

SUJET 1

1 Si $x \leq 0$ alors $|u_n(x)| \geq 1$ donc $u_n(x) \not\rightarrow 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$(\sum u_n(x))$ diverge grossièrement.

Si $x > 0$, $n^2 e^{-x\sqrt{n}} = (\sqrt{n})^4 q^{\sqrt{n}}$ avec $0 < q = e^{-x} < 1$
 $\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ (croissances comparées)

donc $u_n(x) = o(\frac{1}{n^2})$ et par "T.C.", $(\sum u_n(x))$ converge

d $\boxed{\mathcal{E} =]0, +\infty[}$

2 $\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2$ tel que $x < y$

$\forall n \in \mathbb{N}^* u'_n(x) = -\sqrt{n} e^{-x\sqrt{n}} \leq 0$ donc la fonction u_n est décroissante. D'autre part la somme (finie) de fonction décroissante est décroissante donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^N u_n(x) \geq \sum_{n=1}^N u_n(y) \quad \text{puis quand } N \rightarrow +\infty : \underline{f(x) \geq f(y)}$$

De plus $u'_1(x) = -e^{-x} < 0$ donc u_1 est strictement décroissante donc $u_1(x) > u_1(y)$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n(x) - \sum_{n=1}^N u_n(y) &\geq \sum_{n=2}^N u_n(x) - u_n(y) + u_1(x) - u_1(y) \\ &\geq 0 + u_1(x) - u_1(y) > 0 \end{aligned}$$

d'où : $N \rightarrow +\infty : f(n) - f(y) \geq u_1(n) - u_1(y) > \underline{\underline{0}}$ (2)

d' : f est strictement croissante sur E .

* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in E : u_n''(x) = (-\sqrt{n})^2 e^{-x\sqrt{n}} > 0$

donc u_n est convexe sur E , par somme finie,
 $S_n = \sum_{p=0}^n u_p$ est convexe sur E et par convergence simple

on conclut : f est convexe sur E

g) i) u_n est C^∞ sur E et $\forall x \in E \quad u_n^{(k)}(x) = (-\sqrt{n})^k e^{-x\sqrt{n}}$
 ii) $(\sum u_n)$ c.s. sur E $\forall k \in \mathbb{N}^*$

d'où $\forall x \in [a, b] \subset]0, +\infty[$ (donc $a > 0$) $\forall n \in \mathbb{N}$

et $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad |u_n^{(k)}(x)| \leq \underbrace{(\sqrt{n})^k}_{\alpha_n} e^{-a\sqrt{n}} \quad (t \mapsto e^{-t\sqrt{n}} \searrow)$

on a $n^2 \alpha_n = (\sqrt{n})^{k+2} e^{-a\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc $\alpha_n = o(\frac{1}{n^2})$

par TC : $(\sum \alpha_n)$ converge d'où $(\sum u_n^{(k)})$ converge normale-

-ment sur $[a, b]$, par l'extension du théorème de

dérivation, on a : $f \in C^\infty$ sur E et $\forall x \in E \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-\sqrt{n})^k e^{-x\sqrt{n}}$
 $\forall k \in \mathbb{N}^*$

(3)

$$4) * \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n(n) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{-\infty} = 0 \quad \text{par TG.}$$

$$* \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [1, +\infty[\quad |u_n(x)| \leq e^{-\sqrt{x}} = \alpha_n$$

$$\text{et } \alpha_n = o\left(\frac{1}{n^4}\right) \text{ (cf 1)) donc } \underline{(\sum u_n) \text{ cvg normalement sur } [1, +\infty[}$$

Par le théorème d'échange des limites:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0}$$

4-10

d'après 2. f est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc

par TLG, $\lim_{t \rightarrow 0} f = l$ existe (dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \forall t > 0 \quad f(t) \geq \sum_{n=0}^N e^{-t\sqrt{n}} \quad (\text{car } e^{-t\sqrt{n}} \geq 0, \forall n)$$

on fixe N et on fait tendre t vers 0 :

$$l \geq \sum_{n=0}^N 1 = N+1 \text{ (par TG) et ce pour tout } N$$

donc $\forall N \in \mathbb{N} \quad N+1 \leq l$ d'où l ne peut être réel

cf

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = +\infty}$$

5) Chercher à obtenir un encadrement " serré " de $f(x)$ à l'aide des comparaisons Σ - $\int$. Fixons $x > 0$ et " voyons " $(\Sigma u_n(x)) = (\Sigma g(n))$ avec $g(t) = e^{-x\sqrt{t}}$ (4)

on a facilement $g \geq 0$, $g \in C^0$ sur $[0, +\infty[$ et $g \searrow$ sur $[0, +\infty[$ donc $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^N g(n+1) = \sum_{n=1}^{N+1} e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_0^{N+1} \frac{e^{-x\sqrt{t}}}{g(t)} dt \leq \sum_{n=0}^N e^{-x\sqrt{n}}$$

et comme tout cvg , on fait tendre N vers $+\infty$;

d'où :
$$f(n) \leq \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq f(x) + 1$$

on obtient donc :
$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt - 1 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt$$

on
$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xu} 2u du \quad \text{par c.d.v c'-bijection}$$

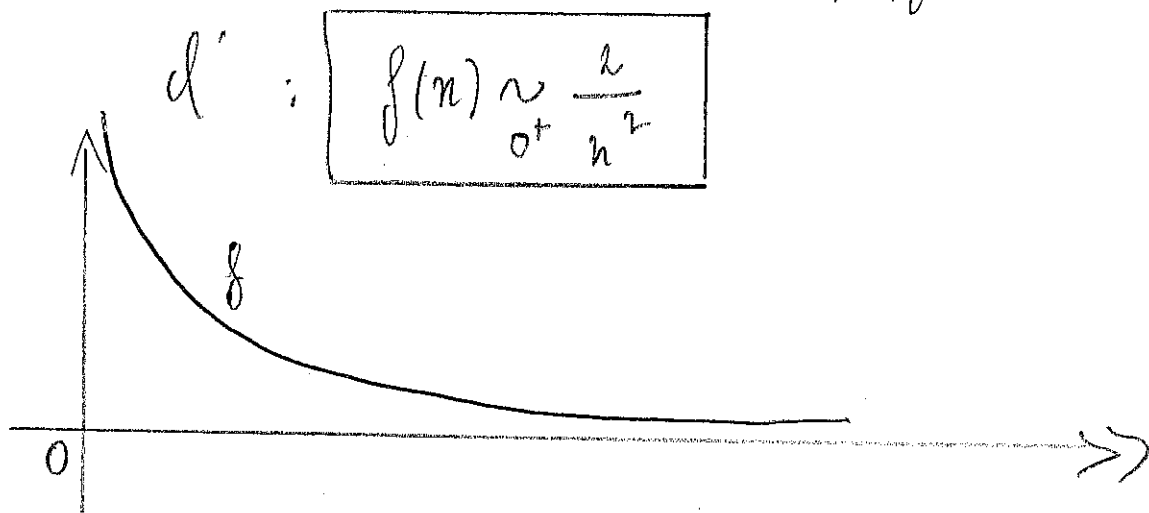
$$\sqrt{t} = u \text{ sur }]0, +\infty[$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-v} 2 \frac{v}{x} \frac{dv}{x} \quad \text{par c.d.v c'-bij } v = xu$$

$$= \frac{2}{x^2} \int_0^{+\infty} v e^{-v} dv = \frac{2}{x^2} \Gamma(2) = \frac{2}{x^2} 1! = \frac{2}{x^2}$$

on a donc : $\forall x > 0 : \frac{2}{x^2} - 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{x^2}$ d'où

par théorème d'encadrement : $\lim_{n^2 \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} f(n) = 1$ (5)



6) on reprend $u_n(n) = e^{-n\sqrt{n}}$

* $(\sum u_n)$ cvg simplement sur $I = [1, +\infty[\subset \mathbb{R}$.

* u_n et f sont C^0/I (TG et le 3°).

