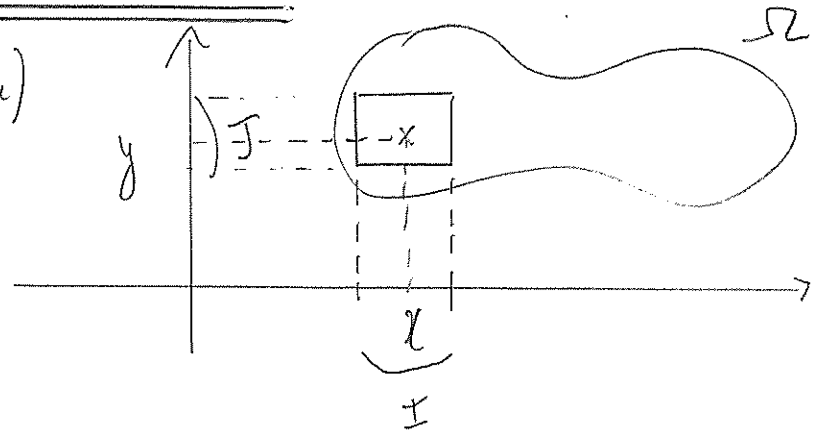
Centrale PSI 2015

I A 1 a)



Ω est ouvert pour toute norme de $\mathbb{R}^2$ (ev de dim. finie), donc $\exists r > 0 \setminus B_F^\infty((x,y), r) \subset \Omega$ pour la norme infinie ($\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|)$).

Or $B_F^\infty((x,y),r) = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \setminus |X-x| \leq r \text{ et } |Y-y| \leq r\}$

$= [x-r, x+r] \times [y-r, y+r]$

d'où $\boxed{I =]x-r, x+r[\text{ et } J =]y-r, y+r[\text{ conviennent}}$

b) Avec les notations du préambule et le a) :

$$\forall x \in I, \ \forall y \in J : \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\k\leq n}} \sum_{\substack{\ell\in\mathbb{N}\\ \ell\leq n}} \alpha_{k,\ell}\, x^k y^\ell = 0$$

Fixons un $x \in I$: $\forall y \in J$: $\displaystyle\sum_{\substack{\ell\in\mathbb{N}\\ \ell\leq n}} \Big[\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\k\leq n}} \alpha_{k,\ell}\, x^k\Big] y^\ell = 0$

Comme J est infini, $\forall l \in \mathbb{N}, l \leq n : \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \leq n}} \alpha_{k,l} x^k = 0$ (2)

Ceci est vrai pour tout $x \in I$ et comme I infini :

$$\forall l \in \mathbb{N}, l \leq n, \forall k \in \mathbb{N}, k \leq n : \alpha_{k,l} = 0$$

d'où : $\boxed{P \text{ est nul (sur } \mathbb{R}^2)}$

A2) Non ! exemple $\underline{P(x,y) = x - y}$ et $\Omega = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{\Omega \text{ infini et } P \text{ non nul}}$

B1) Par définition $\mathcal{P}_m = \text{vect}(P_{k,l})_{k+l \leq m}$ où

$P_{k,l}(x,y) = x^k y^l$. Montrons que $(P_{k,l})_{\substack{(k,l) \in [\![0,m]\!]^2 \\ k+l \leq m}}$ est libre ;

c'est exactement le A1b).

Reste à dénombrer cette famille :

Soit $I_m = \{(k,l) \in \mathbb{N} \setminus k + l \leq m\}$

$$= \coprod_{n=0}^{m} \{(k,l) \in \mathbb{N} \setminus k + l = n\}$$

$$= \{(0,0)\} \amalg \{(0,1),(1,0)\} \amalg \cdots \amalg \{(0,m),(1,m-1),\cdots,(m,0)\}$$

d'où $|I_m| = 1 + 2 + \cdots + m+1 = \dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$

d'où $\boxed{\mathcal{P}_m \text{ de dim. finie et } \dim \mathcal{P}_m = \frac{(m+1)(m+2)}{2}}$

B2) $P = x$, $P = y$ conviennent pour le d° 1

$P = xy$, $P = x^2 - y^2$ conviennent pour le d° 2.

