

DM 9 : corrigé

①

Ex 1 Posons $f(t) = \frac{1}{t^4 + 4}$ et $I = \mathbb{R}^+$

* f est continue sur I par T.G.

* En $+\infty$ $f(t) \sim \frac{1}{t^4} \geq 0$ et comme $t \mapsto \frac{1}{t^4}$ est

intégrable sur $[1, +\infty[$, par TC, $\int_0^{+\infty} f$ existe

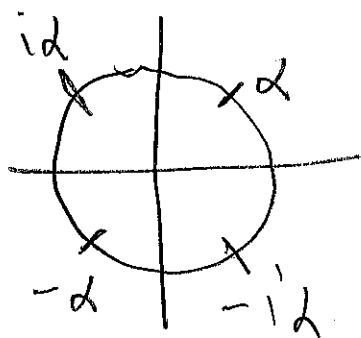
* Décomposer en elt simples $F = \frac{1}{x^4 + 4}$

- Factorisons $P = X^4 + 4$

1^{ère} méthode: recherche des racines de P :

$$z^4 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -4 = (\sqrt{2} e^{i\pi/4})^4 = (1+i)^4$$

Posons $\alpha = 1+i$, les racines de P sont $\alpha, -\alpha, i\alpha, -i\alpha$



$$\begin{aligned} \text{Donc } P &= (X - \alpha)(X + i\alpha)(X + \alpha)(X - i\alpha) \\ &= (X - (1+i))(X - (1-i))(X - (-1-i))(X - (-1+i)) \end{aligned}$$

$$\underline{P = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)}$$

2^{ème} méthode: $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$
méthode négative

$$- F = 0 + \frac{ax+b}{x^2-2x+2} + \frac{cx+d}{x^2+2x+2} \quad (2)$$

• avec $F(-x) = F(x) : -ax+b = cx+d$ soit

$$\underline{c = -a \text{ et } d = b}$$

• avec $x=0 : \frac{1}{4} = \frac{b}{2} + \frac{d}{2} = b$ soit

$$\underline{b = d = \frac{1}{4}}$$

• avec $x=1 : \frac{1}{5} = \frac{a+1/4}{1} + \frac{-a+1/4}{5}$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5}a = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{-2}{20} = -\frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{8}$$

cqs $f(t) = \frac{-t/8 + 1/4}{t^2 - 2t + 2} + \frac{t/8 + 1/4}{t^2 + 2t + 2}$

$$= \frac{1}{16} \left[\frac{-2t + 4}{t^2 - 2t + 2} + \frac{2t + 4}{t^2 + 2t + 2} \right]$$

$$= \frac{1}{16} \left[\frac{(-2t+2)+2}{t^2 - 2t + 2} + \frac{2t+2+2}{t^2 + 2t + 2} \right]$$

Donc $p(T) = \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{16} \left(\left[-\ln(t^2 - 2t + 2) \right]_0^T + 2 \int_0^T \frac{dt}{t^2 - 2t + 2} \right. \\ \left. + \left[\ln(t^2 + 2t + 2) \right]_0^T + 2 \int_0^T \frac{dt}{t^2 + 2t + 2} \right)$

$$\text{Soit } \varphi(T) = \frac{1}{16} \left(\ln \left(\frac{T^2 + 2T + 2}{T^2 - 2T + 2} \right) + \cancel{\ln 2} - \cancel{\ln 2} + 2 \int_0^T \frac{dt}{t^2 - 2t + 2} + 2 \int_0^T \frac{dt}{t^2 + 2t + 2} \right) \quad (3)$$

Comme $\frac{1}{t^2 \pm 2t + 2} \sim \frac{1}{t^2} \gg 0$, par TL et TC, tout
 $(\int)$ $(\ln)$

$$\begin{aligned} \text{Vg, d'où } J &= \int_0^{+\infty} f = \frac{1}{8} \left(\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - 2t + 2} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 2t + 2} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t-1)^2 + 1} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)^2 + 1} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(\left[\text{Arctan}(t-1) \right]_0^{+\infty} + \left[\text{Arctan}(t+1) \right]_0^{+\infty} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 4} = \frac{\pi}{8}}$$

ex. 2

①

$$a) \quad H(x) = \sqrt{a^2+1} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \sin x \right] + 2$$

$$\exists \varphi \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \end{array} \right. , \quad \text{donc}$$

$$H(x) = \sqrt{a^2+1} \cos(x - \varphi) + 2, \quad \text{d'où}$$

$$H(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+1} \cos(x - \varphi) = -2$$

$$\Leftrightarrow \cos(x - \varphi) = \frac{-2}{\sqrt{a^2+1}}$$

Cqsd $H(x) = 0$ admet des solutions ssi $\left| \frac{2}{\sqrt{a^2+1}} \right| \leq 1$

$$\text{Comme } \frac{2}{\sqrt{a^2+1}} \leq 1 \Leftrightarrow a^2+1 \geq 4 \Leftrightarrow a^2 \geq 3 \Leftrightarrow |a| \geq \sqrt{3}$$

$$\text{d'où } \boxed{a \cos x + \sin x = -2 \text{ admet des sol.} \Leftrightarrow |a| \geq \sqrt{3}}$$

b) Comme $|\sqrt{2}| < \sqrt{3}$, H ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et

donc par TG, $\frac{1}{H}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc $\underline{F \in C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$