* u_n intégrable sur I car C^0 sur I et $a + \infty$:

$u_n(n) = e^{-\lambda n}$ avec $\lambda = \sqrt{n} > 0$ (intégrale de réf.)

$$\int_1^{+\infty} e^{-n\sqrt{n}} dn = \left[\frac{e^{-n\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \right]_1^{+\infty} = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \geq 0$$

et $\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $n^2 \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = (\sqrt{n})^3 e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.c.} 0$

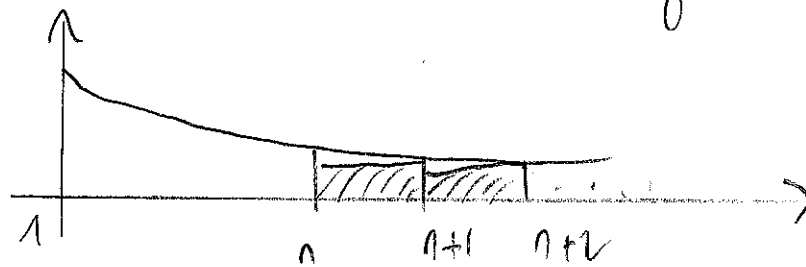
d'où $(\sum \int_1^{+\infty} |u_n|)$ cvg par T.C.

Par th. d'intégration terme à terme de Lebesgue :

$$\boxed{J = \int_1^{+\infty} f(n) dn = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{+\infty} u_n(n) dn = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}} \quad (6)$$

Posons $g(t) = \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$, $g'(t) = -e^{-\sqrt{t}} \frac{t^{3/2} + t}{t^{5/2}} < 0$ donc

g est décroissante sur $[1, +\infty[$, $g \geq 0$ et $1^\circ / [1, +\infty[$ donc



Par comparaison $\int$ - $\sum$: $R_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} \leq \int_n^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt = \varepsilon_n$

$\varepsilon_n = \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-u} 2u du$ car c'est b'ij $u = \sqrt{t}$ soit $t = u^2$

ipp : $\int_{\sqrt{n}}^X u e^{-u} du = [-u e^{-u}]_{\sqrt{n}}^X + \int_{\sqrt{n}}^X e^{-u} du$

d'où tout conf (TG & C) donc $\varepsilon_n = 2e^{-\sqrt{n}}$,

$\varepsilon_n < 10^{-2} \Leftrightarrow 200 < e^{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{n} > \ln 200 \Leftrightarrow n > (\ln 200)^2$

d'où $\varepsilon_n < 10^{-2} \Leftrightarrow n > 28$

csq $J \simeq S_{28} = 0,937 \dots$

Sujet 2

①

a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ par C.C. donc (f_n) C.S. vers 0 sur $\mathbb{R}^+$

* variations de $f_n - 0 = f_n$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \geq 2 : f'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} - \frac{x^n}{n!} e^{-x} = \frac{x^{n-1} e^{-x} (n-x)}{n!}$$

d'où

x	0	n	$+\infty$
f'_n	+	0	-
f_n	0		0 (C.C.)

$$\|f_n - 0\|_{\infty, \mathbb{R}^+} = f_n(n) = \alpha_n$$

$$\alpha_n = \frac{n^n e^{-n}}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \text{ (Stirling)}, \text{ d'où } \alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

d'où (f_n) C.V. vers 0 sur $\mathbb{R}^+$

b) * C.S. $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(n) \times 2^n = \frac{(2n)^n}{n!} e^{-n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

donc $f_n(n) = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$ et comme $\frac{1}{2^n} \geq 0$ et

$(\sum \frac{1}{2^n})$ cvg, par TC, $(\sum f_n(n))$ cvg absolument.

d° $(\sum f_n)$ c.s. et c.A. sur $\mathbb{R}^+$

②

* C.N Avec la a) $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi} n^{1/2}} > 0$, donc
par TC, $(\sum \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+})$ divg.

d° $(\sum f_n)$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$

* C.U.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{R}^+ \quad |R_n(x)| &= \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{x^p}{p!} e^{-x} & (\forall x: e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}) \\ &= \left(e^x - \sum_{p=0}^n \frac{x^p}{p!} \right) e^{-x} \\ &= 1 - \sum_{p=0}^n \frac{x^p}{p!} e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

donc $\sup_{n \in \mathbb{R}^+} |R_n(x)| \geq 1$, soit $\|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

d° $(\sum f_n)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$

c) soit $I = [0, a]$ ($a > 0$), on reprend le tableau de variations de f_n :

x	0	a	n
f'_n		+	0
f_n			

$$\forall n \geq \lfloor a \rfloor + 1 ;$$

$$a \leq n$$

(3)

cgs $\forall n \geq \lfloor a \rfloor + 1 : \|f_n\|_{\infty[0,a]} = f_n(a) = o\left(\frac{1}{2^n}\right) \quad (b)$

d° $(\sum f_n)$ C.N. sur $[0,a]$

①

exercice 3

1) On injecte dans l'équation (E) $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ d'où :

$$\begin{cases} n=0: & 2a_1 + a_0 = 0 \\ \forall n \geq 1: & 4n(n+1)a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} + a_n = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{a_0}{2} \\ \forall n \geq 1 \quad a_{n+1} = \frac{-a_n}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{-a_n}{(2n+2)(2n+1)} \end{cases}$$

$$\text{d'où} \quad a_n = \frac{-1}{2n(2n-1)} \times \frac{-1}{(2n-2)(2n-3)} \times \dots \times \frac{-1}{2 \times 1} a_0$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_0 \quad \text{d'où} \quad y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n$$

$R = +\infty$

$$\text{Si } x > 0, \quad x = (\sqrt{x})^2 \text{ et } y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = a_0 \cos(\sqrt{x})$$

$$\text{Si } x < 0, \quad x = -(\sqrt{-x})^2 \text{ et } y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = a_0 \cosh(\sqrt{-x})$$

2) Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$, cherchons $y(x) = \lambda(x) y_0(x)$ avec

$$y_0(x) = \cos(\sqrt{x})$$

$$y \text{ sol. de (E)} \Leftrightarrow 4x \lambda''(x) \cos(\sqrt{x}) + (2\cos(\sqrt{x}) - 4\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})) \lambda'(x) = 0$$

$$\text{Résolvons } 4x z'(\sqrt{x}) + (2\cos(\sqrt{x}) - 4\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})) z = 0 \quad (z = \lambda')$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{4\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) - 2\cos(\sqrt{x})}{4x \cos(\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x}} \tan(\sqrt{x}) - \frac{1}{2x}$$

$$\text{donc } \ln|z| = \int \frac{1}{\sqrt{x}} \tan \sqrt{x} dx - \int \frac{dx}{2x} + C \quad (2)$$

$$= \int 2 \tan u du - \frac{1}{2} \ln x + C$$

$\uparrow$
 $u = \sqrt{x}$

$$= -2 \ln|\cos u| - \frac{1}{2} \ln x + C$$

$$= -2 \ln|\cos \sqrt{x}| - \frac{1}{2} \ln x + C$$

$$\text{donc } z = \pm e^{-2 \ln|\cos \sqrt{x}| - \frac{1}{2} \ln x + C}$$

$$= C' \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{eh donc } \lambda(x) = C' \int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} = C' \int \frac{2 du}{\cos^2 u} \quad (u = \sqrt{x})$$

$$= 2 C' \tan u + C''$$

$$= 2 C' \tan \sqrt{x} + C''$$

$$\text{d'où } y(x) = (2 C' \tan \sqrt{x} + C'') \cos \sqrt{x}$$

$$= 2 C' \sin \sqrt{x} + C'' \cos \sqrt{x}$$

Soit $C: x \mapsto \cos \sqrt{x}$ et $S: x \mapsto \sin \sqrt{x}$
 $x > 0$

(C, S) est base de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ (vérifier!)

