) = 1 = f(A) \times f(0) = f(A)$

Absurde car $f \neq 1$ donc $\underline{f(0) = 0}$

Donc $f(A_1) \times \dots \times f(A_{r+1}) = 0$ et donc $\exists i \setminus f(A_i) = 0$

Or A_i équivalente à A : $\exists P, Q$ inversible $\setminus A = PA_iQ$

d'où $f(A) = f(P) \times f(A_i) \times f(Q) = 0$ (5)

cl $\boxed{f(A) = 0}$

3) f est donc nulle sur toute matrice non inversible et non nulle sur toute matrice inversible.

$f = \det$ est un exemple d'1 telle application.

Ce n'est pas la seule, ex : $f(A) = \det(A)^3$

III 1) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $A = \underset{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}{\underset{\cap}{A}} \times \underset{J}{\underset{\cap}{I}} \in J$ (idéal bilatère)

donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset J$ comme $J \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\boxed{J = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

2) si $A \in J$ et A inversible, $A \times A^{-1} \in J$ d'où

$I \in J$ cl $\boxed{J = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

3) a) A et $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ sont équivalentes donc $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = PAQ$

or $A \in J$ donc $PA \in J$ et $(PA)Q \in J$ cl $\boxed{\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in J}$

b) Posons $A_1 = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, si $r = n$, $A_1 = I_n$ inversible

sinon $r < n$ posons pour tout $i \in [\![2, n-r+1]\!]$:

$A_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_n \end{pmatrix}$ telle que $\varepsilon_{r-1+i} = 1$ et $\text{card}\{j \mid \varepsilon_j = 1\} = r$

et $\text{card}\{j \mid \varepsilon_j = 0\} = n - r$

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r+1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Les α_i sont des sommes de 0 ou de 1. A cause de A_1 ; $\alpha_i \geq 1$ pour tout $i \in [\![1, n-r+1]\!]$ et à cause de A_i, pour $i \geqslant 2$, $\alpha_{r-1+i} \geqslant 1$ (par exemple pour $i=2$: $\alpha_{r+1} \geqslant 1$). Donc $\forall i$ $\alpha_i \geqslant 1$ donc $\alpha_i \neq 0$

csq $\det(A_1 + \cdots + A_{n-r+1}) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$

d'où $\boxed{A_1 + \cdots + A_{n-r+1} \text{ inversible, de plus } A_i \text{ est toujours de rang } r \text{ donc équivalente à } A}$

4) On continue le b) ci-dessus ; comme $A_i = PAQ$, $A_i \in J$ et donc $A_1 + \cdots + A_{n-r+1} \in J$ et grâce au III 2) $J = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

cl $\boxed{\text{Les seuls idéaux bilatères sont } \{0\} \text{ et } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

IV 1) * $\underset{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}{0} \in J_E$, car $Im(0) = \{\underset{\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}{0}\} \subset E$ (E sev ; $0 \in E$)

* Soit $(A, B) \in J_E^2$ $Im A = \{AX, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\} \subset E$ et $Im B \subset E$

Montrons que $Im(A-B) \subset E$

$\forall Y \in Im(A-B)$ $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ \ $Y = (A-B)X = AX - BX$

or $AX \in E$ et $BX \in E$ donc (E sev) $AX - BX = Y \in E$

donc $Im(A-B) \subset E$ et $A - B \in J_E$

* $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall M \in J_E$ montrons que $Im(MA) \subset E$

$\forall Y \in Im(MA)$ $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ \ $Y = MAX = M(AX) \in Im M$

donc $Im(MA) \subset Im M \subset E$ car $M \in J_E$ d'où $AM \in J_E$

cl $\boxed{J_E \text{ idéal à droite}}$

2) a) S et $Im A$ ont même dimension (qui est la dimension de $Im u$, u canoniquement associé à A).

Si $\phi(X) = 0 \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow X \in Ker(A)$ or $X \in S$

donc $X \in Ker(A) \cap S = \{0\}$ d'où ϕ injective (et linéaire !)

donc $\boxed{\phi \text{ définit un isomorphisme entre } S \text{ et } Im A}$

b) $\forall i \in [\![1, q]\!]$ $Be_i \in Im B \subset Im A$ donc $\exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ \ $AX = Be_i$ or $\exists(\varepsilon_i, h_i) \in S \times Ker A$ \ $X = \varepsilon_i + h_i$

d'où $AX = \underline{A\varepsilon_i = Be_i}$, ce qui prouve l'existence.