$$u = \varphi(t) = \tan \frac{t}{2}, \quad \varphi \text{ est } C^1\text{-bijjectif de } \quad (2)$$

$$[0, \pi[\text{ vers } [0, +\infty[\quad \varphi'(t) = \frac{1/2}{1+(\varphi')^2} > 0$$

d'où le CdV est valide et $\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin t = \frac{2u}{1+u^2}$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2 du}{\sqrt{2}(1-u^2) + 2u + 2(1+u^2)} \quad \text{et } dt = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2 du}{(2-\sqrt{2})u^2 + 2u + 2 + \sqrt{2}} \quad \left(\frac{2}{2-\sqrt{2}} = \frac{2(2+\sqrt{2})}{2} \right)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2 du}{(2-\sqrt{2})u^2 + (2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})u + 2 + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{2-\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2 + (2+\sqrt{2})u + 3+2\sqrt{2}} \quad \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 3+2\sqrt{2} \right)$$

$$= \frac{2}{2-\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{\left[u + \frac{2+\sqrt{2}}{2} \right]^2 + \frac{3}{2} + \sqrt{2}} \quad \left(3+2\sqrt{2} - \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{3}{2} + \sqrt{2} \right)$$

$$= \frac{2}{2-\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}}} \left[\text{Arctan} \left(\frac{u + \frac{2+\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}}} \right) \right]_0^{+\infty} \quad = a^2 \text{ avec } a = \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{2-\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1+\sqrt{2}/2}{\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}} \right) \quad (3)$$

$$O_2 \quad \frac{1+\sqrt{2}/2}{\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}} = \frac{1+\sqrt{2}/2}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(1+\sqrt{2})^2}} = \frac{1+\sqrt{2}/2}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\text{et} \quad \frac{2}{2-\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}} = 2$$

$$d^0 \quad \boxed{I = \frac{\pi}{2}}$$

exercice 3

(2)

a) Posons $f(x, t) = \cos(n \sin t)$

* Par TG, $f(\cdot, t)$ et $\forall h \geq 1, \frac{\partial^h f}{\partial n^h}(\cdot, t): x \mapsto \sin^h t \cos(n \sin t + \frac{h\pi}{2})$
sont C^∞ sur $\mathbb{R}$,

* Par TG, $f(x, \cdot)$ et $\frac{\partial^h f}{\partial n^h}(n, \cdot)$ sont $C^\infty / [0, \pi]$ et donc
 $f(n, \cdot)$ intégrable / $[0, \pi]$ (car $[0, \pi]$ segment).

* $\forall n \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [0, \pi] \quad \forall h \geq 1 \quad \left| \frac{\partial^h f}{\partial n^h}(n, t) \right| \leq 1 = \varphi(t)$
et φ intégrable / $[0, \pi]$.

d'où : J est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad J'(x) = \int_0^\pi -\sin t \sin(x \sin t) dt$

$$J''(x) = \int_0^\pi -\sin^2 t \cos(x \sin t) dt$$

donc $J''(x) = \int_0^\pi (-1 + \cos^2 t) \cos(n \sin t) dt$

$$= -J(x) + \int_0^\pi \underbrace{\cos t}_{u} \cdot \underbrace{\cos t \cos(n \sin t)}_{v'} dt$$

soit $x \neq 0$ effectuons une i.p.p.:

$$= -J(n) + \underbrace{\left[\cos t \frac{\sin(x \sin t)}{n} \right]_0^\pi}_{=0} + \int_0^\pi \sin t \frac{\sin(n \sin t)}{n} dt \quad (3)$$

$$= -J(n) - \frac{1}{n} J'(n) \text{ donc } J \text{ vérifie sur } \mathbb{R}^*,$$

l'équation : $xy'' + y' + xy = 0$, comme $0 \cdot J''(0) + J'(0) + 0 = 0$

d, J vérifie sur $\mathbb{R}$, $xy'' + y' + ny = 0$

ex 4 a) Posons $f(t) = \frac{\sin t}{t} e^{-\lambda t}$ et $I =]0, +\infty[$ ①

1^{er} cas $\lambda = 0$, on a fait en classe la semi-cvg de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$
(à refaire le jour J)

Donc F est définie en

2^{eu} cas $\lambda > 0$, fixé

en 0 $f(t) \sim 1$ donc P.P.C. en 0 et par TC, f
est intégrable sur $]0, 1[$.

en $+\infty$ $f(t) = O(e^{-\lambda t})$ or $t \mapsto e^{-\lambda t} > 0$ est int/
($\lambda > 0$) $[0, +\infty[$

donc par TC f intégrable sur $[1, +\infty[$

d'o F est définie sur $\mathbb{R}^+$

b) Posons $f(\lambda, t) = \frac{\sin t}{t} e^{-\lambda t}$, $I =]0, +\infty[$ et $A = \mathbb{R}_+^*$

Montrons que f vérifie le théorème C' :

*) $f(\lambda, \cdot)$ c⁰/max sur I par TC et intégrable sur
 I avec la donnée a).

2) $\beta)$ $f(\cdot, t)$ est dérivable sur A par TG.