$\underline{d}$ y sol de E sur $\mathbb{R}_+^*$
 $(\Leftrightarrow) \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid y(x) = a \cos \sqrt{x} + b \sin \sqrt{x}$

On a déterminé $\lambda(x)$ sur tout segment $I \subset \mathbb{R}_+^* - \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right)^2 \right\}$, ce qui donne $S: x \mapsto \sin \sqrt{x}$ qui par prolongement (cf) est sol. sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Sur $\mathbb{R}_+^*$: cherchons $y(x) = \lambda(x) y_0(x)$
avec $y_0(x) = \cosh(\sqrt{-x})$

(3)

$$y \text{ sol. de (E)} \Leftrightarrow 4x \cosh \sqrt{-x} \lambda'(x) + (2 \cosh \sqrt{-x} + 4\sqrt{-x} \sinh \sqrt{-x}) \lambda(x) = 0$$

$$\text{Résolvons: } 4x \cosh \sqrt{-x} z' + (2 \cosh \sqrt{-x} + 4\sqrt{-x} \sinh \sqrt{-x}) z = 0$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{-2 \cosh \sqrt{-x} - 4\sqrt{-x} \sinh \sqrt{-x}}{4x \cosh \sqrt{-x}}$$

$$= \frac{-1}{2x} + \frac{2 \cosh \sqrt{-x}}{\sqrt{-x} \cosh \sqrt{-x}}$$

$$\text{donc } \ln|z| = -\frac{1}{2} \ln|x| + \int (-2) \frac{\sinh u}{\cosh u} du + c \quad u = \sqrt{-x}$$

$$= \ln \frac{1}{\sqrt{-x}} - 2 \ln(\cosh u) = \ln \frac{1}{\sqrt{-x}} + \ln \left(\frac{1}{\cosh \sqrt{-x}} \right)^2 + c$$

$$\text{donc } z = \pm e^{\dots}$$

$$= c' \frac{1}{\sqrt{-x}} \frac{1}{\cosh^2 \sqrt{-x}}$$

$$\text{donc } \lambda(x) = c' \int \frac{dx}{\sqrt{-x} \cosh^2 \sqrt{-x}} + c''$$

$$= c' \int \frac{-2 du}{\cosh^2 u} du + c'' = -2c' \tanh u + c''$$

$$= +2c' \tanh \sqrt{-x} + c''$$

$$\text{donc } y(x) = -2c' \sinh \sqrt{-x} + c'' \cosh \sqrt{-x}$$

$$\text{soit } C_1 : (x \mapsto \cosh \sqrt{-x}) \text{ et } S_1 : (x \mapsto \sinh \sqrt{-x}) \quad (c_1, s_1) \text{ l'écrit}$$

$$\underline{\text{cl. } y \text{ sol. de (E) sur } \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid y(x) = a \cosh \sqrt{-x} + b \sinh \sqrt{-x}}$$

4) Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ donc f (4)
 restreint à $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ est aussi solution, donc
 $\exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\begin{cases} \forall n > 0 & f(n) = a \cos \sqrt{n} + b \sin \sqrt{n} \\ \forall n < 0 & f(n) = c \operatorname{ch} \sqrt{-n} + d \operatorname{sh} \sqrt{-n} \end{cases}$$

Il faut que f soit continue, 2 fois dérivable et solution
 de (E) sur $\mathbb{R}$.

* $\lim_{n \rightarrow 0^+} f(n) = a$ & $\lim_{n \rightarrow 0^-} f(n) = c$ donc il faut $a = c$

* $\forall n > 0 \quad f'(n) = -\frac{a}{2\sqrt{n}} \sin \sqrt{n} + \frac{b}{2\sqrt{n}} \cos \sqrt{n}$
 $\xrightarrow{n \rightarrow 0^+} \frac{-a}{2} + \begin{cases} \infty & \text{si } b \neq 0 \\ 0 & \text{si } b = 0 \end{cases}$

$$f_0(n) = \begin{cases} \cos \sqrt{n} & n > 0 \\ \operatorname{ch} \sqrt{-n} & n < 0 \end{cases}$$

par T.P.D., il faut donc que $b = 0$

de $\tilde{m}$, il faut $d = 0$ d'où $f(n) = \begin{cases} a \cos \sqrt{n} & n > 0 \\ a \operatorname{ch} \sqrt{-n} & n < 0 \end{cases}$

et cette solution vaut a y trouvée (v 1°) d'où $\boxed{S_m = \operatorname{vect}(f_0)}$

exercice 4.

(1)

1.) $g: t \mapsto h(1 + ne^{-t})$

$1 + ne^{-t} > 0 \Leftrightarrow n > -e^{-t}$ et $\begin{array}{c|c} 0 & +\infty \\ \hline e^{-t} & 1 \end{array} \searrow 0$

d'où si $n < -1$ alors $1 + ne^{-t} < 0 \Leftrightarrow t < -h(-n)$

d'où $\forall t \in]0, \underbrace{-h(-n)}_{>0}[$ $1 + ne^{-t} < 0$ d'où g n'est c/mcx
sur $]0, +\infty[$

si $n \geq -1$ alors $\forall t \in]0, +\infty[$ $ne^{-t} \geq -e^{-t}$ d'où

$1 + ne^{-t} \geq 1 - e^{-t} > 0$ donc g est définie et

par TG, g est c/mcx sur $I =]0, +\infty[$

Pn 0 : si $n > -1$ alors $g(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} h(1+n)$ d'où PPL en 0

si $n = -1$ alors $h(1 - e^{-t}) = h(1 - 1 + t + o(t))$

$\stackrel{o}{=} h(t + h(1+o(1))) \sim h(t) < 0$

comme $t \mapsto h(t)$ est int. $/]0, 1[$ (intégrale de rif.),

par TC g int $/]0, 1[$

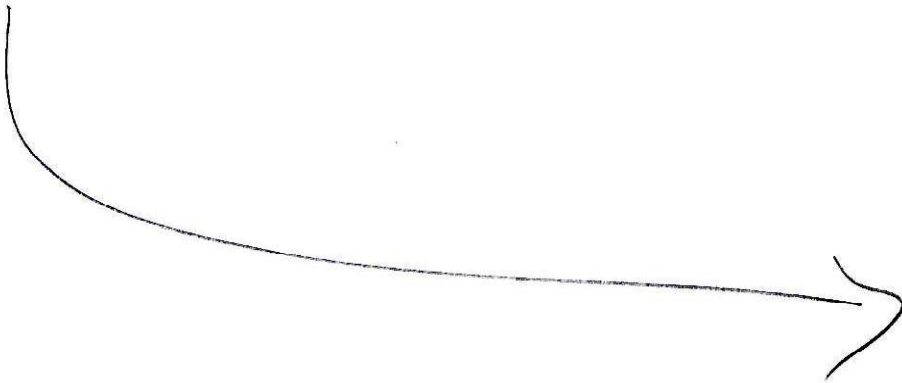
$$\underline{p \rightarrow +\infty} : p_n(1 + ne^{-t}) \underset{+\infty}{\sim} ne^{-t} \quad (\hat{m} \text{ si } n=0)$$

②

per TC, g int. $/ [1, +\infty[$

$$d^0 \mathcal{D} = [-1, +\infty[$$

2.)



von p ③

2) $\forall t \in I =]0, +\infty[$, $\forall n \in [-1, 1]$ $|x e^{-t}| \leq e^{-t} < 1$ ③

donc grâce au DSE de $u \mapsto \ln(1+u)$, on a

$$\forall t \in I, \forall n \in [-1, 1], g(t) = \ln(1+n e^{-t}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n e^{-t})^n}{n}$$

d'où utilisons le th. d's terme à terme de Lebesgue,

Posons $u_n(t) = (-1)^{n+1} \frac{(n e^{-t})^n}{n}$, on a :

- i) $(\sum u_n)$ cvg simplement vers g sur $]0, +\infty[$
- ii) u_n et g sont c/mcx sur $]0, +\infty[$ par TG
- iii) Écrivons $(\sum \int_0^{+\infty} |u_n|)$

$$\int_0^{+\infty} |u_n| = \int_0^{+\infty} \frac{|n|^n}{n} e^{-nt} dt = \frac{|n|^n}{n} \left[\frac{e^{-nt}}{-n} \right] = \frac{|n|^n}{n^2}$$

comme $|n| \leq 1$, on a :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} |u_n| \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{d'où par TC, } \left(\sum \int_0^{+\infty} |u_n| \right) \text{ cvg}$$

d'où
 $\forall n \in [-1, 1] \quad f(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^n}{n^2} ; f \text{ est D.S.E}$

(4)

3) Posons $h(x, t) = \ln(1 + xe^{-t})$, on a :

i) $h(x, \cdot)$ est C^0 et intégrable sur $I =]0, +\infty[$, $\forall n \in \mathring{\mathbb{D}}]-1, +\infty[$
 $\hookrightarrow$ par TG $\hookrightarrow$ par le 1°)

ii) h est 3 fois dérivable par rapport à x

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{e^{-t}}{1 + xe^{-t}}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = \frac{-e^{-2t}}{(1 + xe^{-t})^2}, \quad \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}(x, t) = \frac{2e^{-3t}}{(1 + xe^{-t})^3}$$

$\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ $\frac{\partial^i h}{\partial x^i}$ est C^0 par rapport à x et à t par TG
 par $x \in \mathring{\mathbb{D}}$ & $t \in I$

$\frac{\partial h}{\partial x}(x, \cdot)$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ sont intégrables sur I car :