B3 a) L'application Δ est clairement linéaire de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ (la dérivation est linéaire) et comme $\operatorname{Ker} \Delta = \underline{\underline{\mathcal{H}}}$: ensemble des polynômes harmoniques.

d'où $\boxed{\mathcal{H} \text{ est un sev de } \mathcal{P}}$

b) On a $\Delta_m(\mathcal{P}_m) \subset \mathcal{P}_{m-2}$, $\forall m \geq 2$ $\left(\Delta(x^k y^l) = k(k-1)x^{k-2}y^l + l(l-1)x^k y^{l-2}\right)$

Par le théorème du rang :

$\dim \mathcal{P}_m = \dim \operatorname{Ker} \Delta_m + \operatorname{rg} \Delta_m$ et $\operatorname{rg} \Delta_m \leq \dim \mathcal{P}_{m-2}$

d'où $\dim \operatorname{Ker} \Delta_m \geq \dim \mathcal{P}_m - \dim \mathcal{P}_{m-2} = |I_m| - |I_{m-2}|$
$= m+1+m$ avec B1)

d'où $\boxed{\dim \operatorname{Ker} \Delta_m \geq 2m+1}$

c) Comme $\forall m \geq 2$ $\operatorname{Ker} \Delta_m \subset \operatorname{Ker} \Delta = \mathcal{H}$,

d'où $\boxed{\mathcal{H} \text{ est de dimension infinie}}$

④

I C 1) Comme $\Delta(f) = 0$, $\boxed{H(x,y) = xy}$

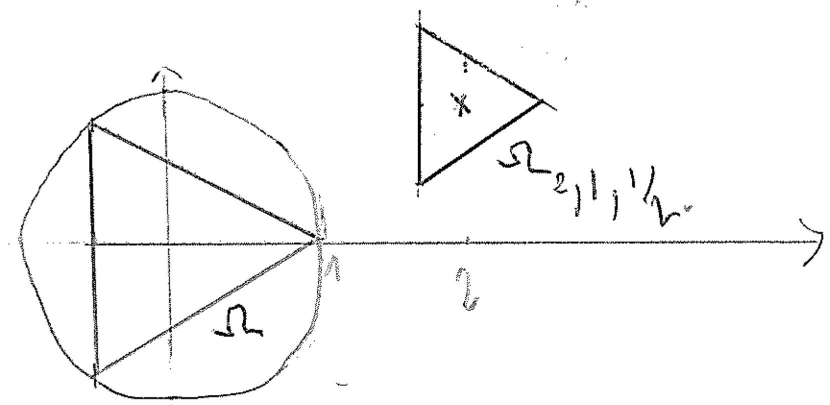
C 2) * $\Delta(f)(x,y) = 12x^2 - 12y^2$.

* $\forall (x,y) \in C(0,1)$: $x^2 + y^2 = 1$ donc

$$x^4 - y^4 = (x^2+y^2)(x^2-y^2) = x^2 - y^2$$

Or $\Delta(x^2 - y^2) = 2 - 2 = 0$ d'où $\boxed{H(x,y) = x^2 - y^2 \text{ convient}}$

II A



B 1) Par le théorème de Schwarz :

$$\Delta(\partial_1 f) = \partial_1(\Delta f) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta(\partial_2 f) = \partial_2(\Delta f) = 0$$

B 2) Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto \lambda(x,y)$ et $t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (x,y) + (x_0, y_0)$

et $\varphi = t \circ h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longmapsto \lambda(x,y) + (x_0, y_0)$$

On a $\boxed{t \text{ : translation de vecteur } (x_0,y_0),\ h \text{ : homothétie de rapport } \lambda \text{ et } \varphi(\Omega) = \Omega_{x_0,y_0,\lambda}}$

Autre interprétation :

Soit $s : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z = x+iy \longmapsto \lambda z + x_0 + iy_0$$

En identifiant $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\boxed{s \text{ similitude de rapport } \lambda \text{ et } s(\Omega) = \Omega_{x_0,y_0,\lambda}}$$

Ouvert * φ bijective et $\psi = \varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad (\psi = h^{-1} \circ t^{-1})$

