DM 7 : corrigé

exercice 1

1) * $N(x,y) = \|(x,y)\|_1 + \|(x,y)\|_\infty$ donc on a "trivialement" les 4 propriétés d'une norme.

* Si $(x,y) \in B_F(0,1)$ alors $(\pm x, \pm y) \in B_F(0,1)$

donc on cherche $B_F(0,1) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\} = B^{++}$

puis on complète par symétries :

$s_1 : (x,y) \longmapsto (-x,-y)$ symétrie % 0

$s_2 : (x,y) \longmapsto (x,-y)$ —— % (Ox)

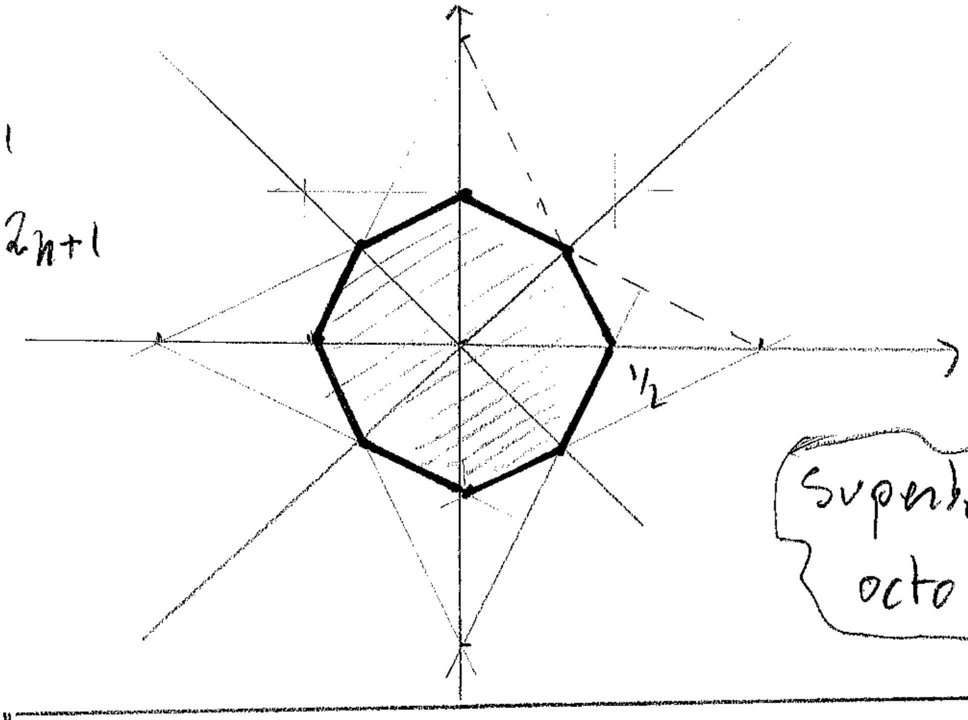
$s_3 : (x,y) \longmapsto (-x,y)$ —— % (Oy)

$$(x,y) \in B^{++} \iff x + y + \max(x,y) \leq 1$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y \leq 1 & \text{si } x \geq y \\ x + 2y \leq 1 & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

$2x+y \leq 1$

$\Leftrightarrow y \leq -2x+1$



d°: $\boxed{\text{La boule unité est la zone hachurée.}}$

2° a) * $\|(x,y)\| \geq 0$

* $\|(x,y)\| = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+3y=0 \\ 2x-7y=0 \end{cases}$ $\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$

$\Rightarrow x = y = 0$

* $\|(\lambda x, \lambda y)\| = |\lambda(x+3y)| + |\lambda(2x-7y)| = |\lambda| \, \|(x,y)\|$

* $\|(x,y)+(x',y')\| = |x+x'+3(y+y')| + |2(x+x')-7(y+y')|$

$\leq |x+3y| + |x'+3y'| + |2x-7y| + |2x'-7y'|$

$\leq \|(x,y)\| + \|(x',y')\|$

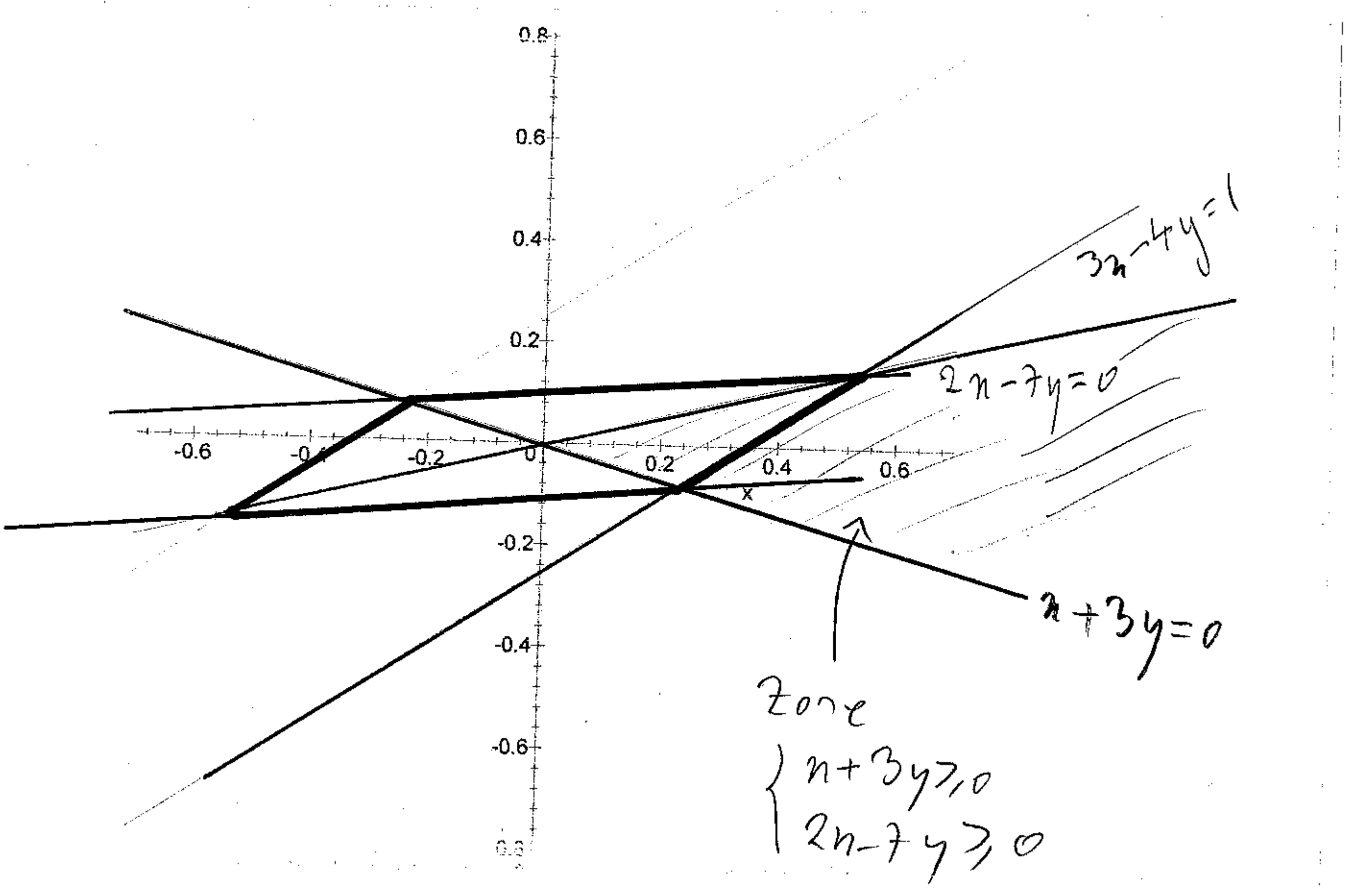
d°: $\boxed{\| \ \text{norme sur } \mathbb{R}^2}$

③

b) 1^{er} cas $\begin{cases} x+3y\geq 0 \\ 2x-7y\geq 0 \end{cases}$

$$(x,y)\in S \iff x+3y+2x-7y=1$$
$$\iff 3x-4y=1$$

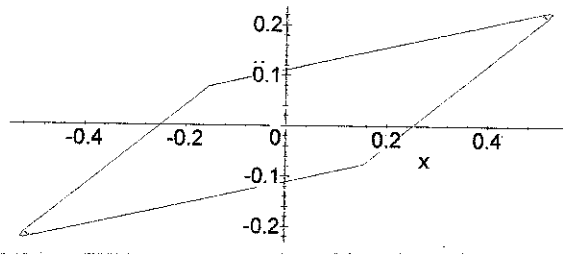
On trace donc $\begin{cases} x+3y\geq 0 \\ 2x-7y\geq 0 \\ 3x-4y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} y\geq -\frac{x}{3} \\ y\leq \frac{2}{7}x \\ y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4} \end{cases}$