En 0 : $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{1+x}$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) \underset{0}{\sim} \frac{-1}{(1+x)^2}$ d'après PPC ($x > -1$)

En $+\infty$: $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \underset{+\infty}{\sim} e^{-t}$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) \underset{+\infty}{\sim} -e^{-2t}$ d'après TC ;
 int. / $[1, +\infty[$

suite



$$\text{iii) } \forall x \in [a, b] \subset]-1, +\infty[= \mathcal{D}, \forall t \in]0, +\infty[\quad (5)$$

$$\left| \frac{\partial^3 f}{\partial n^3}(n, t) \right| \leq \frac{2e^{-3t}}{(1+ae^{-t})^3} = \varphi(t)$$

$$\varphi(t) \underset{0}{\sim} \frac{2}{(1+a)^3} \quad \text{et} \quad \varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} 2e^{-3t} \text{ donc } \varphi \in \mathcal{PFC} \text{ et } \mathcal{TC},$$

φ est intégrable sur I

Par th. de dérivation, f est $\mathcal{C}^3$ sur $\mathcal{D} =]-1, +\infty[$

$$\forall n \in \mathcal{D}, n \neq 0: f'(n) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+ne^{-t}} dt = \left[-\frac{\ln(1+ne^{-t})}{n} \right]_0^{+\infty} = \frac{\ln(1+n)}{n}$$

$$f'(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

$$\text{d'où } \forall n \in \mathcal{D}, n \neq 0: f'(n) = \frac{\ln(1+n)}{n} \quad \& \quad f'(0) = 1$$

$$\text{cqs } \forall n \in]-1, 1[: f'(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^{n-1}}{n} \quad (\text{DSE de } \ln)$$

Par th. d'f. t. n. terme de SE, $R=1$

$$\forall n \in]-1, 1[\quad f(n) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^n}{n^2}$$

exercice 5

on convient que $0 < p < 1$

(1)

(1)

$w =$

P	P	F	P	P	P	F	P	P	P	F	F	P	P	P	F	P	P	...
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$$T_1(w) = 3, T_2(w) = 7, T_3(w) = 11 \dots$$

* $T_1 \sim \mathcal{G}(p)$

* $T_2(\Omega) = [2, +\infty]$

P_i : pile au i-ème lancé
 F_i : face _____

$$\forall k \geq 2 \quad \underline{P(T_2 = k) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} P_i \cap P_2 \cap \dots \cap P_{i-1} \cap F_i \cap P_{i+1} \cap \dots \cap P_{k-1} \cap F_k\right)}$$

$q = 1 - p$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} q^{k-2} p^2 \quad \text{par indépendance des lancers}$$
$$= \underline{(k-1) q^{k-2} p^2}$$

on peut aussi rédiger en disant qu'il faut remplir k cases de pile ou de face avec exactement 2 faces dont une à la dernière case donc $P(T_2 = k) = \binom{k-1}{1} p^2 q^{k-2}$

Comme $\sum_{k=2}^{+\infty} P(T_2 = k) = p^2 \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1}$

$$= p^2 \frac{1}{(1-q)^2} \quad \left(\text{série dérivée de } \frac{1}{1-x} \right)$$

$$= 1, \quad \underline{P(T_2 = +\infty) = 0}$$

d'où : $\forall k \in [2, +\infty] \quad P(T_2 = k) = (k-1) q^{k-2} p^2$

$$* T_n(\Omega) = \llbracket n, +\infty \rrbracket$$

②

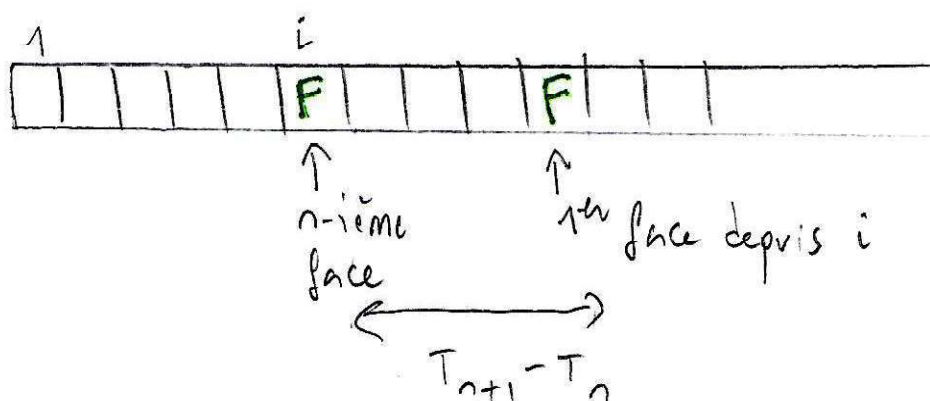
On fait comme T_n , on place les $n-1$ faces dans $k-1$ cases et le n -ième faces à la k -ième place d'où

$$\forall k \geq n \quad P(T_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$$

Comme $\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{x} x^n$, $P(T_n = +\infty) = 0$

d'où : $\forall k \geq n \quad P(T_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$ (rem. c'est la loi binomiale négative)

2'



On attend la 1^{re} succès à partir de la case $n+1$ d'où

d' $T_{n+1} - T_n / (T_n = i) \sim \mathcal{G}(p)$

Posons $X_n = T_{n+1} - T_n$, $X_n(\Omega) = \llbracket 1, +\infty \rrbracket$

On applique la F.P.T. : $\forall k \geq 1$:

$$P(X_n = k) = \sum_{i=n}^{+\infty} P(X_n = k / T_n = i) P(T_n = i)$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,
car $(T_n = +\infty)$
négligeable

$$\text{donc } \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{i=n}^{+\infty} q^{k-1} p \mathbb{P}(T_n = i) = q^{k-1} p \cdot 1$$

③

$$\hookrightarrow \sum_{i=n}^{\infty} \mathbb{P}(T_n = i) = 1$$

$$\text{d'où } \boxed{T_{n+1} - T_n \sim \mathcal{G}(p)}$$

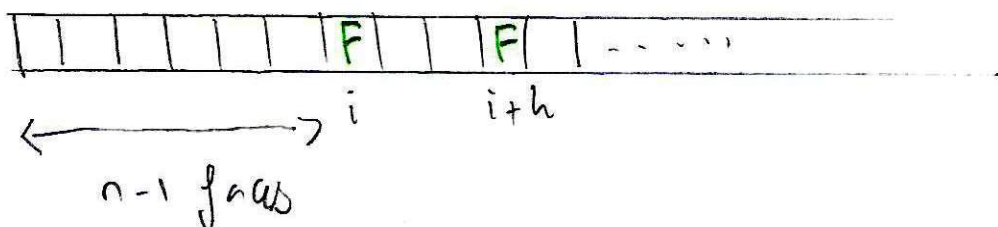
Par linéarité de l'espérance (qui est finie pour tout n ($k \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} = o(\frac{1}{k^2})$))

$$\sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{E(T_{k+1} - T_k)}_{1/p} = E(T_n) - \underbrace{E(T_1)}_{1/p}$$

$$\text{d'où } \boxed{E(T_n) = \frac{n}{p}}$$

double a des evts.

$$\textcircled{3'} \quad \forall k \geq 1, \forall i \geq n: \mathbb{P}((T_{n+1} - T_n = k) \cap (T_n = i)) = \mathbb{P}((T_n = i) \cap (T_{n+1} = k+i))$$



$$\text{donc } \mathbb{P}(T_{n+1} - T_n = k \cap T_n = i) = \binom{i-1}{n-1} p^{n-1} q^{i-n} \times \overset{i\text{-ème}}{\downarrow} p \times \overset{i+k\text{-ème}}{\downarrow} q^{k-1} p$$

$$\text{et } \mathbb{P}(T_{n+1} - T_n = k) \mathbb{P}(T_n = i) = q^{k-1} p \times \binom{i-1}{n-1} p^n q^{i-n} = \uparrow$$

$$\text{d'où } \boxed{T_{n+1} - T_n \text{ et } T_n \text{ sont indépendantes}}$$

on en déduit que $V(T_{n+1} - T_n + T_n) = V(T_{n+1} - T_n) + V(T_n)$

donc $V(T_{n+1}) = V(T_n) + \frac{q}{p^2}$: suite arithmétique

(4)

$$d^o \quad \boxed{V(T_n) = \frac{pq}{p^2}} \quad (V(T_1) = \frac{q}{p^2})$$

$$\begin{aligned} \text{De } \hat{m} \quad G_{T_{n+1}}(t) &= G_{T_{n+1}-T_n}(t) \times G_n(t) \\ &= \frac{pt}{1-qt} G_n(t) \quad (\text{suite g  .}) \end{aligned}$$

$$d^o \quad \boxed{G_{T_n}(t) = \left(\frac{pt}{1-qt} \right)^n}$$

Avec la formule rappelée au 1^o), on a :

$$\begin{aligned} G_{T_n}(t) &= (pt)^n \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m+n}{n} (qt)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n-1} p^n q^m t^{m+n} \quad \text{cdv } k=m+n \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \underbrace{\binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} t^k}_{P(T_n=k)} \quad \text{on retrouve la 1^o)} \end{aligned}$$