$\lambda \neq 0$ $\quad (x,y) \longmapsto \frac{1}{\lambda}\left((x,y) - (x_0,y_0)\right)$

ψ est continue sur $\mathbb{R}^2$ par TG et $\Omega_{x_0,y_0,\lambda} = \psi^{-1}(\Omega)$

d'où $\boxed{\Omega_{x_0,y_0,\lambda} \text{ ouvert de } \mathbb{R}^2}$

* Avec les boules : $\forall (X,Y) = \lambda(x,y) + (x_0,y_0) \in \Omega_{x_0,y_0,\lambda}$

$\lambda \neq 0$ $\left(\begin{array}{l} \exists r>0 \setminus B_F((x,y),r) \subset \Omega \quad (\Omega \text{ ouvert}) \\ \text{d'où } B_F((X,Y),|\lambda| r) \subset \Omega_{x_0,y_0,\lambda} \end{array} \right.$ car si $(X',Y') \in B_F((X,Y),|\lambda| r)$

$(X',Y') = \lambda(x',y') + (x_0,y_0)$ $\left(\text{avec } x' = \frac{X'-x_0}{\lambda} \text{ et } y' = \frac{Y'-y_0}{\lambda}\right)$

et $\|(X',Y') - (X,Y)\|_2 = |\lambda| \, \|(x',y') - (x,y)\|_2 \leq |\lambda| r$

donc $(x',y') \in B_F((x,y),r) \subset \Omega$ donc $(X',Y') \in \Omega_{x_0,y_0,\lambda}$

d'où $\underline{\Omega_{x_0,y_0,\lambda} \text{ ouvert}}$

B 3) Notons $G(x,y) = g(\lambda(x,y) + (x_0, y_0))$ C^2 sur Ω par T.G. (6)

$$\Delta G(x,y) = \lambda^2 \left(\Delta g(\lambda(x,y) + (x_0,y_0))\right) = 0$$

d'où $\boxed{G \text{ harmonique sur } \Omega}$

C1) h_1 et h_2 sont $\underline{C^2}$ sur $\underbrace{\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}}_{\text{ouvert car } \{(0,0)\} \text{ fermé}}$ par T.G.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$$\partial_1 h_1(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad \partial_{1,1} h_1(x,y) = \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\partial_2 h_1(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad \partial_{2,2} h_1(x,y) = \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{4y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

d'où $\Delta h_1(x,y) = \frac{4}{x^2+y^2} - 4\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$

d'où : $\boxed{h_1 \text{ est harmonique sur } \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}}$

Comme $h_2 = \frac{1}{2}\partial_1 h_1$, avec le II B1 :

d'où : $\boxed{h_2 \text{ est harmonique sur } \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}}$

C2) Notons H la fonction de cette question, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

$$H(x,y) = \frac{\cancel{1} - (x^2 + y^2 + \cancel{1} + 2\cos t\, x + 2\sin t\, y)}{x^2+y^2}$$

$$= -1 + \cos t\, \partial_1 h_1(x,y) + \sin t\, \partial_2 h_1(x,y)$$

Par combinaison linéaire et II B1, $\boxed{H \text{ est harmonique sur } \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}}$

II D1) Avec la notation du C2), $N_t(x,y) = H(x - \cos t, y - \sin t)$.

Comme $(x,y) \in D(0,1)$: disque ouvert, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$(x - \cos t, y - \sin t) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, d'où :

N_t est définie et C^2 sur $D(0,1)$ (par TG)

Avec $\lambda = 1$, $(x_0, y_0) = (-\cos t, -\sin t)$, le II B3 et II C2) :

d'où $\boxed{N_t \text{ est harmonique sur } D(0,1)}$

D2) Par TG et parce que le dénominateur ne s'annule pas,

d'où $\boxed{t \longmapsto N(x,y,t) \text{ définie et continue sur } [0, 2\pi]}$

D3) Analyse

$$-1 + \frac{\alpha}{1 - ze^{-it}} + \frac{\beta}{1 - \bar{z}e^{it}} = \frac{\overbrace{-|1 - ze^{-it}|^2 + \alpha(1 - \bar{z}e^{it}) + \beta(1 - ze^{-it})}^{= X}}{|1 - ze^{-it}|^2}$$

$$X = -(1 + |z|^2 - \bar{z}e^{it} - ze^{-it}) + \alpha(1 - \bar{z}e^{it}) + \beta(1 - ze^{-it})$$

$$= -1 - |z|^2 + \alpha + \beta + \bar{z}e^{it}(1 - \alpha) + ze^{-it}(1 - \beta)$$