On fait de m pour les 3 autres zones

$\begin{cases} x+3y\geq 0 \\ 2x-7y\leq 0 \\ -x+10y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x+3y\leq 0 \\ 2x-7y\geq 0 \\ x-10y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x+3y\leq 0 \\ 2x-7y\leq 0 \\ -3x+4y=1 \end{cases}$

```
> with(plots):
> implicitplot(abs(x+3*y)+abs(3*x-7*y)=1,
  x=-0.55..0.55,y=-0.3..0.3,numpoints=5000);
```

c) * $\forall (x,y) \in E \quad \|(x,y)\| = |x+3y| + |2x-7y|$

$$\leq |x| + |3y| + |2x| + |7y|$$

$$\leq 10(|x|+|y|) \leq 10\,\|(x,y)\|_1$$

Si $(x,y) = (0,1) \neq (0,0) \quad \|(0,1)\| = 10 = 10 \cdot \|(0,1)\|_1$

d'où $\boxed{\|\ \| \leq 10 \cdot \|\ \|_1}$

* Analyse : on cherche b |

$$(*) \quad \|(x,y)\|_1 = |x| + |y| \leq b\left(|x+3y| + |2x-7y|\right)$$

posons $\begin{cases} X = x+3y \\ Y = 2x-7y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{7}{13}X + \frac{3}{13}Y \\ y = \frac{2}{13}X - \frac{1}{13}Y \end{cases}$

et $(*)$ devient $\left|\frac{7}{13}X + \frac{3}{13}Y\right| + \left|\frac{2}{13}X - \frac{1}{13}Y\right| \leq b(|X|+|Y|)$

or $\left|\frac{7}{13}X+\frac{3}{13}Y\right|+\left|\frac{2}{13}X-\frac{1}{13}Y\right| \leq \frac{9}{13}(|X|+|Y|)$

Synthèse :

$\forall (x,y) \in E$ posons $\begin{cases} X = x+3y \\ Y = 2x-7y \end{cases}$, on a

$$\|(x,y)\|_1 = |x|+|y| = \left|\frac{7}{13}X+\frac{3}{13}Y\right| + \left|\frac{2}{13}X-\frac{1}{13}Y\right|$$

$$\leq \frac{9}{13}\left(|X|+|Y|\right) = \frac{9}{13}\left(|x+3y|+|2x-7y|\right)$$

$$\leq \frac{9}{13}\|(x,y)\|$$

pour $X=1$ et $Y=0$ soit $x_0=\frac{7}{13}$ et $y_0=\frac{2}{13}$ on a

$$\|(x_0,y_0)\|_1 = \left|\frac{7}{13}\right| + \left|\frac{2}{13}\right| = \frac{9}{13}$$

$$\|(x_0,y_0)\| = \left|\frac{7}{13}+3.\frac{2}{13}\right| + \left|2.\frac{7}{13}-7.\frac{2}{13}\right| = 1$$

donc $\|(x_0,y_0)\|_1 = \frac{9}{13}\|(x_0,y_0)\|$ & $(x_0,y_0) \neq (0,0)$

cl : $\boxed{\|\;\|_1 \leq \frac{9}{13}\|\;\|}$

exercice 2

1) et 2)

~~a)~~ On a $A = A_1 \cap A_2$ avec $\begin{cases} A_1 = \{ f \in E \mid f(0) = 0 \} \\ A_2 = \{ f \in E \mid \int_0^1 f \geq 1 \} \end{cases}$

Introduisons $u : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto f(0) \end{array}$ et $v : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \int_0^1 f \end{array}$

On a évidemment $A_1 = u^{-1}(\{0\})$ et $A_2 = v^{-1}([1, +\infty[)$

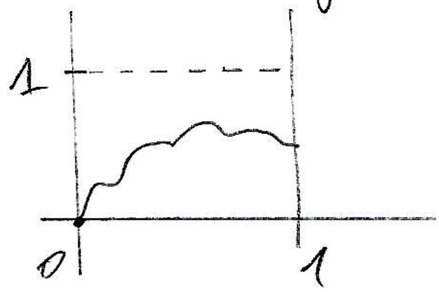
Pour montrer que A_1 et A_2 sont fermés, il suffit que u et v soient continues sur E. Or u et v sont clairement linéaire (formes linéaires). soit $f \in E$,

suite page 2 ⟶

$|u(f)| = |f(0)| \leqslant \|f\|_\infty$ donc u C^0 sur E (et $\|u\| \leqslant 1$)

$|v(f)| = \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| \leqslant (1-0)\,\|f\|_\infty$ donc v C^0 sur E (et $\|v\| \leqslant 1$)

Donc A_1 et A_2 sont fermés dans E. Comme une intersection de fermés est fermé, on conclut : $\boxed{A \text{ fermé}}$

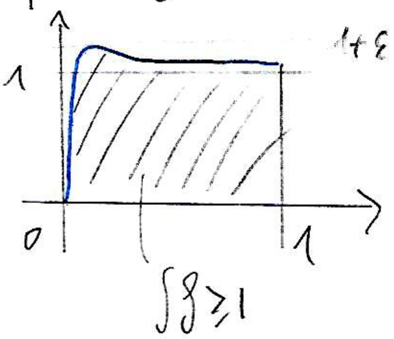
3) 

si $\forall t \in [0,1]$ $f(t) \leqslant 1$ alors $\int_0^1 f(t)\,dt \leqslant \int_0^1 1 = 1$ donc, comme $\int_0^1 f \geqslant 1$ car $\underline{f \in A}$, on a $\int_0^1 f(t)\,dt = 1$ d'où :

$\int_0^1 [1 - f(t)]\,dt = 0$ or $g : t \longmapsto 1 - f(t)$ est positive, continue sur $[0,1]$ et $\int_0 g = 0$ donc $\forall t \in [0,1] : g(t) = 0$

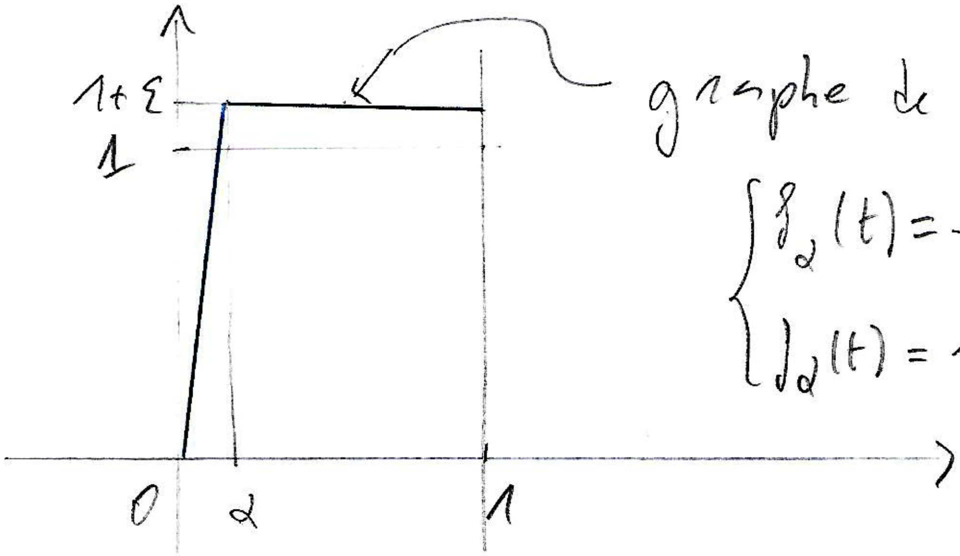
soit : $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = 1$; Absurde car $f(0) = 0 \neq 1$

$\underline{\text{csq}}$ $\exists t_0 \in [0,1] \setminus f(t) > 1$ et donc $\boxed{\|f\|_\infty > 1}$

4) 

L'idée est de partir de $(0,0)$ et d'aller "le + vite" possible juste au dessus de 1 pour avoir $\int_0^1 f \geqslant 1$. Précisons :

Tout d'abord, avec le b), on a $\forall f \in A$ $\|f - 0\|_\infty > 1$ donc $d(0, A) \geqslant \underline{1}$



graphe de f_α :

$$\begin{cases} f_\alpha(t) = \dfrac{1+\varepsilon}{\alpha} t & t \in [0, \alpha] \\ f_\alpha(t) = 1+\varepsilon & \text{si } t \in [\alpha, 1] \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$, fixé cherchons s'il existe $\alpha > 0$ tel que $f_\alpha \in A$. On a facilement (trapèze) :

$$\int_0^1 f_\alpha = (1+\varepsilon)\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{donc} \quad \int_0^1 f_\alpha \geqslant 1 \iff \varepsilon - \frac{\alpha}{2} - \varepsilon\frac{\alpha}{2} \geqslant 0$$

donc $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha \geqslant 1 \iff \alpha \leqslant \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}$

Soit $\alpha_0 = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$. On a $\alpha_0 \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\displaystyle\int_0^1 f_{\alpha_0} \geqslant 1$, Comme $f_{\alpha_0}(0) = 0$ et que $f_{\alpha_0} \in E$, on a $f_{\alpha_0} \in A$ et $\| f_{\alpha_0} \| = 1+\varepsilon$. Donc $\left| \begin{array}{l} d(0, A) \leqslant 1+\varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \end{array} \right.$

En faisant tendre ε vers 0, il vient $d(0, A) \leqslant 1$

$\underline{\text{cl}}$ $\boxed{d(0, A) = 1}$

Rem. Cette distance n'est bien sûr pas atteinte à cause du b).