(4)a) $\ast T(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \rrbracket$

$$\begin{aligned} \ast \forall k \geq 2 \quad P(T=k) &= P(P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_{k-1} \cap F_k \perp F_1 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k) \\ &= q^{k-1} p + p^{k-1} q \end{aligned}$$

comme $\sum_{k=2}^{\infty} q^{k-1} p + p^{k-1} q = pq \left(\frac{1}{1-q} + \frac{1}{1-p} \right) = 1, \quad (T=\infty) \text{ n'est pas possible}$

$$d \quad \forall h \geq 2 \quad P(T=h) = pq(p^{h-2} + q^{h-2})$$

5

$$E(T) = \sum_{h=2}^{\infty} h pq (p^{h-2} + q^{h-2}) \quad \text{S.E. convergentes}$$

$$= p \sum_{h=2}^{\infty} h q^{h-1} + q \sum_{h=2}^{\infty} h p^{h-1}$$

$$= \frac{1}{p} - p + \frac{1}{q} - q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

$$d^o \quad E(T) = \frac{1}{pq} - 1$$

b) Posons $X = (V, T)$, $X(\Omega) = \llbracket 1, +\infty \rrbracket \times \llbracket 2, +\infty \rrbracket$

$$\underline{P(V=1, T=2)} = \underline{P(F_1 \cap P_2) + P(P_1 \cap F_2)} \\ = \underline{2pq}$$

$$\underline{P(V=1, T=j)}_{j \geq 3} = \underline{P(P_1 \cap \dots \cap P_{j-1} \cap F_j)} = \underline{q^{j-1} p}$$

$$\underline{P(V=i \cap T=j)}_{i \geq 2} = \begin{cases} P(F_1 \cap \dots \cap F_i \cap P_{j+1}) = \underline{p^i q} & \text{si } j=i+1 \\ \underline{0} & \text{si } j \neq i+1 \end{cases}$$

$$d^o \quad P(X=(i,j)) = \begin{cases} 2pq & \text{si } i=1 \text{ et } j=2 \\ q^{j-1}p & \text{si } i=1 \text{ et } j \geq 3 \\ p^i q & \text{si } i \geq 2 \text{ et } j=i+1 \\ 0 & \text{si } i \geq 2 \text{ et } j \neq i+1 \end{cases}$$

(6)

On en déduit que :

$$* P(V=1) = \sum_{j=2}^{\infty} P(V=1, T=j) \quad (F, P, T)$$

$$= 2pq + \sum_{j=3}^{\infty} q^{j-1}p$$

$$= 2pq + q^2 p \frac{1}{p} = q(2p+q) = q(p+1)$$

$$* P(V=i) = \sum_{j=2}^{\infty} P(V=i, T=j) = p^i q + 0$$

$$* q(p+1) + \sum_{i=2}^{\infty} p^i q = qp + q + p^2 q \frac{1}{1-p} = qp + q + p^2$$

$$= p(p+q) + q = 1$$

donc $(V=\infty)$ négligeable. et donc pour tout j , $(V=\infty) \cap (T=j)$ est négligeable. Par symétrie $(D=\infty)$ est aussi négligeable et donc $(V=i) \cap (T=\infty) \subset (V=\infty) \cup (D=\infty)$ est aussi négligeable (on avait donc pu prendre $X(\Omega) = \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\}$)

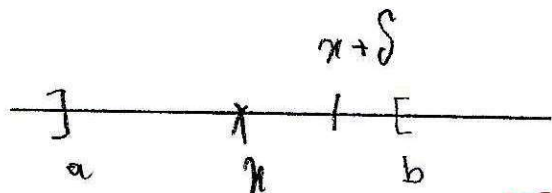
$$d' \quad P(V=i) = \begin{cases} q(p+1) & \text{si } i=1 \\ p^i q & \text{si } i \geq 2 \end{cases}$$

$$E(V) = \sum_{i=1}^{\infty} i P(V=i) = q(2p+q) + \sum_{i=2}^{\infty} i p^i q \quad (\text{S.E. cvg})$$

$$= q(2p+q) + pq \left(\frac{1}{q^2} - 1 \right) \quad d' \quad E(X) = pq + q^2 + \frac{p}{q}$$

Exercice 6

1)



$$\forall x \in]a, b[, \exists \delta > 0 \mid x + \delta < b$$

(1)

T.R.I.

$$\forall n \geq 1 : f(x+\delta) = f(x) + \delta f'(x) + \dots + \frac{\delta^n}{n!} f^{(n)}(x) + \int_x^{x+\delta} \frac{(x+\delta-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$$

$$\text{donc } \frac{\delta^n f^{(n)}(x)}{n!} = f(x+\delta) - f(x) - \delta f'(x) - \dots - \frac{\delta^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) - \int_x^{x+\delta} \frac{(x+\delta-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$$

$$\leq 2 \|f\|_\infty \delta^n$$

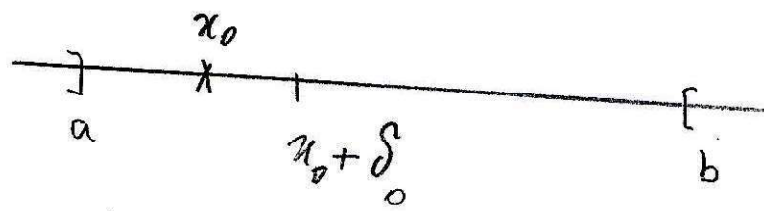
$$\leq 0$$

$$\text{donc } \forall n \geq 1 \quad f^{(n)}(x) \leq \frac{2 \|f\|_\infty n!}{\delta^n}$$

$$\text{pour } n=0 \quad \frac{2 \|f\|_\infty \delta^0}{\delta^0} = 2 \|f\|_\infty \geq \|f\|_\infty \geq f(x)$$

$$\boxed{\exists \delta > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(x) \leq \frac{2 \|f\|_\infty n!}{\delta^n}}$$

2) Soit $x_0 \in]a, b[$



* $\exists \delta_0 > 0 \mid x_0 + \delta_0 < b$ et comme $x_0 + \delta_0 \in]a, b[\exists \delta_1 > 0 \mid$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(x_0 + \delta_0) \leq \frac{2 \|f\|_\infty n!}{\delta_1^n}$$

I.T.L.

$$\forall x \in [x_0, x_0 + \delta_0] \quad \forall n \geq 1 \quad \left| f(x) - \left(\sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i \right) \right| \leq \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec $\Pi_{n+1} = \sup_{t \in [x_0, x]} |f^{(n+1)}(t)| \leq \sup_{t \in [x_0, x]} f^{(n+1)}(t)$ car $f^{(n+1)} \geq 0$ ②

$$\leq f^{(n+1)}(x_0 + \delta_0) \text{ car } f^{(n+1)} \text{ est croissante (} f^{(n+2)} \geq 0 \text{)}$$

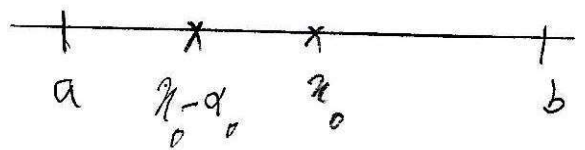
$$\leq \frac{2 \|f\|_\infty}{\delta_1^{n+1}} (n+1)! \quad \text{d'où} \quad ;$$

$$\forall x \in [x_0, x_0 + \delta_0], \forall n \geq 1 \quad \left| f(x) - \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i \right| \leq 2 \|f\|_\infty \left(\frac{x-x_0}{\delta_1} \right)^{n+1}$$

Si $\frac{x-x_0}{\delta_1} < 1 \Leftrightarrow x < x_0 + \delta_1$ alors $\left(\frac{x-x_0}{\delta_1} \right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