Cqs Si $\alpha = \beta = 1$: $X = -1 - |z|^2 + 2 = 1 - |z|^2$

le numérateur de $N(x,y,t)$

d'où : $\boxed{N(x,y,t) = -1 + \frac{1}{1-ze^{-it}} + \frac{1}{1-\bar{z}e^{it}}}$

D 4) Comme $(x,y) \in D(0,1)$, $|z|<1$ et donc

$$\frac{1}{1-ze^{-it}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{-int}$$

Posons $u_n(t) = z^n e^{-int}$, u_n C^0 sur $[0,2\pi]$, $\forall t \in [0,2\pi]$:

$$|u_n(t)| = |z|^n \text{ et } \left(\sum |z|^n\right) \text{ cvg donc } \left(\sum u_n\right) \text{ C.N. } / [0,2\pi].$$

Par thm d'intégration :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-ze^{-it}}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-int}\,dt}_{\substack{=0 \text{ si } n\geq 1 \\ =2\pi \text{ si } n=0}} = 2\pi$$

De même ou par conjugaison, $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\bar{z}e^{it}}\,dt = 2\pi$

d'où $\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(x,y,t)\,dt = -1 + 1 + 1 = 1}$

III A 1 a) Posons $g(x,t) = N(x,y,t)\, f(\cos t, \sin t)$

* $g(x,\cdot)$ définie, continue et intégrable sur $I = [0,2\pi]$.
* g 2 fois dérivable sur $J =]-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}[$ $\quad (x^2+y^2<1)$

et $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ sont continues % à x et t

* Soit S un segment de J, $K = S \times \{y\} \times [0,2\pi]$ compact

et par TCD A N bornée sur K et f sur $C(0,1)$ (lui aussi compact).

d'où $\forall (x,y,t) \in K : |N(x,y,t) f(\cos t, \sin t)| \leq M = \varphi(t)$

et φ intégrable sur $[0, 2\pi]$.

d'où N_f admet une dérivée partielle $\partial_{11} N_f$

De plus $\partial_{11} N_f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_{11} N(x,y,t) f(\cos t, \sin t)\, dt$

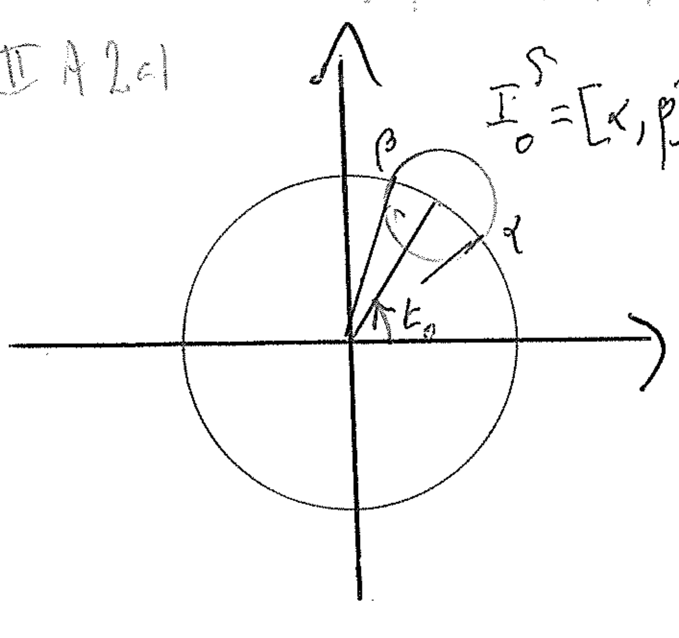
De même $\partial_{ij} N_f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_{ij} N(x,y,t) f(\cos t, \sin t)\, dt$