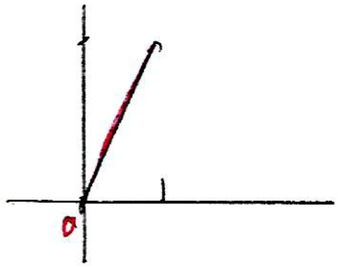
5) $\forall f \in A$ $\forall r > 0$ posons $g = f + r$ $\left(g(x) = f(x) + r\right)$ ④

On a $\|g - f\|_\infty = r$: $g \in B_F(f, r)$

Or $g(0) = 0 + r \neq 0$ donc $g \notin A$

cqs $B_F(f, r) \not\subset A$ d'où $\boxed{\mathring{A} = \emptyset \neq A \text{ : non ouvert}}$

6) Si $f \in A$ par exemple $f(x) = 2x$



$\forall n \geq 1$ $nf \in A$ et $\|nf\|_\infty = 2n \to +\infty$

d'où $\boxed{\text{A non borné et donc non compact}}$

Rem : Si A était borné, il serait donc fermé et borné, mais cela ne suffirait pas pour être compact.

7) A_1 et A_2 sont convexes car

si $f(0) = g(0) = 0$, $\forall t \in [0,1]$ $(1-t)f(0) + tg(0) = 0$

si $\int_0^1 f \geq 1$ et $\int_0^1 g \geq 1$, $\int_0^1 (1-t)f + tg \geq (1-t) \times 1 + t \times 1 \geq 1$

d'où $\boxed{\text{A connexe/arcs}}$

Exercice 3*

1) Soit $v \in \text{vect}(A)$, $\exists s \geq 1$ $\exists (u(1), \dots, u(s)) \in A^s$

et $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{R}^s \setminus v = \lambda_1 u(1) + \dots + \lambda_s u(s)$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n = \lambda_1 u(1)_n + \dots + \lambda_s u(s)_n$

L'idée, c'est que $u(1), \dots, u(s)$ n'ont qu'au plus 2 valeurs d'adhérence (si $u \in A$ et $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n^2$ alors si α est une valeur d'adhérence de u, $\alpha^2 = \ell$ donc $\alpha = \pm\sqrt{\ell}$), et donc v ne va avoir qu'un nombre fini de val. d'adhérence.

Posons pour tout $i \in [\![1, s]\!]$ $\ell_i = \lim_{n\to\infty} u(i)_n^2$ $(u(i) \in A)$

Soit α une valeur d'adhérence de v : $\alpha = \lim v_{\varphi(n)}$

Tout d'abord si $u \in A$, comme u^2 converge elle est bornée : $\exists M \in \mathbb{R} \setminus \forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n^2| \leq M$ d'où $|u_n| \leq \sqrt{M}$ et donc u est bornée.

Par Bolzano-Weierstrass : $((u(1))_{\varphi(n)})$ admet une valeur d'adhérence qui vaut $\pm\sqrt{\ell_1}$: $(u(1)_{\varphi(\varphi_1(n))})$ converge vers cette valeur d'adhérence

②

On ré-extrait de $\left((u(2))_{\varphi(\varphi_1(n))}\right)$ une suite extraite con-
-vergente etc ... jusqu'à $\left(u(s)_{\varphi(\varphi_1(\varphi_2 \cdots (n)))}\right)$ d'où

$$\alpha = \pm \lambda_1 \sqrt{l_1} \pm \lambda_2 \sqrt{l_2} \cdots \pm \lambda_s \sqrt{l_s}$$

α ne peut donc prendre qu'au plus 2^s valeurs :

$$\sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i \lambda_i \sqrt{l_i} \quad \text{et} \quad \varepsilon_i \in \{-1, 1\}$$

Enfin v est bornée comme combinaison linéaire (s indépendant de n) de suite bornée

Csq vect(A) $\subset F$ avec

$F = \{ v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, v bornée et v n'ayant qu'un nombre fini de valeur d'adhérence $\}$

Montrons par récurrence l'inclusion inverse :

H_p : "$\forall v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, bornée ayant au plus p val. d'adh, $v \in$ vect(A)"

$p = 1$, si v est bornée et ayant au plus 1 val. d'adh. alors il est classique (avec B.W.) que v converge d'où v^2 converge et $v \in A \subset$ vect(A). Donc H_1 vraie

Supposons H_p vraie. Soit $v \in \mathbb{R}^{p+1}$, bornée, ayant au plus $p+1$ val. d'adh.. Si elle en a au plus p alors, grâce à H_p, $v \in \mathrm{vect}(A)$. Supposons qu'elle en ait exactement $p+1$. Soit $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{p+1}$ ses val. d'adh. "Ramenons" (α_1, α_2) à $(-1, 1)$:

posons $u(0)\,(\in A)$ la suite constante égale à $\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$, alors

$v' = \dfrac{1}{\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}}\,(v - u(0))$ admet comme valeur d'adhérence :

$$-1 < 1 < \alpha'_3 < \cdots < \alpha'_{p+1} \qquad \text{avec } \alpha'_i = \frac{1}{\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}}\left(\alpha_i - \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)$$

Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que $-1+\varepsilon_0 < 1-\varepsilon_0 < 1+\varepsilon_0 < \alpha'_3 - \varepsilon_0 < \quad < \alpha'_p + \varepsilon_0 < \alpha'_{p+1} - \varepsilon_0$

(on prend $0 < \varepsilon_0 < \min\left(\frac{2}{2}, \frac{\alpha'_3 - 1}{2}, \ldots, \frac{\alpha'_{p+1} - \alpha'_p}{2}\right)$)

Considérons $X = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid v'_n \notin \bigcup_{i=1}^{p+1} [\alpha'_i - \varepsilon_0, \alpha'_i + \varepsilon_0] \right\}$. On a

X qui est fini sinon $X = \{n_1 < n_2 < \cdots\}$ et $(v'_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ serait bornée donc admettrait une val. d'adhérence, d'où v' admettrait une valeur d'adhérence différente de $-1, 1, \ldots \alpha'_{p+1}$: Absurde. Posons $N_0 = \max X + 1$, on a :

$\forall n \geqslant N_0 \quad v'_n \in \bigcup_{i=1}^{p+1} [\alpha'_i - \varepsilon_0, \alpha'_i + \varepsilon_0]$ et comme α'_i est

valeur d'adhérence de v', $J_i = \{ n \geqslant N_0 \setminus |v'_n - \alpha'_{i_0}| \leqslant \varepsilon_0 \}$ infini

D'où $\exists \varphi_i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ st croissante telle que $J_i = \varphi_i(\mathbb{N})$

En résumé, $\forall i \in [\![1, p+1]\!]$: $\lim\limits_{n \to \infty} v'_{\varphi_i(n)} = \alpha'_i$ et de plus

$$\bigcup_{i=1}^{p+1} \varphi_i(\mathbb{N}) = [\![N_0, +\infty [\![$$

Considérons la suite $u(1)$ définie par $u(1)_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \in \varphi_1(\mathbb{N}) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

On a $u(1)_n^2 = 1$ donc $\underline{u(1) \in A}$

et posons $v'' = v' - u(1)$, $v''_{\varphi_1(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, $v''_{\varphi_2(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

et $\forall i \geqslant 3 \quad v''_{\varphi_i(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha'_i - 1$ et réciproquement, il est clair que si γ est une valeur d'adhérence de v'' :