$\gamma)$ $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, t) = -\sin t e^{-\lambda t}$ et donc

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\cdot, t) \in C^0/A \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, t) \in C^0_{\text{max}} \text{ sur } I \text{ par TG.}$$

$\delta)$ HD $\forall \lambda \in [a, b] \subset A, \forall t \in]0, +\infty[$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, t) \right| \leq e^{-at} = \varphi(t) \text{ car } 0 < at \leq \lambda t \leq bt$$

$\varphi \in C^0$ et intégrable sur I (int. de référence)

Cqsd $F \text{ est } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[$

De plus $\forall \lambda > 0 \quad F'(\lambda) = -\int_0^{+\infty} \sin t e^{-\lambda t} dt$

Considérons $\int_0^{+\infty} e^{it} e^{-\lambda t} dt$, cette intégrale existe

$$\begin{aligned} \text{et } F'(\lambda) &= -\operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{it} e^{-\lambda t} dt \right) \\ &= -\operatorname{Im} \left(\left[\frac{e^{(i-\lambda)t}}{i-\lambda} \right]_0^{+\infty} \right) \end{aligned}$$

Comme $|e^{(i-\lambda)t}| = e^{-\lambda t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$,

$$F'(\lambda) = -\operatorname{Im}\left(\frac{-1}{i-\lambda}\right) = -\operatorname{Im}\left(\frac{-\lambda+i}{\lambda^2+1}\right) \quad (3)$$

$$d^0 \quad \boxed{\forall \lambda > 0 : F'(\lambda) = \frac{-1}{\lambda^2+1}}$$

c) Vu que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sinh t}{t} e^{-\lambda t} = 0$, on conjecture que $l=0$.

utilisons la cvg dominée avec le critère séquentiel;

soit (λ_n) suite de $]0, +\infty[$ | $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

$$\text{Mq } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sinh t}{t} e^{-\lambda_n t} dt = 0$$

Posons $f_n(t) = \frac{\sinh t}{t} e^{-\lambda_n t}$ et $I =]0, +\infty[$.

a) (f_n) cvg simplement vers θ sur I

b) f_n et θ sont C^1_{loc} sur I par TG.

c) comme $\lambda_n \rightarrow +\infty$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : \lambda_n \geq 1$

Posons $m = \min(\lambda_0, \dots, \lambda_{n_0}, 1)$, on a :

$m > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda_n \geq m$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I : |f_n(t)| \leq \left| \frac{\sinh t}{t} \right| e^{-mt} = \varphi(t)$$

et $\varphi \in C^0$ et intégrable grâce à la question a). (4)

Par le th. de C.D. : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-\lambda t} dt = 0$

Par critère séquentiel : $\boxed{\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda) = 0}$

d) Avec la b), il existe $C \in \mathbb{R}$

$$\forall \lambda > 0 : F(\lambda) = C - \text{Arctan} \lambda$$

car $]0, +\infty[$ intervalle

Avec la c) $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda) = C - \frac{\pi}{2} = 0$

$$\text{d'où } \boxed{\forall \lambda > 0 \quad F(\lambda) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \lambda}$$

e) Il vient donc $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

Remarque^{*} : Avec $F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\lambda)$, $u_n(\lambda) = \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{\sin t}{t} e^{-\lambda t} dt$

et le chapitre série de fonction, on montre que

F est $C^0 /]0, +\infty[$.

Partie I

1. Si $a = b$ alors $a_0 = b_0 = a$.
Si $a_n = b_n = a$ alors $a_{n+1} = b_{n+1}$ (en particulier car $\sqrt{a^2} = |a| = a$).
On en déduit par récurrence que

$$\boxed{\text{Si } a = b \text{ alors } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont constantes égales à } a}$$

2. Soient $x, y \geq 0$. On a $0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{xy} + y$. On en déduit que

$$\boxed{\forall x, y \geq 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}}$$

3. Une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n, b_n \geq 0$. Avec la **question** précédente, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \leq b_{n+1}$ ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq b_n$$

Soit $n \geq 1$. On a $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{a_n^2} = a_n$ et $b_{n+1} \leq \frac{2b_n}{2} = b_n$. Ceci montre que

$$\boxed{(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ croît et } (b_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ décroît}}$$

Comme $a_n \leq b_n$ pour $n \geq 1$, on a $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$ et les suites sont donc dans l'intervalle $[a_1, b_1]$ à partir du rang 1 et donc bornées (bornée équivaut à bornée à partir d'un certain rang).

$$\boxed{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont bornées}}$$

4. Par théorème de limite monotone, les suites sont convergentes à limite ℓ_a et ℓ_b dans $[a_1, b_1]$ et donc strictement positives. En passant à la limite dans la relation de récurrence pour (b_n) , on obtient $\ell_a = \ell_b$.

$$\boxed{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont convergentes de même limite}}$$

5. Notons (a'_n) et (b'_n) les suites définies par les mêmes relations de récurrence mais avec $a'_0 = b$ et $b'_0 = a$. On a alors $a'_1 = a_1$ et $b'_1 = b_1$. Comme les suites sont récurrentes d'ordre 1, elles sont égales à partir du rang 1 et donc de même limite.
De même, Notons (α_n) et (β'_n) les suites définies par les mêmes relations de récurrence mais avec $\alpha_0 = \lambda a$ et $\beta'_0 = \lambda b$. On a alors $\alpha_1 = \lambda a_1$ et $\beta'_1 = \lambda b_1$ puis, par récurrence simple, $\alpha_n = \lambda a_n$ et $\beta'_n = \lambda b_n$ pour tout n . Finalement,

$$\boxed{M(b, a) = M(a, b) \text{ et } \forall \lambda > 0, M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)}$$