CS4 $\forall x \in [x_0, x_0 + \min(\delta_0, \delta_1/2)] \quad f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i$

* $\exists \alpha_0 > 0 \setminus a < x_0 - \alpha_0$
 à gauche



$$\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0] \quad \left| f(x) - \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i \right| \leq \frac{(x_0-x)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [x, x_0]} f^{(n+1)}(t)$$

$$\leq \frac{(x_0-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)$$

$$\leq \left(\frac{x_0-x}{\delta_0} \right)^{n+1} 2 \|f\|_\infty$$

par ≥ 0 et $\nearrow$

Si $\frac{x_0-x}{\delta_0} < 1 \Leftrightarrow x > x_0 - \delta_0$ alors $\left(\frac{x_0-x}{\delta_0} \right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

③

donc $\forall x \in [x_0 - \min(\alpha_0, \frac{\delta_0}{2}), x_0] f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i$

Pour $r = \min(\delta_0, \frac{\delta_1}{2}, \alpha_0, \frac{\delta_0}{2}) > 0$, on a :

$$\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] \subset]a, b[: f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

cl : $f \in \mathcal{C}^\infty$ en $x_0 \in]a, b[$

de + si on reprend les 2 dms. droite et gauche :

à gauche $\frac{x-x_0}{\delta_1} < 1 \Leftrightarrow x < x_0 + \delta_1$ ou $\delta_1 < b - x_0 - \delta_0$

donc $\frac{x-x_0}{\delta_1} < 1 \Leftrightarrow x < x_0 + \delta_1 < x_0 + b - x_0 - \delta_0$

comme le δ_0 de 1) on voit $\forall \delta_0 < b - x_0$, on a

la série de Taylor qui est $\forall x < x_0 + \delta_0$ et ce $\forall \delta_0 < b - x_0$

donc est $\forall x \in [x_0, b[$.

De même à g. la série est $\forall x \in]a, x_0]$

cl $R_{x_0} \geq \min(b - x_0, x_0 - a)$

3) On adapte la d'mo par $f = \tan$ qui ne vérifie

que $\forall n \in [0, \pi/2[\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad f^{(n)}(x) \geq 0$ qui l'on
démontre par récurrence :

$$n=1 \quad f'(x) = 1 + \tan^2 x \geq 0$$

Si $f', f'', \dots, f^{(n)} \geq 0$ sur $[0, \pi/2[$ alors

$$f^{(n+1)}(x) = (f')^{(n)}(x) = (1 + \tan^2 x)^{(n)}$$

$$= 0 + (\tan x \cdot \tan x)^{(n)}$$

$$= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \tan^{(p)}(x) \tan^{(n-p)}(x) \geq 0 \text{ avec l'hyp. de r'c.}$$

$$\geq 0$$

$$\text{donc } \underline{f^{(n+1)} \geq 0}$$

On applique le 1) et le 2) (à droite de x_0) avec

$b \in [0, \pi/2[$: on a $\forall x \in [0, b[$, $\forall b < \pi/2$:

$$\tan x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ avec } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Par injectivité de la fonction $\tan$, cette formule est
valable $\forall x \in]-b, b[$ donc $\tan$ DSE et $R \geq b$, $\forall b < \frac{\pi}{2}$

donc $\tan$ est DSE et $R \geq \frac{\pi}{2}$

Supposons que $R > \frac{\pi}{2}$ alors

$$\forall n \in [0, \frac{\pi}{2}[\quad \tan n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \pi/2} \tan n = \lim_{n \rightarrow \pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\pi/2)^n \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \text{car } \lim_{n \rightarrow \pi/2} \tan n = +\infty$$

$$\text{car } g; n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$c' / [0, R[\text{ donc } \pi/2 \in [0, R[$$

d

$$\tan \text{ est DSE et } R = \frac{\pi}{2}$$

4) L'idée pour passer de $\tan$ à $\tanh$ est d'utiliser les

$$\text{complexes ; } \tanh z = \frac{\sinh(i z) / i}{\cosh(i z)} = -i \tanh(i z)$$

$$\text{or } \forall n \in]-\pi/2, \pi/2[\quad \tanh n = \frac{\sinh n}{\cosh n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\text{donc } \forall n \in]-\pi/2, \pi/2[\quad \cosh n \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sinh n \text{ donc}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) \times \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{avec :}$$

$(\sum c_n z^n)$ DSE de $\cos$ et $(\sum b_n z^n)$ DSE de $\sin$ (6)

D'après le produit de Cauchy, les 3 séries convergent absolument
qd $|z| < \pi$, avec $z \in \mathbb{C}$ et de +

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \delta_n = \sum_{p=0}^{\infty} a_p c_{n-p}.$$

En conséquence $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < \frac{\pi}{2} : \cos z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sin z$

Comme $\cos z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz} \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz+i\pi}$

Si on pose $z = x + iy$, on a $e^{ix-y} = e^{-ix+y+i\pi}$ donc

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-y} = e^y & (\text{module}) \\ x = -x + \pi + 2k\pi & (\text{arg.}) \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

d'où $\forall |z| < \frac{\pi}{2} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{\sin z}{\cos z} = \tan z$ et donc

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \tanh x = -i \tan(in) = -i \sum_{n=0}^{\infty} a_n (in)^n$. or $\tanh$

est impaire donc $a_{2n} = 0$ d'où $\boxed{\tanh x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^{2n+1}}$

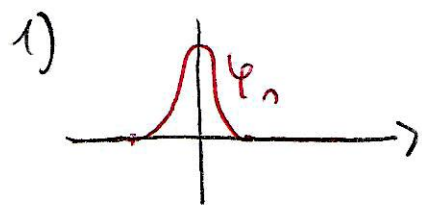
> `series(tan(x), x, 15); series(tanh(x), x, 15);`

$$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11} + \frac{21844}{6081075}x^{13} + O(x^{15})$$

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - \frac{1382}{155925}x^{11} + \frac{21844}{6081075}x^{13} + O(x^{15})$$

exercice 7*

①*



$$\int_{-1}^1 \varphi_n(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t) dt = 1$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad |g_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^1 f(x-t) \varphi_n(t) dt - \int_{-1}^1 f(x) \varphi_n(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{-1}^1 [f(x-t) - f(x)] \varphi_n(t) dt \right| \end{aligned}$$

L'idée est de majorer uniformément $|f(x-t) - f(x)|$, qd $x-t$ et x sont proches ($\forall n$) c'est à dire qd $t \approx 0$, l'n où φ_n est grande (bosse en 0), "sillonnant" l'intégrale de φ_n tend vers 0.

Montrons que f est uniformément c° sur $\mathbb{R}$: $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ $a < b$ et $\forall n \notin [a, b]$ $f(n) = 0$. f est continue sur $[a-1, b+1]$ donc par Heine, elle y est uniformément continue d'où

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \alpha > 0$, que l'on peut supposer $\alpha \leq \frac{1}{2}$ tel que $\forall (n, y) \in [a-1, b+1]$ $|n - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(n) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Il est alors facile de montrer que $\forall (n, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$|x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

②*

$$\text{d'où } \forall x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| = \left| \int_{-1}^{-\alpha} g_n(t) dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} g_n(t) dt + \int_{\alpha}^1 g_n(t) dt \right|$$

$$\text{avec } g_n(t) = [f_n(x-t) - f(x)] \varphi_n(t), \text{ donc}$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f\|_{\infty} \int_{-1}^{-\alpha} \varphi_n(t) dt + \varepsilon \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi_n(t) dt + \|f\|_{\infty} \int_{\alpha}^1 \varphi_n(t) dt$$

$\uparrow$ existe et $\in \mathbb{R}$

$$\leq 2\|f\|_{\infty} \frac{1}{a_n} (1-\alpha^2)^n + \varepsilon \int_{-1}^1 \varphi_n(t) dt$$

$$\leq 2\|f\|_{\infty} \frac{1}{a_n} (1-\alpha^2)^n + \varepsilon, \text{ pb } a_n?$$

$$\text{on } a_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt = 2 \int_0^1 (1-t^2)^n dt = 2 \int_0^1 (1-t)^n \underbrace{(1+t)^n}_{\geq 1} dt$$

$$\geq 2 \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{2}{n+1} \text{ donc pas trop petit!}$$

$$\text{et } \|f_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \varepsilon + \underbrace{2\|f\|_{\infty} \frac{(1-\alpha^2)^n (n+1)}{2}}_{\varepsilon_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \text{ d'où } \exists N \in \mathbb{N} \setminus \forall n \geq N \quad \varepsilon_n \leq \varepsilon \text{ et donc}$$

$$\forall n \geq N : \|f_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq 2\varepsilon \quad \underline{\text{et}} \quad \boxed{(f_n) \text{ c.v., vers } f \text{ sur } \mathbb{R}}$$

$$2) \text{ Soit } f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-t) \varphi_n(t) dt = \int_{-1}^1 g(x-t) \varphi_n(t) dt$$

on soit que (p_n) C.V. vers g sur $\mathbb{R}$.