$\exists \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ str $\nearrow \setminus \gamma = \lim v''_{\psi(n)}$; si $\psi(\mathbb{N}) \cap \varphi_1(\mathbb{N})$ infini on a $\psi(\mathbb{N}) \cap \varphi_1(\mathbb{N}) = \varphi_1(\mathbb{N})$ et $\gamma = \lim v''_{\psi(n)} = -1 - (-1) = 0$

sinon $\psi(\mathbb{N}) \cap \varphi_1(\mathbb{N})$ fini : $\forall n$ assez grand $\left| \begin{array}{l} v''_{\psi(n)} = v'_{\psi(n)} - 1 \\ v'_{\psi(n)} \notin [\alpha'_1 - \varepsilon_0, \alpha'_1 + \varepsilon_0] \end{array} \right.$

d'où $\gamma = \alpha'_i - 1 \in \{ 0, \alpha'_3 - 1, \dots, \alpha'_{p+1} - 1 \}$

En conséquence : v'' est bornée et admet p valeurs d'adhérence : $0, \alpha'_3 - 1, \dots, \alpha'_{p+1} - 1$. Par H_p : $v'' \in \mathrm{Vect}(A)$

Or $v' = v'' + u(1)$ et $v = \lambda v' + u(0)$ avec $\lambda = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \in \mathbb{R}$ ⑤

donc $v = \lambda v'' + \lambda u(1) + u(0)$ et $v'' \in \text{vect}(A)$ et

$(u(1), u(0)) \in A^2$ on en déduit que $v \in \text{vect}(A)$: H_{p+1} vraie

d $\boxed{\text{vect}(A) = \{ v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ bornée et n'ayant qu'un nb fini de val. d'adh.} \}}$

2) * Si $fg - gf = Id_E$ et $\dim E = n \geq 1$, alors matriciellement

ds $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $AB - BA = I_n$ d'où $Tr(AB - BA) = Tr(I_n)$

Or $Tr(AB - BA) = Tr(AB) - Tr(BA) = 0$ et $Tr(I_n) = n \neq 0$

d $\boxed{\text{Si } \dim E = n \geq 1 \quad \{(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2 \mid fg - gf = Id_E\} = \emptyset}$

* Prenons $E = \mathbb{R}[X]$, construisons $f, g \mid fg - gf = Id_E$

en cherchant des valeurs de $f(X^i)$ et $g(X^i)$.

Pour $i = 0$: $fg(1) - gf(1) = 1$

Essayons avec $\underline{f(1) = 0}$, il faut donc $fg(1) = 1$

Si $g(1) \in \text{vect}(1)$, on aurait $fg(1) = f(\lambda 1) = 0 \neq$, il faut

donc prendre $g(1) \notin \text{vect}(1)$. Essayons $\underline{g(1) = X}$

d'où $fg(1) = 1 \iff \underline{f(X) = 1}$

passons à $i=1$ $\quad fg(X)-gf(X)=X \iff fg(X)-g(1)=X$ ⑥

$\iff fg(X)=X+g(1)=2X$

idem $g(X)\notin \mathrm{vect}(1,X)$, choisissons $\underline{g(X)=X^2}$ d'où $f(X^2)=2X$

etc...

<u>Synthèse</u> : posons f l'unique endomorphisme de E tel que :

$\forall i\in\mathbb{N}$ $f(X^i)=iX^{i-1}$ (0 pour $i=0$) et g tel que :

$\forall i\in\mathbb{N}$ $g(X^i)=X^{i+1}$, on a :

$\forall i\in\mathbb{N}$ $fg(X^i)-gf(X^i)=f(X^{i+1})-g(iX^{i-1})=(i+1)X^i-iX^i$

$=X^i$

d'où $fg-gf$ et id_E coïncide sur la base $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ donc

ils sont égaux : cl : $\boxed{fg-gf=id_E}$

<u>Remarques</u> : * $f(P)=P'$ et $g(P)=XP$

* $\forall h\in\mathcal{L}(E)\setminus h\circ g=g\circ h$, $(f+h)g-g(f+h)=Id_E$

donc $\{(f,g)\setminus fg-gf=Id_E\}$ infini

3)

$\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $A = PBP^{-1}$

ce qui est équivalent à $\begin{cases} AP = PB \\ \det P \neq 0 \end{cases}$

posons $P = Q + iR$ avec $(Q, R) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$

$AP = PB \iff A(Q+iR) = (Q+iR)B$

$\iff AQ = QB$ et $AR = RB$

Considérons $P_\lambda = Q + \lambda R$, on a $\forall \lambda \in \mathbb{C} : AP_\lambda = P_\lambda B$

cherchons $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $\det P_\lambda \neq 0$

Posons $f(\lambda) = \det(P_\lambda)$ f est polynomiale et $f(i) = P \neq 0$

donc f n'admet qu'un nb fini de racines : $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ |

$f(\lambda_0) \neq 0$ d'où : $\boxed{A = P_{\lambda_0} B P_{\lambda_0}^{-1} \text{ et } P_{\lambda_0} \in GL_n(\mathbb{R})}$

$\boxed{\text{Exercice 4}^*}$

1. * Soit $(u(p))_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de A qui converge vers $v\in E$

Montrons que $v\in A$:

$\forall n\in\mathbb{N}, \forall p\in\mathbb{N} \quad u(p)_n \leq u(p)_{n+1} \quad (*)$

<u>Lemme fondamental</u> ②

si $(x(p))_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de E converge vers y

alors $\forall n\in\mathbb{N}$ $x(p)_n \xrightarrow[p\to\infty]{} y_n$

<u>dém.</u> $|x(p)_n - y_n| \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} |x(p)_m - y_m| = \|x(p)-y\| \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$

Donc ds $(*)$, qd $p\to\infty$, il vient :

$v_n \leq v_{n+1}$ et v croissante

<u>csq</u> <u>A fermé</u>

* La suite nulle $(0)\in A$. Or $\forall r>0$ la suite

$u(r) = (r, -r, r, -r, \dots) \in B_F((0), r)$ et $u(r)\notin A$

donc $(0)\notin \mathring{A}$

<u>cl</u> $\boxed{\text{A fermé, non ouvert.}}$ et $\mathring{A} = \{u \text{ st } \nearrow\}$

2.* Montrons que B est fermé

Soit $u(p) \xrightarrow[p\to\infty]{} v$ avec $u(p)\in B$

<u>soit $\varepsilon>0$</u>

$\exists P_0 \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq P_0 \quad \|u(p) - v\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (3)

donc $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|v_n| = |v_n - u(P_0)_n + u(P_0)_n|$$
$$\leq |v_n - u(P_0)_n| + |u(P_0)_n|$$
$$\leq \|u(P_0) - v\| + |u(P_0)_n|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + |u(P_0)_n|$$

or $u(P_0) \in B$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \quad |u(P_0)_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

d'où $\forall n \geq n_0$; $|v_n| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$; $v \in B$

csq <u>B est fermé.</u>

* $\forall u \in B \ \forall r > 0 \quad u + (r) \in B_F(u, r)$ et $\lim_{n \to \infty} u + (r) = r \neq 0$
suite constante $= r$

<u>cl</u> $\boxed{B \text{ fermé non ouvert } (\mathring{B} = \emptyset)}$

3.* Soit $u(p) \xrightarrow[p \to \infty]{} v$ avec $u(p) \in C$

posons $\forall p \in \mathbb{N}$ $\ell_p = \lim_{n\to\infty} u(p)_n \in \mathbb{R}$ (4)

Montrons que (ℓ_p) est de Cauchy : car $(u(p))_{p\in\mathbb{N}}$ de Cauchy car cvg.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \mid \forall p, q \geq N$ $\|u(p) - u(q)\| \leq \varepsilon$. Donc

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall p, q \geq N$: $|u(p)_n - u(q)_n| \leq \varepsilon$

puis $n \to \infty$: $|\ell_p - \ell_q| \leq \varepsilon$; (ℓ_p) est de Cauchy.