6. On utilise ceci avec $\lambda = 1/a > 0$: $\frac{1}{a} M(a, b) = M(1, b/a) = f(b/a)$. On a donc

$$\boxed{M(a, b) = a f\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Partie II

7. $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ par théorèmes généraux et au voisinage des infinis à $\varphi(t) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \geq 0$ et donc intégrable sur de tels voisinages. La fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ par théorème de comparaison. A fortiori,

$$\boxed{I(a, b) \text{ et } J(a, b) \text{ existent}}$$

La fonction ci-dessus étant paire, son intégrale sur $\mathbb{R}^+$ vaut celle sur $\mathbb{R}^-$ (par exemple en effectuant le changement de variable C^1 -bijetif : $x = -t$). Ainsi, par relation de Chasles

$$\boxed{J(a, b) = 2I(a, b)}$$

8. $s \mapsto \frac{1}{2} \left(s - \frac{ab}{s} \right)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{ab}{s^2} \right)$ qui ne s'annule pas. C'est donc une bonne fonction de changement de variable (C^1 -bijectif). Posons $t = \frac{1}{2} \left(s - \frac{ab}{s} \right)$. On a

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + t^2 &= \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{1}{4s^2} (s^2 - ab)^2 \\ &= \frac{1}{4s^2} (s^2(a+b)^2 + (s^2 - ab)^2) \\ &= \frac{1}{4s^2} (s^4 + (a^2 + b^2)s^2 + a^2b^2) \\ &= \frac{1}{4s^2} (s^2 + a^2)(s^2 + b^2) \\ (\sqrt{ab})^2 + t^2 &= ab + \frac{1}{4s^2} (s^2 - ab)^2 \\ &= \frac{1}{4s^2} (s^2 + ab)^2 \end{aligned}$$

Par ailleurs, avec les conventions d'écriture usuelles

$$dt = \frac{ds}{2} \left(1 + \frac{ab}{s^2} \right) = \frac{ds}{2s^2} (s^2 + ab)$$

On en déduit que

$$J \left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(a^2 + s^2)(b^2 + s^2)}} = J(a, b)$$

et donc, avec la **question** précédente

$$\boxed{J \left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab} \right) = 2I(a, b)}$$

9. On prouve ce résultat par récurrence.

- Initialisation : c'est vrai pour $n = 0$ car $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Hérédité : si le résultat est vrai au rang n alors comme la **question** précédente donne

$$2I(a_{n+1}, b_{n+1}) = J(a_{n+1}, b_{n+1}) = 2I(a_n, b_n)$$

le résultat reste vrai au rang $n + 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, I(a_n, b_n) = I(a, b)}$$

10. On veut passer à la limite ci-dessus et, pour cela, utiliser un théorème d'interversion limite-intégrale. On propose le théorème de convergence dominée.

Posons $\alpha = M(a, b)$ et $f_n : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(a_n^2 + t^2)(b_n^2 + t^2)}}$.

- La suite (f_n) converge simplement (par T.G. des suites de $\mathbb{R}$) sur $\mathbb{R}^+$ vers $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(\alpha^2 + t^2)(\alpha^2 + t^2)}} = \frac{1}{\alpha^2 + t^2}$.
- f_n et f sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ par T.G. pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
- Comme pour tout $n \geq 1$ on a $a_n \geq a_1 > 0$ et $b_n \geq a_1 > 0$ (partie I) on en déduit que

$$\forall n \geq 1, \forall t \in \mathbb{R}, |f_n(t)| \leq \frac{1}{a_1^2 + t^2} = \varphi(t)$$

φ est continue par T.G. et comme $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \geq 0$ intégrable sur $\mathbb{R}$ (et indépendant de n).

Le théorème s'applique et donne

$$\boxed{I(M(a, b), M(a, b)) = I(a, b)}$$

11. On remarque que

$$\forall \alpha > 0, I(\alpha, \alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \alpha^2} = \left[\frac{1}{\alpha} \arctan \left(\frac{t}{\alpha} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\alpha}$$

Ainsi, avec la **question 10**,

$$I(a, b) = \frac{\pi}{2M(a, b)}$$

ou encore

$$M(a, b) = \frac{\pi}{2I(a, b)}$$

Partie III

12. $s \mapsto \frac{x}{s}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée $s \mapsto -x/s^2$ ne s'annule pas. C'est donc une bonne fonction de changement de variable (C^1 -bijectif). On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} &= \int_{+\infty}^{\sqrt{x}} \frac{(-x/s^2) ds}{\sqrt{(1+x^2/s^2)(x^2+x^2/s^2)}} \\ &= \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2+x^2)(1+s^2)}} \end{aligned}$$

Par relation de Chasles, on a

$$I(1, x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} + \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2+x^2)(1+s^2)}}$$

On conclut ainsi que

$$\forall x > 0, I(1, x) = 2 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} dt$$

13. Remarquons que

$$\forall t \geq 0, \left| \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} \right| = \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} \leq \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{x^2+t^2}}$$