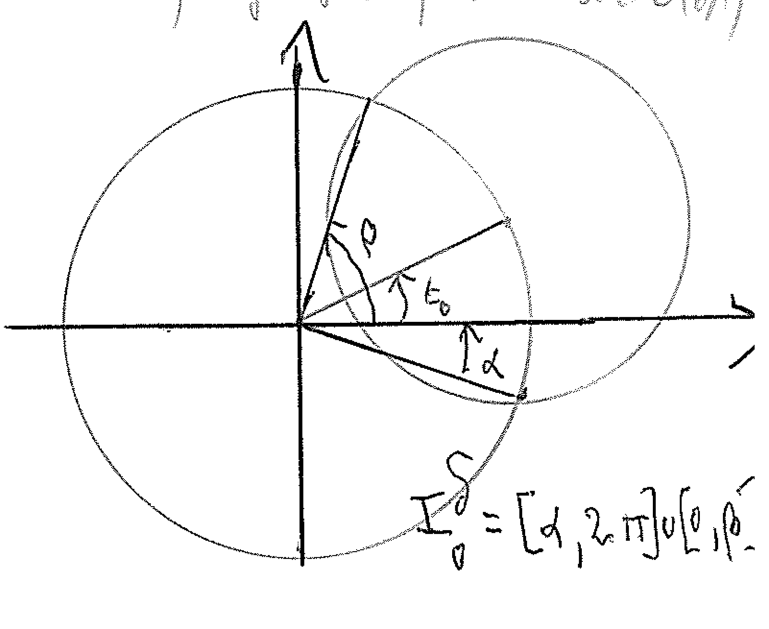
b) On a donc $\Delta N_f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\Delta N(x,y,t)}_{=0} f(\cos t, \sin t)\, dt$

d'où N_f harmonique sur $D(0,1)$

Remarque : Le fait que les dérivées secondes soient C^0 prouve que les dérivées premières sont C^0 et donc que f est C^1 puis C^2 sur $D(0,1)$

III A 2 a)





$\|(\cos t, \sin t) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 = |e^{it} - e^{it_0}|$

$= \left|2ie^{i\frac{t+t_0}{2}} \sin\frac{t-t_0}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{t-t_0}{2}\right|$

Etudions $\varphi(t) = \sin\frac{t-t_0}{2}$, $\varphi'(t) = 2\cos\frac{t-t_0}{2}$ pour $t \in [0, 2\pi]$

t	$t_0-2\pi$		$t_0-\pi$		t_0		$t_0+\pi$		$t_0+2\pi$
φ'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
φ	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

d'où en posant $\psi(t) = 2\left|\sin\frac{t-t_0}{2}\right|$, on a :

t	$t_0-2\pi$	α	$t_0-\pi$	β	t_0	β'	$t_0+\pi$	γ	$t_0+2\pi$
ψ	0	δ	2	δ	0	δ	2	δ	0

1er cas $\delta \geq 2$ alors $I_0^\delta = [0, 2\pi]$

2ème cas $0 < \delta < 2$, alors :

$I_0^\delta = \left([t_0-2\pi, \alpha] \cup [\beta, \beta'] \cup [\gamma, t_0+2\pi]\right) \cap [0, 2\pi]$

$= [t_0-2\pi, \alpha] \cap [0, 2\pi] \sqcup [\beta, \beta'] \cap [0, 2\pi] \sqcup [\gamma, t_0+2\pi] \cap [0, 2\pi]$

Si $[t_0-2\pi, \alpha] \cap [0, 2\pi] \neq \emptyset$ alors $t_0 - 2\pi \leq 2\pi$ et $\alpha \geq 0$

donc $t_0 - \pi > \alpha \geq 0 \Rightarrow t_0 \geq \pi \Rightarrow t_0 + \pi > 2\pi$ d'où