Donc $(\ell_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge ds $\mathbb{R}$ (complet) vers $L \in \mathbb{R}$

Voir une autre démonstration (sans Cauchy) en fin de DM

Considérons $u'(p) = u(p) - (\ell_p)$ (donc $u'(p)_n = u(p)_n - \ell_p$)

On a $\|(\ell_p) - (L)\| = |\ell_p - L| \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$ donc par TG,

$u'(p) \xrightarrow[p\to\infty]{} v - (L)$

Or $u'(p)_n = u(p)_n - \ell_p \xrightarrow[n\to\infty]{TG} \ell_p - \ell_p = 0$ donc $u'(p) \in B$

et donc $\lim_{p\to\infty} u'(p) = v - (L) \in \bar{B} = B$ soit ;

$\lim_{n\to\infty}(v_n - L) = 0$ d'où $\lim_{n\to\infty} v_n = L$: $v \in C$

csq $\boxed{C \text{ fermé}}$

* $\forall u \in C \quad \forall r > 0 \quad u + ((-1)^n r) \in B_F(u, r)$ et

la suite $(u_n + (-1)^n r)$ diverge donc $\mathring{C} = \phi$

cl $\boxed{C \text{ fermé non ouvert } (\mathring{C} = \phi)}$

4) * soit $u(p) \xrightarrow[p \to \infty]{} v$, avec $u(p) \in D$

Montrons que 0 est val. d'adhérence à v :

$\underline{\forall \varepsilon > 0}$, $\underline{\forall N \in \mathbb{N}}$.

tout d'abord $\exists P_0 \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq P_0 \quad \| u(p) - v \| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u(P_0)_n - v_n| \leq \varepsilon/2$

Or 0 est valeur d'adhérence de $u(P_0)$ donc $\underline{\exists n_0 \geq N}$

tel que $|u(P_0)_{n_0}| \leq \varepsilon/2$ donc $|v_{n_0}| \leq |u(P_0)_{n_0} - v_{n_0}| + |u(P_0)_{n_0}|$

d'où $\underline{|v_{n_0}| \leq \varepsilon}$; 0 est donc val. d'adh. de v

cl $\boxed{D \text{ fermé}}$

* $(0) \in D$ et $\forall r > 0 \quad (0) + (r) \in B_F((0), r) \cap (E - D)$: $0 \notin \mathring{D}$

6

cl. $\boxed{\mathcal{D} \text{ fermé non ouvert. } (\mathring{\mathcal{D}} = \phi)}$

à voir!?

5) * Soit $u(p) = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{p+1}, 0, 0, \ldots\right)$

Donc $u(p)_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \leq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Posons $v = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, on a $\|u(p) - v\| = \frac{1}{p+2} \xrightarrow[p \to \infty]{} 0$

Donc $u(p) \xrightarrow[p \to \infty]{} v$ or $\forall p \in \mathbb{N}$ $u(p) \in F$ et $v \notin F$

d'où $v \in \bar{F}$ & $v \notin F$: F non fermé mais $\bar{F} = B$

* Comme $F \subset B$, $\mathring{F} \subset \mathring{B} = \phi$ d'où $\mathring{F} = \phi$

cl $\boxed{F \text{ ni ouvert ni fermé}}$

Fin DM (exo 4*)

6) L'idée est que si $u(p) \xrightarrow[p \to \infty]{} v$ et $u(p)$ est périodique de période T_p avec $T_p \xrightarrow[p \to \infty]{} +\infty$ alors v non périodique.

Soit ; $u(0) = (0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ période : 1

$u(1) = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \ldots\right)$ — : 2

$u(2) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, \ldots\right)$ — 4

$u(3) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$ — : 8 ...

Mines 2009 - MP2

1) Soit $\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \end{cases}$ 2 à 2. Quitte à les renuméroter, on peut supposer $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_{\lambda_i} = 0$

Donc $\forall x \in [0,1] \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{\lambda_i} = 0$

Supposons qu'il existe $i \mid \alpha_i \neq 0$. Soit i_0 le 1er.

On a donc $\sum_{i=i_0}^n \alpha_i x^{\lambda_i} = 0$. Pour $x \in]0,1]$ divisons par $x^{\lambda_{i_0}}$: $\alpha_{i_0} + \sum_{i=i_0+1}^n \alpha_i x^{\lambda_i - \lambda_{i_0}} = 0$ et $\lambda_i - \lambda_{i_0} > 0$

Faisons tendre x vers 0 : $x \xrightarrow{>} 0$ il reste $\alpha_{i_0} = 0$ absurde

cl : $\boxed{(\phi_\lambda)_{\lambda \geq 0} \text{ famille libre}}$

2) Considérons $D'_n = \begin{vmatrix} 1/a_1+b_1 & \dots & 1/a_1+b_{n-1} & \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{a_1+b_k} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1/a_n+b_1 & \dots & 1/a_n+b_{n-1} & \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{a_n+b_k} \end{vmatrix}$

Comme la n-ième colonne est égale à ②

$$\begin{pmatrix} \frac{A_1}{a_1+b_n} \\ \vdots \\ \frac{A_n}{a_n+b_n} \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{n-1} A_j \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_j} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_j} \end{pmatrix}$$

j-ème colonne de D'_n

on obtient (Gauss) : $\underline{D'_n = A_n D_n}$

D'autre part $D'_n = \begin{vmatrix} 1/a_1+b_1 & \cdots & 1/a_1+b_{n-1} & \overset{=0}{R_n(a_1)} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1/a_n+b_1 & \cdots & & R_n(a_n) \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1/a_1+b_1 & \cdots & 1/a_1+b_{n-1} & 0 \\ & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ & & & R_n(a_n) \end{vmatrix}$$

$= R_n(a_n) D_{n-1}$ dev. selon la n-ième colonne

d'où $\boxed{A_n D_n = R_n(a_n) D_{n-1}}$

3°) 1er cas les $b_1, \dots, b_n$ sont 2 à 2 distincts, ③

alors $$A_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(-b_n - a_k)}{\prod_{k=1}^{n-1}(-b_n + b_k)}$$ (technique standard pour la décomposition en elt simples de R ; on multiplie par $x+b_n$ puis $x=-b_n$)

d'où par récurrence :

$n=1$ $\quad D_1 = \dfrac{1}{a_1+b_1}$ $\qquad n=2$ $\quad D_2 = \begin{vmatrix} 1/a_1+b_1 & 1/a_1+b_2 \\ 1/a_2+b_1 & 1/a_2+b_2 \end{vmatrix} = \dfrac{a_2b_2+a_1b_1-a_1b_2-a_2b_1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_1+b_2)(a_2+b_1)}$

et on vérifie facilement que $$D_2 = \frac{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}{(a_1+b_1)(a_2+b_1)(a_1+b_2)(a_2+b_2)}$$

et si la formule est vraie au rg $n-1$ alors

$$D_n = \frac{R_n(a_n)}{A_n} D_{n-1} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(a_n+b_k)} \times \underbrace{\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(b_k-b_n)}{\prod_{k=1}^{n-1}(-b_n-a_k)}}_{= \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(b_n-b_k)}{\prod_{k=1}^{n-1}(a_n+a_k)}} \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n-1} \cdots}{\prod_{\substack{1\leq i\leq n-1\\ 1\leq j\leq n-1}}(a_i+b_j)}$$

$$= \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}(a_i+b_j)}$$

donc vraie pour n.

(4)

2ème cas : si $b_1, \dots, b_n$ non 2 à 2 $\neq 0$ alors $D_n = 0$ car il y a 2 colonnes identiques et la formule est vraie $\left(\prod_{i<j} (b_j - b_i) = 0 \right)$

cl $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad D_n = \dfrac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (a_i + b_j)}}$

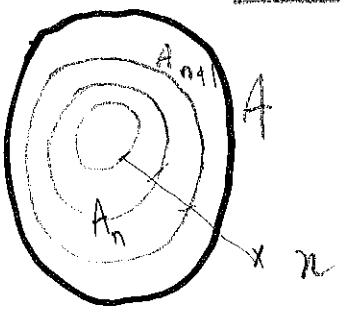
4) $\Rightarrow]$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \setminus \|x - a\| < 0 + \varepsilon$ (caract. de l'inf)

donc $\exists a \in A \cap B_F(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ et $x \in \overline{A}$

$\Leftarrow]$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \cap B_F(x, \varepsilon)$ donc $\|x - a\| \leq \varepsilon$

comme $\forall y \in A \quad \|x - y\| \geq 0$, $0 = \inf_{y \in A} \|x - y\| = d(x, A)$

cl $\boxed{d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}}$

5) 

* $\forall n \in \mathbb{N}^* \; A_n \subset A$ donc $\underline{d(x, A_n) \geq d(x, A)}$

* $A_n \subset A_{n+1}$ donc $\underline{d(x, A_n) \geq d(x, A_{n+1})}$

* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \ | \ \|x - a\| < d(x, A) + \varepsilon$

Or $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ | \ a \in A_{n_0}$ d'où $d(x, A_{n_0}) \leq \|x - a\| < d(x, A) + \varepsilon$

et $\forall n \geq N \quad \underline{d(x, A)} \leq \underline{d(x, A_n)} \leq d(x, A_{n_0}) < \underline{d(x, A) + \varepsilon}$