• Soit par convexité de $y \mapsto \sqrt{y}$ (courbe en dessous de la tangente en $y=1$) on a

$$\forall y \geq -1, \sqrt{1+y} \leq 1 + \frac{y}{2}$$

Ainsi,

$$\forall t \in [0, \sqrt{x}], \left| \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} \right| \leq \frac{x}{2\sqrt{x^2+t^2}}$$

$$\text{ou } \bullet \forall t \in [0, \sqrt{x}], \left| \frac{1 - \sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} \right| = \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}(1 + \sqrt{1+t^2})} \leq x$$

et l'on a ainsi,

$$\forall t \in [0, \sqrt{x}], \left| \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} \right| \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+t^2}}$$

On intègre cette inégalité entre 0 et $\sqrt{x}$ (aucun problème d'existence) pour obtenir

$$\left| I(1, x) - 2 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} dt \right| \leq 2 \int_0^{\sqrt{x}} \left| \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} \right| dt \leq 2x \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} dt$$

On en conclut donc que

$$I(1, x) - 2 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} dt \text{ est négligeable devant } 2 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} dt \text{ quand } x \text{ tend vers } 0^+$$

14. La dérivée de $t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$ sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Par changement de variable linéaire $s = \frac{t}{x}$, on a

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} dt = \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{ds}{1+s^2} = \left[\ln(s + \sqrt{1+s^2}) \right]_0^{1/\sqrt{x}}$$

et finalement,

$$\boxed{\forall x > 0, \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} dt = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)}$$

15. On a

$$\ln \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) = -\frac{\ln(x)}{2} + \ln(1 + \sqrt{x+1})$$

qui équivaut à $-\ln(x)/2$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Or, d'après la **question 13**, quand $x \rightarrow 0$

$$I(1, x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} dt$$

On en déduit avec la **question 14** que

$$I(1, x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x)$$

Comme $f(x) = M(1, x) = \frac{\pi}{2I(1, x)}$, on a ainsi

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2 \ln(x)}}$$

16. On a (avec la partie I)

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = M\left(1, \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} M(x, 1) = \frac{1}{x} M(1, x) = \frac{1}{x} f(x)$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0^+$ et la **question** précédente donne alors

$$f(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\pi x}{2 \ln(1/x)}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2 \ln(x)}}$$

17. On sait que

$$\forall x > 0, f(x) = M(1, x) = \frac{\pi}{2I(1, x)}$$

On va alors prouver que $F : x \mapsto I(1, x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- $\forall x > 0, t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ par T.G.
- $\forall t > 0, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ par T.G.
- $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in [a, b], \forall t > 0, \left| \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(a^2+t^2)}} = \varphi(t).$

On a vu en **question 7** que le majorant φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Le théorème évoqué donne $F : x \mapsto I(1, x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme $\forall x > 0 : F(x) > 0$ (théorème de l'intégrale nulle) on conclut avec T.G.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^{+*}}$$

18. La **question 15** donne $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$ et donc

On prolonge f par continuité en posant $f(0) = 0$

On a aussi par croissances comparées :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2x \ln(x)} \rightarrow +\infty$$

Le graphe de f présente au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale

19. Avec la **question 16**,

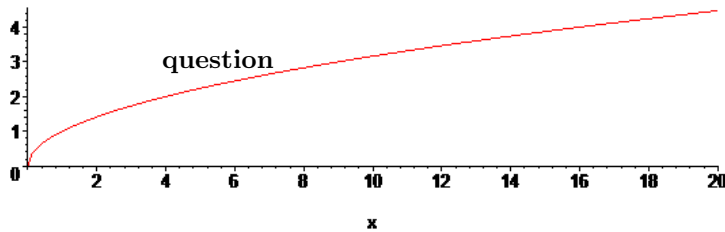
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$$

Au voisinage de $+\infty$, on a ainsi une direction asymptotique horizontale. Comme f est de limite infinie en $+\infty$ (toujours la **question 16**)

Le graphe de f présente en $+\infty$ une branche parabolique horizontale

20. L'expression de $I(1, x)$ montre que si $0 \leq x \leq y$, $I(1, x) \geq I(1, y) > 0$. $x \mapsto I(1, x)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs > 0 .

Ainsi, avec l'expression rappelée en **question 17**, f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.



Partie IV

21. Avec les **questions 7 et 8**,

$$I(1, x) = I\left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right)$$

On utilise alors la **question 5** avec $\lambda = \frac{1+x}{2}$:

$$M\left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right) = \frac{1+x}{2} M\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

On conclut alors avec la **question 11** (utilisée deux fois) que

$$I(1, x) = \frac{2}{1+x} I\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

22. (a) 1ère méthode : On utilise le **I**, si on considère les suite (a_n) et (b_n) du **I** avec $a_0 = 1$ et $b_0 = x$, on a alors $\forall n \geq 1 : a_n > 0, b_n > 0$ puis $w_0 = \frac{b_0}{a_0}$ et par récurrence $w_n = \frac{b_n}{a_n}$ pour tout entier $n \geq 1$. On conclut alors avec le **I 4**. que

(w_n) converge vers 1

2ème méthode : On utilise la technique des suites récurrentes :

On a $w_{n+1} = h(w_n)$ avec $h(t) = \frac{2\sqrt{t}}{1+t}$. Comme $h(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ et $w_0 \in \mathbb{R}^+$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n \text{ existe et } w_n \geq 0.$$

h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall t > 0$, $h'(t) = \frac{1-t}{\sqrt{t}(1+t^2)}$, d'où le tableau de variation :

t	0	1	$+\infty$
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$	0	1	0

Ainsi $h([0, +\infty[) =]0, 1]$ et $h([0, 1]) = [0, 1]$. $[0, 1]$ est donc un intervalle stable par h . On peut donc, quitte à décaler d'un cran la suite, que $x \leq 1$.