(3)*

$$0_2 \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad p_n(x) = \int_{x+1}^{x-1} g(u) \varphi_n(x-u) (-du)$$

$$= \int_{x-1}^{x+1} g(u) \varphi_n(x-u) du \quad \text{Or } x-1 \leq -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq x+1 \text{ et}$$

$$\text{donc } \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad p_n(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(u) \varphi_n(x-u) du$$

$$\text{et } (x, u) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2 \Rightarrow x-u \in \underline{[-1, 1]} \text{ d'où :}$$

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad p_n(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(u) \frac{(1-(x-u)^2)^n}{a_n} du \in \underline{\underline{\mathbb{R}[x]}}$$

cf $(p_n|_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]})$ C.V. vers g sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ p_n est polynomiale.

3) Soit f C⁰ sur $[a, b]$ avec $a < b$, en posant :

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), \text{ on se ramène à } g$$

C⁰ sur $[a, b]$ avec $g(a) = g(b)$. Ici, en posant $h(x) = g(x) - g(a)$

on se ramène à h C⁰ sur $[a, b]$ et $h(a) = h(b) = 0$. Enfin

en posant $F(t) = h((b-a)t + \frac{a+b}{2})$ on se ramène à F C⁰ sur

$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ avec $F(-\frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = 0$

Soit (F_n) une suite de fonctions polynomiales qui converge

uniformément vers F sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

(4)*

Comme $h(x) = F\left(\frac{1}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right)$, que $g(x) = h(x) + g(a)$ et

que $f(x) = g(x) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, on a donc :

$$f(x) = F\left(\frac{1}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right) + \underbrace{f(a)}_{=g(a)} + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

D'où on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a, b]$:

$$f_n(x) = F_n\left(\frac{1}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right) + f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

On a : 1) f_n polynomiale sur $[a, b]$

$$2) \|f_n - f\|_{\infty, [a, b]} = \|F_n - F\|_{\infty, [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Alors (f_n) suite de fonctions polynomiales converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Sujet 8*

①

1°) Posons $u_n(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cos(\pi 9^n n)$

* $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n est C^∞ par TG

* $\forall n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n(n)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n = q_n \text{ et } (\sum q_n) \text{ cvg}$

donc $(\sum u_n) \text{ C.N./}\mathbb{R}$ par th. de continuité:

$$W \in C^0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

2°) * $\forall x \in \mathbb{R} \quad |W(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$: W bornée

car la s. est cvg.

* $\forall x \in \mathbb{R} \quad W(x+2) = W(x)$: W est périodique

3°) Voir page ②

4°) Le fait que la série $(\sum u'_n)$ diverge ne permet pas de conclure car $(\sum u'_n) \text{ C.N./}\mathbb{R}$ n'est qu'une condition suffisante mais non nécessaire.

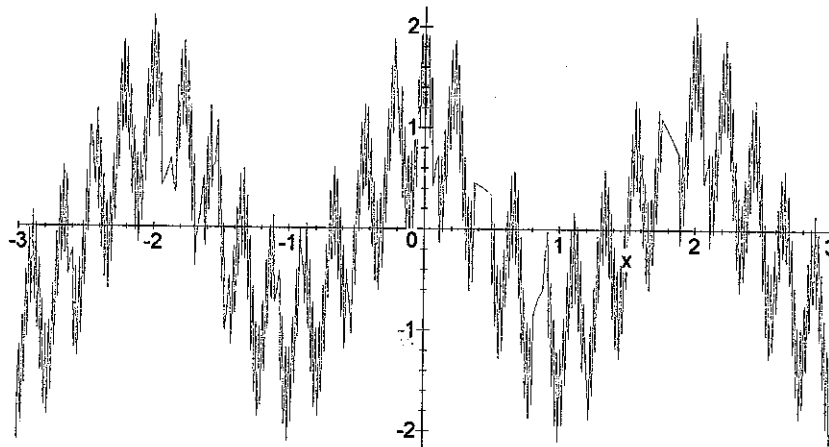
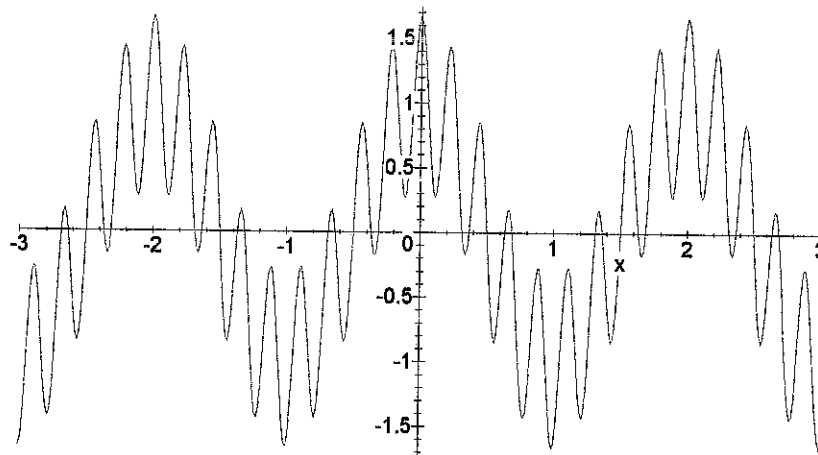
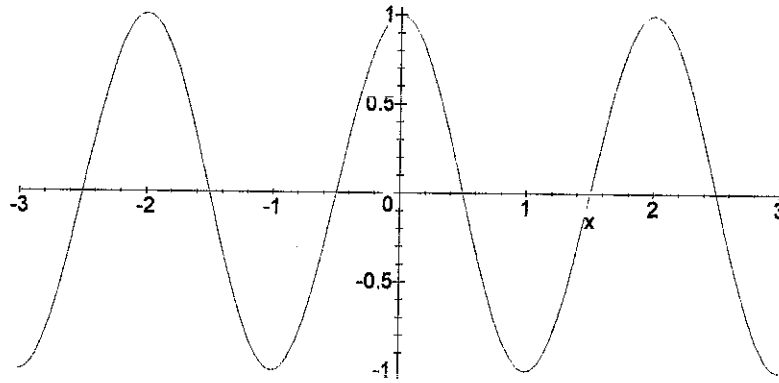
(2)

>

```
> W:=(n,x)->sum((2/3)^p*cos(Pi*9^p*x),p=0..n);
```

$$W := (n, x) \rightarrow \sum_{p=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^p \cos(\pi 9^p x)$$

```
> plot({W(0,x)},x=-3..3);plot({W(1,x)},x=-3..3);plot({W(2,x)},x=-3..3);
```



>

5°) $\forall h \neq 0$

(3)

$$|S_m(h)| \leq \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{2}{3}\right)^n \left| \frac{\omega \pi g'(a+h) - \omega \pi g'(a)}{h} \right|$$

utilisons... l'g A.F. !! ;

$$\begin{aligned} |S_m(h)| &\leq \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{2}{3}\right)^n \underbrace{\left| \frac{\pi g'(a+h) - \pi g'(a)}{h} \right|}_{\leq 1} \\ &\leq \sum_{n=0}^{m-1} \pi 6^{-n} = \pi \frac{6^m - 1}{6 - 1} \leq \frac{\pi 6^m}{5} \end{aligned}$$

d: $\forall m \geq 1, \forall h \neq 0 \quad |S_m(h)| \leq \frac{\pi 6^m}{5}$

6°) analyse: $x = g^m a = p_m + \lambda_m \Rightarrow p_m - \frac{1}{2} \leq x < p_m + \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow p_m \leq h + \frac{1}{2} < p_m + 1$

synthèse posons $p_m = E(g^m a + \frac{1}{2})$ & $\lambda_m = g^m a - p_m$
E(x) : partie entière de x

On a $p_m \in \mathbb{Z}$ et $\lambda_m \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

7°) $h_m = \frac{-\lambda_m + 1}{g^m}$ et $h'_m = \frac{-\lambda_m - 1}{g^m}$ conviennent.