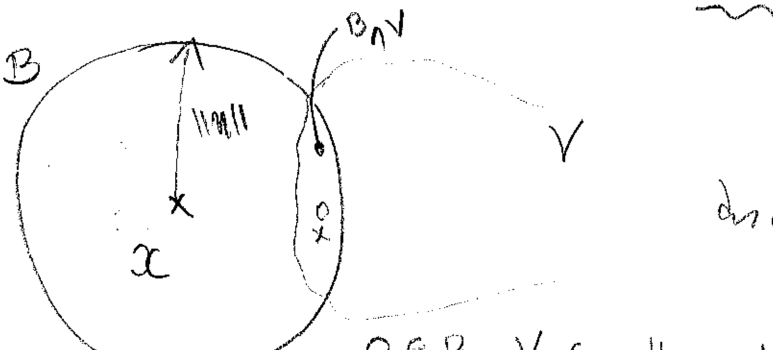
$\underline{d}$ $\boxed{\lim_{n \to \infty} d(x, A_n) = d(x, A)}$

6) Montrons que V est fermé. Comme V est de dimension finie ~~c'est un Banach donc une partie complète~~

~~$V \subset E$~~ donc fermé (voir le cours)

D'où $B \cap V$ intersection de fermé est fermé et inclus dans $B = B_F(x, \|x\|)$ donc borné d'où $\boxed{B \cap V \text{ compacte}}$ dans V (et donc dans E) car V de dimension finie.

revoir la déf. de compact



$B \cap V \neq \emptyset$ car $0 \in B \cap V$

$B \cap V \subset V$

donc $\underline{d(x, B \cap V) \geq d(x, V)}$

$0 \in B \cap V$ car $\|0 - x\| \leq \|x\|$ et V e.v.

Posons $\alpha = d(x, V \cap B)$. Montrons que $d(x, V) = \alpha$ ⑥

* $\forall y \in V$, si $y \in B$ $\|x - y\| \geq \alpha$ $\qquad 0 \in V \cap B$

si $y \notin B$: $\|y - x\| \geq \|x\| = \|x - 0\| \geq \alpha$

donc α minore $\{\|x-y\|, y \in V\}$

* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y_0 \in V \cap B \subset V \setminus \|x - y_0\| < \alpha + \varepsilon$

On a donc par la caractérisation de la borne inférieure : $\alpha = \inf\{\|x-y\|, y \in V\}$

d'où : $\boxed{d(x, V) = d(x, V \cap B)}$

7) Soit $f : B \cap V \longrightarrow \mathbb{R}$

$y \longmapsto \|x - y\|$

On a f C^0 sur $\underbrace{B \cap V}_{\text{compact}}$ d'où f est bornée et atteint ses bornes : $\exists y \in B \cap V \subset V \setminus$

$f(y) = \inf\{f(z), z \in B \cap V\} = d(x, V \cap B) = d(x, V)$

d'où : $\boxed{d(x, V) = \|x - y\|}$

Pour les 5/2 :

8) C'est du cours $y = p_F(x)$ voir th. fonda. p. $V \oplus V^\perp = E$...

Pour les 3/2 : voir page 21

9) Si $(x_1, \dots, x_n)$ liée $\exists i \in [\![1, n]\!] \mid x_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j$ d'où

Colonne i : $C_i = \begin{pmatrix} (x_1 | x_i) \\ \vdots \\ (x_n | x_i) \end{pmatrix} = \sum_{j \neq i} \lambda_j \begin{pmatrix} (x_1 | x_j) \\ \vdots \\ (x_n | x_j) \end{pmatrix} = \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$

donc C_i comb. linéaire des autres colonnes : déterminant nul

donc $\underline{G(x_1, \dots, x_n) = 0}$

réciproquement : Si $G(x_1, \dots, x_n) = 0$. En interprétant ce déterminant comme le déterminant de n colonnes, ces n colonnes sont liées donc $\exists i \in [\![1, n]\!] \mid C_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$

d'où $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $(x_k | x_i) = \sum_{j \neq i} \lambda_j (x_k | x_j) = (x_k | \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j)$

supposons $(x_1, \dots, x_n)$ libre, c'est donc une base de

$V = \mathrm{vect}(x_1, \dots, x_n)$, d'où on a :

$\forall h \in [\![1, n]\!] \quad \left(x_h \mid x_i - \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j\right) = 0$

et donc (base) $\forall x \in V \quad \left(x \mid x_i - \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j\right) = 0$

d'où $x_i - \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j \in V \cap V^\perp = \{0\}$ donc $x_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j$: Absurde car $(x_1, \dots, x_n)$ libre

csq $(x_1, \dots, x_n)$ liée cl : $\boxed{G = 0 \iff \text{liée}}$

10) 1er cas : $x \in V$ alors $d(x, V) = 0$ et comme x est C.L de $(x_1, \dots, x_n)$, $G(x_1, \dots, x_n, x) = 0$ donc la formule est vérifiée.

[9°)

2ème cas : $x \notin V$. Par le th. fonda. on a $V \oplus V^\perp = E$

Posons $x = y + z$ avec $y \in V$ et $z \in V^\perp$. On a alors

$d(x, V)^2 = \|x - y\|^2 = \|z\|^2 = (z \mid z)$

D'autre part $G(x_1, \dots, x_n, x) = G(x_1, \dots, x_n, y + z)$

comme $(x_i \mid z) = 0$ et $y \perp z$ on a donc :

⑨

$$G(x_1,\dots,x_n,x) = \begin{vmatrix} (x_1|x_1) & \cdots & (x_1|x_n) & (x_1|y) \\ \vdots & & & \vdots \\ (x_n|x_1) & \cdots & (x_n|x_n) & (x_n|y) \\ (y|x_1) & \cdots & (y|x_n) & \|y\|^2+\|z\|^2 \end{vmatrix}$$

effectuons des operations sur les colonnes pour faire disparaître en bas à droite $\|y\|^2$:

$y \in V$ donc $y = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$ et donc $\underline{\|y\|^2 = \sum_{j=1}^n \alpha_j (y|x_j)}$

donc effectuons $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} - \sum_{j=1}^n \alpha_j C_j$ on obtient :

$$G(x_1,\dots,x_n,x) = \begin{vmatrix} (x_1|x_1) & \cdots & (x_1|x_n) & (x_1|y) - \sum_{j=1}^n \alpha_j (x_1|x_j) \\ & & & \vdots \\ (y|x_1) & \cdots & (y|x_n) & \|z\|^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (x_1|x_1) & \cdots & (x_1|x_n) & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ (x_n|x_1) & \cdots & (x_n|x_n) & 0 \\ (y|x_1) & \cdots & (y|x_n) & \|z\|^2 \end{vmatrix}$$

$= \|z\|^2 \, G(x_1,\dots,x_n)$ d.r. dernière colonne d' ; $\boxed{d(x,V)^2 = \|z\|^2 = \dfrac{G(x_1,\dots,x_n,x)}{G(x_1,\dots,x_n)}}$

11) $N_2(f) = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\,dt} \leq \sqrt{N_\infty(f)^2 \times 1} \leq N_\infty(f)$

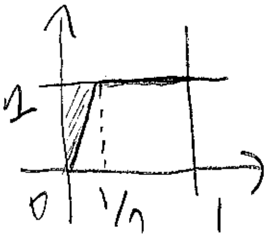
$\int_a^b g \leq (b-a)\sup g$

Soit $f \in \overline{A}^\infty$ donc $\exists (f_n)$ suite de A | $N_\infty(f_n - f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

d'où $0 \leq N_2(f_n - f) \leq N_\infty(f_n - f)$, par th. d'encadrement :

$n\to\infty$ $\quad N_2(f_n - f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

donc $f \in \overline{A}^2$ d' : $\boxed{\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2}$

12) 

Soit $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \geq \frac{1}{n} \longmapsto 1$

$0 \leq x \leq \frac{1}{n} \longmapsto nx$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $f_n \in V_0$ et $N_2(f_n - \phi_0)^2 = \int_0^{1/n} (nt-1)^2\,dt = \left[\frac{(nt-1)^3}{3n}\right]_0^{1/n}$

$= \frac{1}{3n}$

donc $N_2(f_n - \phi_0) = \sqrt{\frac{1}{3n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

d' ; $\boxed{\phi_0 \in \overline{V_0}^2}$

13) * $\forall f \in C([0,1])$ posons $g_n = f_n \times f$ avec f_n du 12').