De plus h est croissante sur $[0, 1]$, donc la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ est monotone et bornée donc convergente. On a $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$, donc $(w_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 ou 1... ou encore vers un autre point fixe de h .

Étudions le signe de la fonction $\phi(t)$ définie par $\phi(t) = h(t) - t = \frac{2\sqrt{t} - t - t^2}{1+t}$.

Posons enfin $g(t) = 2\sqrt{t} - t - t^2$, $g'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - 2t$ et $g''(t) = -\frac{1}{2t^{3/2}} - 2 < 0$, d'où le tableau de variation :

t	0	α	1
$g''(t)$	-	-	-
$g'(t)$	$+\infty$	0	-2
$g(t)$	0	$g(\alpha)$	0

On en déduit que $\forall t \in [0, 1[: h(t) \geq t$ et donc que $\forall n \geq 1 : 0 < w_n \leq w_{n+1}$, ce qui assure que

$$(w_n) \text{ converge vers } 1$$

(b) On procède par récurrence.

- Initialisation : la **question 21** donne $I(1, x) = \frac{2}{1+x} I(1, w_1)$, ce qui correspond à la formule pour $n = 0$.
- Hérédité : supposons le résultat vrai à un rang $n \geq 0$. La **question 21** donne

$$I(1, w_{n+1}) = \frac{1}{2 + w_{n+1}} I(1, w_{n+2})$$

Par le résultat au rang n , on déduit celui au rang $n + 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, I(1, x) = I(1, w_{n+1}) \prod_{k=0}^n \frac{2}{1 + w_k}$$

(c) On a vu en **question 17** que $x \mapsto I(1, x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, par critère séquentiel, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(1, w_{n+1}) = I(1, 1) = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que (p_n) converge et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{\pi}{2I(1, x)}$$

$$\text{En notant } \ell \text{ la limite de } (p_n), \text{ on a } \ell I(1, x) = \frac{\pi}{2}$$

Partie V

23. Soit $x \in]-1, 1[$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a donc $|x \sin(t)| < 1$ et donc $1 - x^2 \sin^2(t) > 0$. Ainsi, $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2(t)}}$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$ et son intégrale sur ce segment existe.

$$\boxed{K \text{ est bien définie sur }]-1, 1[}$$

24. $s \mapsto \arctan(s)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ à dérivée ne s'annulant pas et c'est donc un bon changement de variable (C^1 -bijectif). Il donne en posant $t = \arctan(s)$, $dt = \frac{ds}{\cos^2 s}$ et donc :

$$\begin{aligned} I(1, x) &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1/\cos^2(s)}{\sqrt{(1+\tan^2(s))(x^2+\tan^2(s))}} ds \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{x^2 \cos^2(s) + \sin^2(s)}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 0, I(1, x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{x^2 \cos^2(t) + \sin^2(t)}}}$$

25. Comme $\sin^2 = 1 - \cos^2$, on a donc

$$I(1, x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - (1-x^2) \cos^2(t)}}$$

Le changement affine $u = \pi/2 - t$ donne alors

$$I(1, x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - (1-x^2) \sin^2(u)}}$$

Quand $x \in]0, 1[$, $1 - x^2 > 0$ et est égal au carré de sa racine carrée et ainsi

$$\boxed{\forall x \in]0, 1[, I(1, x) = K(\sqrt{1-x^2})}$$

26. (a) On a

$$W_n - W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t)(1 - \sin^2(t)) dt = \int_0^{\pi/2} \cos(t) \sin^{2n}(t) \cos(t) dt$$

$u'(t) = \cos(t) \sin^{2n}(t)$ se primitive en $u(t) = \frac{1}{2n+1} \sin^{2n+1}(t)$ et $v(t) = \cos(t)$ se dérive en $v'(t) = -\sin(t)$. $u, v \in C^1([0, \pi/2])$ et on peut intégrer par parties pour obtenir

$$W_n - W_{n+1} = [u(t)v(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u(t)v'(t) dt = \frac{1}{2n+1} W_{n+1}$$

On conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} W_n}$$

(b) On prouve le résultat par récurrence.

- Initialisation : $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et le résultat est vrai au rang 0.
- Hérédité : on suppose le résultat vrai au rang n . Avec la **question** précédente, et en écrivant $\frac{2n+1}{2n+2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2^2(n+1)^2}$,

$$W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \pi = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+3}((n+1)!)^2} \pi$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \pi}$$

27. Le cours nous dit que $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est DSE de rayon 1. Son développement est alors donné par Taylor :

$$\forall t \in]-1, 1[, g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

On montre par récurrence que

$$g^{(n)}(t) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2} (1-t)^{-\frac{2k+1}{2}} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} (1-t)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$\boxed{\forall t \in]-1, 1[, g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} t^n}$$

28. Il nous suffit alors d'appliquer l'égalité en $(x \sin(t))^2$ (qui est dans $] -1, 1[$) :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2 \sin^2(t)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} \sin^{2n}(t)}$$

29. A ce niveau, on a

$$\forall x \in]-1, 1[, K(x) = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} \sin^{2n}(t) dt$$

On veut intervertir les symboles. On va utiliser le théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue pour les séries de fonctions. Ici, $x \in]-1, 1[$ est fixé.