de + : $h_m \times h'_m = \frac{\lambda_m^2 - 1}{g^{2m}} < 0$ car $|\lambda_m| \leq 1/2$ donc $\lambda_m^2 \leq \frac{1}{4}$

d h_m & h'_m existent et sont de signes contraires (4)

$$\begin{aligned}
 8') \quad \forall n \geq m, \cos \pi g^n(a+h) &= \cos(\pi g^{n-m} g^m(a+h_m)) \\
 &= \cos(\pi g^{n-m}(p_m + \lambda_m) + \pi g^{n-m}(-\lambda_m + 1)) \\
 &= \cos(\pi g^{n-m} p_m + \pi g^{n-m}) \quad \text{comme } g^{n-m} \text{ est impair} \\
 &= + \cos(\pi g^{n-m} p_m) \quad \text{or } \cos k\pi = (-1)^k \\
 &= (-1)^{g^{n-m} p_m} \quad \text{et } (-1)^{gk} = ((-1)^g)^k = (-1)^k \\
 &= (-1)^{p_m+1} \quad \text{on fait de m avec } h'_m
 \end{aligned}$$

cl': $\forall n \geq m, \cos \pi g^n(a+h) = (-1)^{p_m+1}$ pour $h = h_m$ et $h = h'_m$

$$\begin{aligned}
 9') \quad R_m(h_m) &= \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{(-1)^{p_m+1} - \cos \pi g^{n-m}(p_m + h_m)}{h_m} \\
 &= \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{(-1)^{p_m+1} - (-1)^{g^{n-m} p_m} \cos(\pi g^{n-m} h_m)}{h_m} \\
 &= \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{(-1)^{p_m+1} (1 + \cos(\pi g^{n-m} h_m))}{h_m}
 \end{aligned}$$

$$\text{donc } R_m(h_m) = \frac{(-1)^{p_m+1}}{h_m} \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n (1 + \omega(\pi g^{n-m} \lambda_m)) \quad (5)$$

$$\text{donc } |R_m(h_m)| = \frac{g^m}{|- \lambda_m + 1|} \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n (1 + \omega(\pi g^{n-m} \lambda_m))$$

$$\geq \frac{2}{3} g^m \sum_{n=m}^{\infty} \underline{\hspace{10em}}$$

$$\hookrightarrow \text{car } |- \lambda_m + 1| \leq \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \text{ dc } \frac{1}{|- \lambda_m + 1|} \geq \frac{2}{3}$$

$$\text{Comme } \begin{cases} 1 + \omega(\pi \lambda_m) \geq 1 & \text{car } |\lambda_m \pi| \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega(\pi \lambda_m) \geq 0 \\ \text{et} \\ \forall n > m \quad 1 + \omega(\pi g^{n-m} \lambda_m) \geq 1 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } R_m(h_m) \geq \frac{2}{3} g^m \left(\left(\frac{2}{3}\right)^m + 0 + 0 + \dots \right) = \frac{2}{3} 6^m$$

on a la même chose pour h'_m

$$\text{d } \boxed{|R_m(h_m)| \geq \frac{2}{3} 6^m \text{ \& } |R_m(h'_m)| \geq \frac{2}{3} 6^m}$$

$$10) |R_m(h_m)| \geq \frac{2}{3} 6^m \geq \frac{\pi}{5} 6^m \text{ car } \frac{\pi}{5} = 0,62... \leq \frac{2}{3} = 0,66...$$

$$\text{et } \frac{\pi}{5} 6^m \geq |S_m(h_m)| \text{ avec le 5) donc } \boxed{|R_m(h_m)| \geq |S_m(h_m)|}$$

idem pour h'_m .

(6)

$$11') \left| \frac{W(a+h_m) - W(a)}{h_m} \right| = |S_m(h_m) + R_m(h_m)|$$

$$\geq ||R_m(h_m)| - |S_m(h_m)|| = |R_m(h_m)| - |S_m(h_m)|$$

$$\geq \frac{2}{3} 6^n - \frac{\pi}{5} 6^n = \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{5}\right) 6^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

$$\text{or } |h_m| = \left| \frac{-\lambda_m + 1}{g_m} \right| \leq \frac{1/2}{g_m} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ donc :}$$

$$h_m \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ et } \left| \frac{W(a+h_m) - W(a)}{h_m} \right| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

Par contreposée du critère précédent : W non dérivable en a

de plus, on a le résultat pour h'_m . Vu l'expression

de $R_m(h_m)$ à haut de la page (5), $R_m(h_m)$ et

$R_m(h'_m)$ sont de signes contraires donc

$\frac{W(a+h_m) - W(a)}{h_m}$ et $\frac{W(a+h'_m) - W(a)}{h'_m}$ sont de signes

contraires et tendent en module vers l'infini.

On conclut que $h \mapsto \frac{W(a+h) - W(a)}{h}$ n'admet pas
 de limite $\neq 0$ et donc W n'admet pas de tangente même
 verticale en a .

Enfin comme h_m & h'_m sont de signes contraires, W
 n'est pas non plus dérivable à gauche et à droite

d W non dérivable en a , $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\infty/\mathbb{R}$

12) * Si W était lipschitzienne il existerait $k \geq 0$:

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad |W(u) - W(v)| \leq k |u - v|$$

Pour $u = a + h_m$ & $v = a$ notations de 5°-11°),

$$\forall m \geq 1: \left| \frac{W(a + h_m) - W(a)}{h_m} \right| \leq k, \text{ absurde car tend vers}$$

$+\infty$ d'où $\nexists m \rightarrow \infty$ d : W non lipschitzienne

* L'idée : W unif. c.m. $[0, 2]$ et 2-périodique.

Si W étant continue sur $[-1, 3]$ elle y est uniformément
 continue (théorème de Heine), donc

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall (u, v) \in [-1, 3]^2 \quad |u - v| \leq \alpha \Rightarrow |W(u) - W(v)| \leq \epsilon$$

⑧ Qu'il s'agit de diminuer ε on peut supposer $\varepsilon \leq 1$

$$\forall (n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |n - y| \leq \varepsilon$$

$$\exists n \in \mathbb{Z} \mid n - 2n \in [-1, 2[\text{ avec } n = E(\frac{y}{2})$$

$$\text{En notant } y - 2n :$$

$$n - \varepsilon \leq y \leq n + \varepsilon$$

$$-1 - \varepsilon \leq n - \varepsilon - 2n \leq y - 2n \leq n + \varepsilon - 2n < 2 + \varepsilon \leq 3$$

$$\text{on en déduit } (n - 2n, y - 2n) \in [-1, 3]^2 \text{ et}$$

$$|(n - 2n) - (y - 2n)| = |n - y| \leq \varepsilon \text{ donc } \underline{|w(n) - w(y)| \leq \varepsilon}$$

par 2-périodicité

$$\text{d'où : } \boxed{w \text{ est uniformément continue sur } \mathbb{R}_1}$$

13°) Considérons $g_n = \frac{1}{2^n} w$, par TG, comme $w = 2^n g_n$, g_n

est C^0 nulle part dérivable sur $\mathbb{R}_1$,

$$\forall n \in [a, b] : |g_n(n)| \leq \frac{1}{2^n} 3 = \varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ donc } \|g_n - 0\|_{\infty, \mathbb{R}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$d'après (g_n) \text{ c.v. } \forall n \in [a, b]$$

⑨

Soit f continue sur $[a, b]$. Il existe une suite (φ_n) de fonctions polynômiales (Stone Weierstrass) qui converge uniformément

vers f sur $[a, b]$. Posons $f_n = \varphi_n + g_n$. Par TA, f_n est continue et nulle part dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$0 \leq \|f_n - f\|_{\infty, [a, b]} \leq \underbrace{\|\varphi_n - f\|_{\infty, [a, b]}}_{\downarrow n \rightarrow \infty, 0} + \underbrace{\|g_n - 0\|_{\infty, [a, b]}}_{\downarrow n \rightarrow \infty, 0}$$

Par théorème d'encadrement, $\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

cl' : (f_n) suite de fct C^0 & nulle part dérivable sur $\mathbb{R}$
 vérifie (f_n) C.U. vers f sur $[a, b]$.

Interprétation (en) : $A = \{ \text{fonction } C^0 \text{ et nulle part dérivable} \}$ est
 dense dans $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$ muni de la $\|\cdot\|_{\infty}$ sur $[a, b]$.