On a $N_2(f - g_n)^2 = \int_0^1 |f(t)(1-f_n(t))|^2 dt$

$$\leq N_\infty(f)^2 N_2(\phi_0 - f_n)^2$$

donc $0 \leq N_2(f - g_n) \leq N_\infty(f) N_2(\phi_0 - f_n)$ $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

d'où $N_2(f - g_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et comme $g_n \in V_0$ on a $f \in \overline{V_0}^2$

cl : $\boxed{\overline{V_0}^2 = C([0,1])}$

* Si $f \in \overline{V_0}^\infty$, $\exists h_n \in V_0 \setminus N_\infty(f - h_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

or $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq |f(0) - h_n(0)| = |f(0)| \leq N_\infty(f - h_n)$ $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

donc $f(0) = 0$ d'où $f \in V_0$ et donc $\overline{V_0}^\infty \subset V_0 \subsetneq C([0,1])$

cl : $\boxed{V_0 \text{ non dense ds } C([0,1]) \text{ pour } N_\infty}$

14) on $0 \in V \subset \overline{V}$ donc $\overline{V} \neq \emptyset$ Notons N la norme sur l'evn E

si $(f,g) \in \overline{V}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$\exists f_n \in V \mid N(f_n - f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\exists g_n \in V \mid N(g_n - g) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

d'où TG $N(\lambda f_n + g_n - (\lambda f + g)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

donc $\lambda f + g \in \overline{V}$ d'où $\boxed{\overline{V} \text{ sev de } E}$

15) $\Rightarrow]$ $\overline{V}^{\infty} = C([0,1])$, comme $\phi_m \in C([0,1])$, on a $\phi_m \in \overline{V}^{\infty}$

$\Leftarrow]$ Soit $f \in C([0,1])$, par le théorème de Stone-Weierstrass

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathbb{R}[X] \mid N_\infty(f - P) \leq \varepsilon$. P est combinaison linéaire des $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ donc $P \in \overline{V}^{\infty}$ (sev cf 14)) d'où

$\forall \varepsilon > 0$ $B_F(f, \varepsilon) \cap \overline{V}^{\infty} \neq \emptyset$ d'où $f \in \overline{\overline{V}^{\infty}} = \overline{V}^{\infty}$ (car $\overline{V}$ fermé)

donc $C([0,1]) \subset \overline{V}^{\infty}$, comme $\overline{V}^{\infty} \subset C([0,1])$

on conclut $\boxed{V \text{ dense pour } N_\infty \iff \forall n \in \mathbb{N}\ \phi_n \in \overline{V}^\infty}$

16) $\Rightarrow$] idem $\overline{V}^2 = C([0,1]) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \phi_n \in \overline{V}^2$

$\Leftarrow$] On fait la m̂ chose qu'au 15) $\forall \varepsilon > 0\ \forall f \in C^0([0,1])\ \exists P \in \mathbb{R}(X) \mid$

$N_2(f-P) \underbrace{\leq}_{\text{c'est le 11)}} N_\infty(f-P) \leq \varepsilon$ - - -

cl° ; $\boxed{V \text{ dense pour } N_2 \iff \forall n \in \mathbb{N}\ \phi_n \in \overline{V}^2}$

17) $\Rightarrow$] Si $\overline{W}^2 = C([0,1])$, on a $\underline{\forall k \in \mathbb{N}}\ \phi_k \in \overline{W}^2$

$\xrightarrow{\text{donc}} d(\phi_k, W) = 0$, Or (W_n) suite croissante de partie et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n = W$ donc avec le 5) :

$\underline{0} = d(\phi_k, W) = \underline{\lim_{n \to +\infty} d(\phi_k, W_n)}$

$\Leftarrow$] On a $\forall k \in \mathbb{N}\ d(\phi_k, W) \overset{\text{l'idem}}{=} 0$ donc $\phi_k \in \overline{W}^2$

et d'après le 16) on a $\underline{W \text{ dense de } C([0,1])}$

cl : $\boxed{\overline{W}^2 = C([0,1]) \iff \forall k \in \mathbb{N}\ \lim d(\phi_k, W_n) = 0}$

18) Utilisons le 10°) car la norme sur W_n est euclidienne (14)

$$d(\phi_\mu, W_n)^2 = \frac{G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu)}{G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n})}$$ car $(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n})$ base de W_n

Or $\forall \alpha, \beta \geqslant 0 \quad (\phi_\alpha | \phi_\beta) = \int_0^1 t^\alpha t^\beta dt = \frac{1}{\alpha+\beta+1}$ donc

$$G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_0+\lambda_0+1} & \dots & \frac{1}{\lambda_0+\lambda_n+1} \\ \vdots & & \\ \frac{1}{\lambda_n+\lambda_0+1} & \dots & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_n+1} \end{vmatrix} \quad \begin{cases} a_i = \lambda_i \\ b_i = \lambda_i + 1 \end{cases}$$

$$= \frac{\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)^2}{\prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} (\lambda_i + \lambda_j + 1)}$$ [avec le 3°)]

avec $\begin{cases} a_{n+1} = \mu \\ b_{n+1} = \mu + 1 \end{cases}$

De m̂ on a $$G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu) = \frac{\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n+1} (\lambda_j - \lambda_i)^2}{\prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n+1 \\ 0 \leqslant j \leqslant n+1}} (\lambda_i + \lambda_j + 1)}$$

d'où $$d(\phi_\mu, W_n)^2 = \frac{\prod_{i=0}^{n} (\lambda_{n+1} - \lambda_i)^2}{\prod_{i=0}^{n} (\lambda_i + \lambda_{n+1} + 1) \times \prod_{j=0}^{n} (\lambda_j + \lambda_{n+1} + 1) \times (2\lambda_{n+1} + 1)}$$

donc on a :

$$d(\phi_p, W_n)^2 = \prod_{i=0}^{n} \left(\frac{p-\lambda_i}{\lambda_i+p+1}\right)^2 \times \frac{1}{(2p+1)}$$

d' ; $$\boxed{d(\phi_p, W) = \frac{1}{\sqrt{2p+1}} \prod_{k=0}^{n} \left|\frac{p-\lambda_k}{\lambda_k+p+1}\right|}$$

19) Etudions les variations demandées ;

Posons $f(x) = \dfrac{p-x}{x+p+1}$, $f'(x) = \dfrac{-2p-1}{(x+p+1)^2} \leq 0$

d'où

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & & p \\ \hline f & \frac{p}{p+1} & \searrow & 0 \end{array}$$

Si $\lambda_k \longrightarrow +\infty$ alors $u_k = \dfrac{|\lambda_k - p|}{\lambda_k+p+1} \sim \dfrac{|1-p/\lambda_k|}{1+p/\lambda_k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$

Réciproquement si $u_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$

si $\lambda_k \leq p$ alors $u_k = \dfrac{p-\lambda_k}{\lambda_k+p+1} \leq \dfrac{p}{p+1} < 1$

$p/(p+1)$ $\quad 1-\varepsilon \quad 1$

pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2(p+1)}$ $\exists N \mid \forall k \geq N$ $u_k \geq 1-\varepsilon > \dfrac{p}{p+1}$

d'où $\forall h \geq N \quad u_h = \dfrac{\lambda_h - \mu}{\lambda_h + \mu + 1} = \dfrac{\lambda_h + \mu + 1 - 2\mu - 1}{\lambda_h + \mu + 1}$

$$= 1 - \frac{2\mu+1}{\lambda_h + \mu + 1}$$

donc $u_h \longrightarrow 1 \overset{TG}{\Longrightarrow} \dfrac{2\mu+1}{\lambda_h+\mu+1} \xrightarrow[h\to\infty]{} 0 \overset{TG}{\Longrightarrow} \lambda_h + \mu + 1 \xrightarrow{TG} \infty$

$$\overset{TG}{\Longrightarrow} \lambda_h \longrightarrow +\infty$$

d' $\boxed{u_h \xrightarrow[h\to\infty]{} 1 \iff \lambda_h \xrightarrow[+\infty]{} +\infty}$

20) $\Rightarrow$] on a W dense donc avec le 17 & 18) on a :

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} = 0 \text{ donc } \lim_{n\to\infty} \ln \prod_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k+\mu+1} = -\infty$$

Soit $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x_k = -\infty$ avec $x_k = \ln\left(\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)$

<u>Supposons que</u> $\left(\sum \frac{1}{\lambda_k}\right)$ <u>cvg</u> donc $\frac{1}{\lambda_k} \to 0$ d'où

$$x_k = \ln\left(\frac{|1 - \mu/\lambda_k|}{1 + \frac{\mu+1}{\lambda_k}}\right) = \ln(1 - \underbrace{\mu/\lambda_k}_{<1 \text{ pour } k \text{ assez gd}}) - \ln\left(1 + \frac{\mu+1}{\lambda_k}\right)$$

donc $x_k = \frac{-\mu}{\lambda_k} - \frac{\mu+1}{\lambda_k} + o\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)$

$$\underset{k\to\infty}{\sim} \frac{-2\mu-1}{\lambda_k} \leq 0 \quad \text{et} \quad \left(\sum \frac{1}{\lambda_k}\right) \text{cvg}$$

d'où par TC $(\sum x_k)$ cvg donc $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x_k = \ell \in \mathbb{R}$ ← car $\ell \neq -\infty$

donc $\underline{\left(\sum \frac{1}{\lambda_k}\right) \text{drg}}$

$\Leftarrow$] On a $\left(\sum \frac{1}{\lambda_k}\right)$ drg.