(a) $u_n : t \mapsto \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} \sin^{2n}(t)$ est le terme général d'une série de fonctions qui converge simplement

$$\text{sur } [0, \pi/2] \text{ vers } S : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2 \sin^2(t)}}.$$

(b) u_n et S sont continues sur $[0, \pi/2]$ par TG.

$$(c) 0 \leq \int_0^{\pi/2} |u_n(t)| dt \leq \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} |x|^{2n} \cdot \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} |x|^{2n} = \alpha_n$$

$$\text{Comme } \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} |x|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|^2 < 1 \text{ (car } x \in]-1, 1[\text{) par d'Alembert } (\sum \alpha_n)$$

$$\text{converge et par TC } \left(\sum \int_0^{\pi/2} |u_n(t)| dt \right) \text{ converge.}$$

Le théorème s'applique et donne

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} W_n$$

Il reste à utiliser l'expression de W_n pour conclure que

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, K(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((2n)!)^2}{16^n (n!)^4} x^{2n}}$$

30. On a

$$M(3, 5) = M(5, 3) = 5M(1, 3) = \frac{5\pi}{2} \frac{1}{I(1, 3/5)} = \frac{5\pi}{2} \frac{1}{K(4/5)}$$

On déduit $M(3, 5)$ de $K(4/5)$ dont on a une expression sous forme de somme de série numérique. (ce qui donne $M(3, 5) = 3.936235504$ à 10^{-9} près (source Maple)

ex 1* Si $n=1$, O_n a égalitéssi f est de signe constant (par exemple, quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $\int_a^b f \geq 0$ et avec $f = f^+ - f^-$, on a $\int_a^b f^- = 0 \Rightarrow f^- = 0 \Rightarrow f = f^+ \geq 0$). ①

Si $n \geq 2$ et si $\exists \vec{u} \in E$ et si $\exists \varphi: [a, b] \rightarrow \underline{\mathbb{R}^+} \setminus$
 $\forall t \in [a, b]: f(t) = \varphi(t) \vec{u}$, on a alors :

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f(t) dt \right\| &= \left\| \int_a^b \varphi(t) dt \cdot \vec{u} \right\| = \left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| \|\vec{u}\| \\ &= \int_a^b |\varphi(t)| dt \|\vec{u}\| = \int_a^b \|f(t)\| dt \\ &\quad (\varphi \geq 0) \end{aligned}$$

Donc on a que la réciproque est vraie

si $f = 0$ ou si non soit $f \neq 0$ tel que $\left\| \int_a^b f \right\| = \int_a^b \|f\|$

Posons $\vec{u} = \frac{\int_a^b f}{\left\| \int_a^b f \right\|}$

$$\text{or } a \quad \left(\int_a^b f | \vec{u} \right) = \int_a^b (f(t) | \vec{u}) dt \leq \int_a^b \|f(t)\| \cdot \underbrace{\|\vec{u}\|}_{=1} dt \quad (2)$$

$\uparrow$
 Cauchy Schwarz

$$\leq \int_a^b \|f(t)\| dt = \left\| \int_a^b f(t) dt \right\|$$

$$\text{or } \left(\int_a^b f | \vec{u} \right) = \left\| \int_a^b f \right\| = \int_a^b \|f\|, \text{ donc}$$

$$\int_a^b (f(t) | \vec{u}) dt = \int_a^b \|f(t)\| dt$$

$$\Rightarrow \int_a^b \underbrace{[\|f(t)\| - (f(t) | \vec{u})]}_{\geq 0} dt$$

$$\Rightarrow \forall t \in [a, b] \quad \|f(t)\| - (f(t) | \vec{u}) = 0 \quad (*)$$

$$\Rightarrow \text{---} \quad (f(t) | \vec{u}) = \|f(t)\| \cdot \|\vec{u}\|$$

$$\Rightarrow \text{---} \quad \exists \lambda_t \in \mathbb{R} \mid f(t) = \lambda_t \vec{u}$$

$$\text{et avec } (*) : \lambda_t \geq 0$$

$$\underline{d} \quad \exists \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \forall t \in [a, b] \quad f(t) = \varphi(t) \vec{u}$$

Ex 2*

Comme f est C^2 , φ est C^2 sur $[a, b]$ ①

par TG + RI $\int_a^b f C^3$

$$\forall n \in [a, b] \quad \varphi'(n) = f(n) - \frac{f'(n)}{2}(n-a) - \frac{f(a)+f(n)}{2}$$

$$\varphi''(n) = \cancel{f'(n)} - \frac{f''(n)}{2}(n-a) - \cancel{\frac{f'(n)}{2}} - \cancel{\frac{f'(n)}{2}}$$

$$\text{D'où } \forall n \in [a, b]; \quad \varphi'(n) = \underbrace{\varphi'(a)}_{=0} - \int_a^n \frac{f''(t)}{2}(t-a) dt$$

$$\text{donc } |\varphi'(n)| \leq \int_0^n \frac{\eta_2}{2}(t-a) dt = \frac{\eta_2}{2} \frac{(n-a)^2}{2} \\ (\eta_2 = \|f''\|_\infty)$$

$$\text{donc } |\varphi(n)| = \left| \varphi(a) + \int_a^n \varphi'(t) dt \right|$$