Si $A\varepsilon_i = A\varepsilon'_i = Be_i$, alors $\varepsilon_i - \varepsilon'_i \in S \cap Ker A = \{0\}$

d'où $\varepsilon_i = \varepsilon'_i$, ce qui prouve l'unicité.

cl $\boxed{\exists! \, \varepsilon_i \in S \mid A\varepsilon_i = Be_i}$

c) $AC = A^{(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_q)} = (A\varepsilon_1 | \dots | A\varepsilon_q) = (Be_1 | \dots | Be_q)$

or Be_i est la i-ème colonne de B. d'où $\boxed{AC = B}$

3) a) $\underline{D = (A | B)}$. Si on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\operatorname{Im} D = \operatorname{vect}(Ae_1, \dots, Ae_n, Be_1, \dots, Be_n)$

d'où $\operatorname{Im} D = \operatorname{vect}(Ae_1, \dots, Ae_n) + \operatorname{vect}(Be_1, \dots, Be_n)$
$= \operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B$ d'où $\boxed{\operatorname{Im} D = \operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B}$

b) On applique le 2) $\operatorname{Im} C \subset \operatorname{Im} D$ donc $\exists W \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{R}) \setminus$ $\boxed{C = DW}$

c) Notons $W = \left(\frac{U}{V}\right) \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{R})$, U et V 2 blocs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$DW = (A | B)\left(\frac{U}{V}\right) = (AU + B.V)$ donc $\boxed{C = AU + BV}$

4a) $\underline{\text{Notons}}$ $r_0 = \max\{r \in [\![0, n]\!] \setminus \exists \Pi \in J \text{ et } rg\,\Pi = r\}$

r_0 existe car $J \neq \emptyset$ et $\exists \Pi_0 \in J \mid rg\,\Pi_0 = r_0$

$\underline{\text{d'où}}$ $\boxed{\exists r_0 \in [\![0, n]\!] \mid \forall \Pi \in J,\ rg(\Pi) \leq r_0 \text{ et } \exists \Pi_0 \in J \mid rg\,\Pi_0 = r_0}$

b) $\operatorname{Im} \Pi \not\subset \operatorname{Im} \Pi_0 \Rightarrow \exists X_0 \in \operatorname{Im} \Pi$ tel que $X_0 \notin \operatorname{Im} \Pi_0$

Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \operatorname{Im} C = \operatorname{Im} \Pi_0 \oplus \operatorname{vect}(X_0)$: Une telle matrice existe : si $\operatorname{Im} \Pi_0 = \operatorname{vect}(X_1, \dots, X_{r_0})$

alors $C = (X_0 | X_1 | \dots | X_{n_0} | 0 | 0 | \dots | 0)$ (n matrices colonnes) convient

On a donc $\operatorname{Im} C \subset \operatorname{Im} M + \operatorname{Im} M_0$ d'où avec le 3)

$\exists (U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mid C = MU + M_0 V$

Or M et M_0 sont dans J, idéal à droite donc

$MU + M_0 V = C \in J$ et $\operatorname{rg} C = \dim(\operatorname{Im} C) = n_0 + 1 > n_0$ ✗

c) On en déduit que $\forall M \in J \quad \operatorname{Im} M \subset \operatorname{Im} M_0$

donc $M \in J_{\operatorname{Im}(M_0)}$ et $\boxed{J \subset J_{\operatorname{Im}(M_0)}}$

5) c'est le 2) ; soit $M \in J_{\operatorname{Im}(M_0)}$, $\operatorname{Im} M \subset \operatorname{Im} M_0$

donc $\exists C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M = M_0 C$, comme

$M_0 \in J$ et J idéal à droite, $M = M_0 C \in J$ et donc $J_{\operatorname{Im}(M_0)} \subset J$

d'où $\boxed{J = J_{\operatorname{Im}(M_0)}}$