Supposons que W non dense alors $\exists \mu \in \mathbb{N} \setminus$

$\lim\limits_{n\to\infty} d(\phi_\mu, W_n) \neq 0$

Or la suite $(d(\phi_\mu, W_n))$ est $\searrow$ donc converge vers un réel ℓ et donc $\ell \neq 0$.

d'où $\frac{d(\phi_\mu, W_n)}{d(\phi_\mu, W_{n-1})} = \frac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} \xrightarrow[n\to\infty]{TG} \frac{\ell}{\ell} = 1$

d'où, avec la 19), $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ soit $\frac{1}{\lambda_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Avec les notations du sens direct ($\Rightarrow$]) on a :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k = \ell' \in \mathbb{R} \quad (\ell' = \ln(\sqrt{2p+1} \times \ell))$$

Or $x_k \sim \frac{-2p-1}{\lambda_k} \leq 0$ donc par TC $\left(\sum \frac{1}{\lambda_k}\right)$ cvg : Absurde

cqfd W dense d'où $\boxed{W \text{ dense pour } N_2 \iff \left(\sum \frac{1}{\lambda_k}\right) \text{ dvg}}$

21) Si $\overline{W^\infty} = C([0,1])$ comme $\overline{W^\infty} \subset \overline{W^2} \subset C([0,1])$, (c'est le 11)

on a W dense pour N_2 donc $\boxed{\left(\sum \frac{1}{\lambda_k}\right) \text{ dvg}}$ avec 20)

22) $(\phi_p - \psi)(t) = t^p - \sum_{k=0}^{n} a_k t^{\lambda_k} = f(t)$ et f dérivable car $\forall k : \lambda_k \geq 1$

donc $|f(t)| = \left|\int_0^t f'(u)\,du\right| \leq \sqrt{\int_0^1 f'(u)^2\,du}\sqrt{\int_0^1 1^2\,du}$ inégalité de Cauchy-Schwarz

donc $\forall t \in [0,1]$ $|f(t)| \leq N_2(f') = N_2\left(p\phi_{p-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k \phi_{\lambda_k - 1}\right)$

d'où $\boxed{N_\infty(\phi_p - \psi) \leq N_2\left(p\phi_{p-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k \phi_{\lambda_k-1}\right)}$

29) Utilisons le 15).

Pour $m=0$, on a $\phi_0 \in W \subset \overline{W}^\infty$

Pour $m=\mu \geq 1$, Considérons $W' = vect(\phi_{\lambda_k - 1})_{k\in\mathbb{N}^*}$

Montrons que W' est dense pour N_2 à l'aide du 20)

Comme $\forall h \geq 1$ $\frac{1}{\lambda_h - 1} \geq \frac{1}{\lambda_h} \geq 0$, par TC on a $\left(\sum \frac{1}{\lambda_h - 1}\right)$ dvg d'où W' est dense pour N_2. Donc

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \phi \in W' \mid N_2(\phi_{\mu-1} - \phi) \leq \frac{\varepsilon}{\mu}$

Posons $\phi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_{\lambda_k - 1}$ et posons $\psi = \sum_{k=1}^{n} \mu \frac{\alpha_k}{\lambda_k} \phi_k$

On a $N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leq N_2\left(\mu \phi_{\mu-1} - \sum_{k=1}^{n} \mu \alpha_k \phi_{k-1}\right) \leq \mu \frac{\varepsilon}{\mu} \leq \varepsilon$

donc $\phi_\mu \in \overline{W}^\infty$ avec le 15) $\boxed{W \text{ dense pour } N_\infty}$

24) Posons $\alpha = \inf_{h \geq 1} \lambda_h > 0$ et posons $\lambda'_k = \frac{\lambda_k}{\alpha} \geq 1$ $\forall h \geq 1$ et $\lambda'_0 = 0$

on a $\left(\sum \frac{1}{\lambda'_h}\right) = \left(\sum \frac{\alpha}{\lambda_h}\right)$ dvg donc

$W' = \mathrm{vect}\left(\phi_{\lambda_h/\alpha}\right)_{h \in \mathbb{N}}$ dense pour N_∞.

Soit $f \in C([0,1])$. Considérons $g(x) = f(x^{1/\alpha})$, on a g C^0 sur $[0,1]$ car $1/\alpha > 0$ d'où

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \phi \in W' \mid N_\infty(g-\phi) \leq \varepsilon$ donc

$\forall t \in [0,1] \quad \left| f(t^{1/\alpha}) - \sum_{k=0}^{n} a_k t^{\lambda_k/\alpha} \right| \leq \varepsilon$

$\forall x \in [0,1] \ \exists t \in [0,1] \mid x = t^{1/\alpha}$ donc

$\forall x \in [0,1] \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^{\lambda_k} \right| \leq \varepsilon$ soit :

$N_\infty(f - \psi) \leq \varepsilon$ avec $\psi = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_{\lambda_k} \in W$

d'où : $\boxed{W \text{ est dense pour } N_\infty}$

8) si $x \in V \cap V^{\perp}$ alors $(x|x) = 0$ donc $x = 0$ et $\underset{V}{F} \cap \underset{V^{\perp}}{F^{\perp}} = \{0\}$

si $x \in E$. Analyse : $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + z$ où $(e_1, \dots, e_p)$ base

OTN de V et $z \in V^{\perp}$, $\forall i_0 \in [\![1, n]\!]$ $(e_{i_0} | x) = \lambda_{i_0} + 0$

Synthèse : posons $y = \sum_{i=1}^{p} (e_i|x) e_i$ et $z = x - \sum_{i=1}^{p} (e_i|x) e_i$

On a : 1) $y \in \text{vect}(e_1, \dots, e_p) = V$.

2) $\forall j \in [\![1, p]\!]$ $(e_j | z) = (e_j | x) - (e_j | x) \times 1 = 0$

donc $z \in \{e_1, \dots, e_p\}^{\perp} = V^{\perp}$ donc $\boxed{V \oplus V^{\perp} = E}$

Soit p le projecteur sur V $/\!/^{t}$ à $V^{\perp}$.

Soit $x \in E$. Posons $y = p(x)$ et $z = x - y$. On a $x = y + z$

et $y \perp z$. $\forall a \in V$ $\|x - a\|^2 = \|y - a + z\|^2 = \|y - a\|^2 + \|z\|^2$

d'après Pythagore car $y - a \perp z$ donc $\|x - a\|^2 \geq \|z\|^2 = \|x - y\|^2$

avec égalité ssi $y = a$. Comme $y \in V$, $\underline{\underline{d(x, V) = \|x - y\|}}$

et $\underline{\underline{y \text{ est unique.}}}$

Montrons que $(\ell_p)_{p\in\mathbb{N}}$ cvg ds $\mathbb{R}$ en montrant qu'elle est bornée et n'a qu'une val. d'adhérence

* Pour $\varepsilon=1$ $\exists P \mid \forall p\geqslant P$ $\|u(p)-v\|\leqslant 1$, donc

$\forall p\geqslant P$ $\|u(p)\|\leqslant 1+\|v\|$

donc $\forall p\geqslant P$, $\forall n\in\mathbb{N}$ $|u(p)_n|\leqslant 1+\|v\|$

puis $n\to+\infty$; $|\ell_p|\leqslant 1+\|v\|$

cqs $\forall p\in\mathbb{N}$ $|\ell_p|\leqslant \mathrm{Max}(1+\|v\|, |\ell_0|, \dots, \ell_P)$

Donc $(\ell_p)_p$ bornée

* Soit $\ell_{\varphi(p)}\to\lambda$ et $\ell_{\psi(p)}\to\mu$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists P\in\mathbb{N} \mid \forall p\geqslant P$ $\|u(\varphi(p))-u(\psi(p))\|\leqslant\varepsilon$

et comme ci-dessus, $n\to\infty$ $|\ell_{\varphi(p)}-\ell_{\psi(p)}|\leqslant\varepsilon$

puis $p\to\infty$; $|\lambda-\mu|\leqslant\varepsilon$ cqs $\lambda=\mu$

d. $(\ell_p)_p$ cvg ds $\mathbb{R}$.