$$\leq \int_a^n \frac{\eta_2}{4}(t-a)^2 dt = \frac{\eta_2}{12} (b-a)^3$$

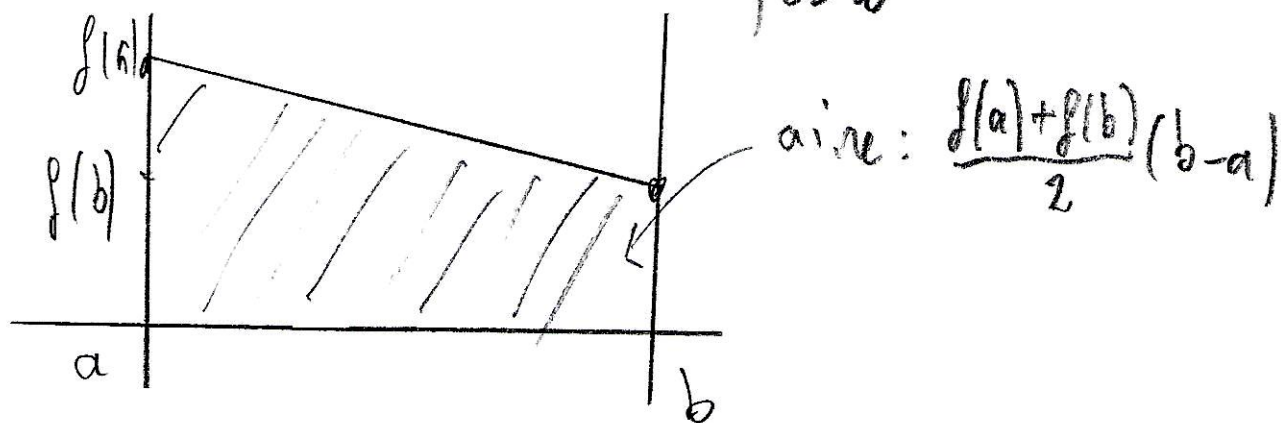
$$C95 \left| \int_a^b f - \left[\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(n_i) + \frac{f(b)}{2} \right] (b-a) \right|$$

$$= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{n_i}^{n_{i+1}} f(n) - \frac{f(n_i) + f(n_{i+1})}{2} (n-a) dn \right|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\eta_2}{12} \left(\frac{b-a}{n} \right)^3 = \frac{\eta_2}{12} \frac{(b-a)^3}{n^2}$$

c'est la méthode des trapèzes

(2)



Application $f(t) = e^{-t^2}$ $f'(t) = -2te^{-t^2}$
 et $f''(t) = -2e^{-t^2} + 4t^2e^{-t^2}$

d'où $\forall t \in [0, 1] |f''(t)| \leq 6$ et donc

$$\left| \int_a^b f - S_n \right| \leq \frac{6}{12n^2} = \frac{1}{2n^2} < 10^{-3} \text{ si } n^2 > 500$$

ssi $n > \sqrt{500}$
 $\sim 22,3$

qqs $S_{23} = 0,746\dots \simeq \int_0^1 e^{-t^2} dt \sim 10^{-3}$

Exercice 3* $f=0$ est solution, sinon soit ①

$f \neq 0$ solution. $\exists a \in \mathbb{R} \mid f(a) \neq 0$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{R} \quad f(n) = \frac{1}{f(a)} \int_{n-a}^{n+a} f(t) dt$$

$$= \frac{1}{f(a)} (F(n+a) - F(n-a))$$

$$\text{où } F: n \mapsto \int_0^n f(t) dt \quad C^1 / \mathbb{R} \quad (\text{TPS I})$$

qd par TG, $f \in C^1$ sur $\mathbb{R}$

Dérivons la formule $f(n)f(y) = \int_{n-y}^{n+y} f(x) dx$

par rapport à n :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{R} \quad f'(n)f(y) = f(n+y) - f(n-y)$$

$$\text{on a donc } \forall n \in \mathbb{R} \quad f'(n) = \frac{1}{f(a)} [f(n+a) - f(n-a)]$$

Comme f est C^1 , par TG, f' aussi et dnl
 $f \in C^2$ sur $\mathbb{R}$

$$\text{Dérivons } (*) \text{ r. l. } y : f(n)f'(y) = f(n+y) + f(n-y) \quad (2)$$

on additionne $(*)$ et $(*)_2$:

$$f'(n)f(y) + f(n)f'(y) = 2f(n+y) \quad (*)_3$$

En dérivant r. l. n et r. l. y , on trouve :

$$f''(n)f(y) = f(n)f''(y)$$

$$\text{d'où } \underline{f''(n) - \lambda f(n) = 0} \quad \text{avec } \lambda = \underline{\frac{f''(n)}{f(n)}}$$

D'autre part, avec $n=y=0$ dans $(*)$: $f(0)=0$

et en dérivant $(*)_3$ r. l. y puis $n=y=0$, on a :

$$\underline{f'(0)^2 = 2f'(0)}$$

Si $f'(0)=0$, $f=0$

sinon $f(0)=0$ et $f'(0)=2$

Si $\lambda=0$ $f(n)=2n$ convient et est unique

Si $\lambda>0$ $f(n) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \sinh \sqrt{\lambda} n$ _____

Si $\lambda<0$ $f(n) = \frac{2}{\sqrt{-\lambda}} \sin \sqrt{-\lambda} n$ _____