1 $[\gamma, t_0+2\pi] \cap [0, 2\pi] = \emptyset$

De même si $[\alpha, t_0 + 2\pi] \cap [0, 2\pi] \neq \emptyset$ alors

$$[t_0 - 2\pi, \alpha] \cap [0, 2\pi] = \emptyset$$

d'où $\boxed{I_0^\delta \text{ est constitué de 1 ou 2 segments disjoints}}$

b) f étant continue sur $C(0,1)$, elle l'est en $(\cos t_0, \sin t_0)$:

pour ce $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \setminus \forall (x,y) \in C(0,1)$:

$$\|(x,y) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \leq \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(\cos t_0, \sin t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{1}{2\pi}$$

d'où $\left| \int_{t \in I_0^\delta} N(x,y,t)\left(f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0)\right) dt \right|$

$$\leq \int_{t \in I_0^\delta} \underbrace{N(x,y,t)}_{\geq 0} \times \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{1}{2\pi} \, dt \leq \int_{t \in [0,2\pi]} \frac{1}{2\pi} N(x,y,t) \frac{\varepsilon}{2} \, dt \overset{\text{II D 4)}}{=} \frac{\varepsilon}{2}$$

car $I_0^\delta \subset [0, 2\pi]$ et $N \geq 0$

d'où $\left| \int_{t \in I_0^\delta} N(x,y,t)\left(f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0)\right) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

c) Si $\|(\cos t, \sin t) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \leq \|(\cos t, \sin t) - (x,y)\|_2 + \|(x,y) - (\cos t_0, \sin t_0)\|$

$$\leq \|(\cos t, \sin t) - (x,y)\|_2 + \delta/2$$

On a donc $\|(\cos t, \sin t) - (x,y)\|_2 \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} > 0$

Or $\|(\cos t, \sin t) - (x,y)\|_2 = (x-\cos t)^2 + (y - \sin t)^2 \geq \frac{\delta^2}{4}$

On conclut avec la définition de N (II D) :

d'où $\boxed{|N(x,y,t)| \leq \frac{4}{\delta^2}(1-(x^2+y^2))}$

d) Avec la question précédente et en imposant $\eta \leq \frac{\delta}{2}$,

$$\left| \int_{t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta = J} N(x,y,t)\left(f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0)\right) dt \right|$$

$$\leq \int_J \frac{4}{\delta^2}(1-(x^2+y^2)) \times 2\|f\|_{\infty, C(0,1)} \, dt$$

$\leq \int_0^{2\pi}$ ——————— dt car $J \subset [0, 2\pi]$ et tout est positif

$$\leq \frac{16}{\delta^2}\|f\|_\infty \times (1-(x^2+y^2))$$

Or $1 - (x^2+y^2) = \|(\cos t_0, \sin t_0)\|_2 - \|(x,y)\|_2$

$\leq \left| \|(\cos t_0, \sin t_0)\|_2 - \|(x,y)\|_2 \right|$

$\leq \|(\cos t_0, \sin t_0) - (x,y)\|_2$ (inégalité Δ inversée)

Cqs il suffit que $\frac{16}{\delta^2}\|f\|_\infty (1-(x^2+y^2)) \leq \varepsilon/2$ soit :

(13)

$$1-(x^2+y^2) \leq \frac{\varepsilon}{32}\frac{\delta^2}{\|f\|_\infty} \quad (\text{si } f=0, \|f\|_\infty = 0 : \text{trivial})$$

d) $\boxed{\text{pour } \eta = \min\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon\delta^2}{32\|f\|_\infty}\right) : \left|\int_{t\in[0,2\pi]\setminus I_0^\delta} N(x,y,t)\,|f(\cos t,\sin t)-f(\cos t_0,\sin t_0)|\,dt\right| \leq \varepsilon/2}$

A3) Soit $(x_0,y_0)\in C(0,1)$, $\exists t_0\in[0,2\pi] \mid (x_0,y_0)=(\cos t_0,\sin t_0)$

$$\forall (x,y)\in\bar{D}(0,1) : |u(x,y)-u(x_0,y_0)| = \begin{cases} |f(x,y)-f(x_0,y_0)| & \text{si } (x,y)\in C(0,1) \\ |N_f(x,y)-f(x_0,y_0)| & \text{si } (x,y)\in D(0,1)\end{cases}$$

Soit $\varepsilon>0$

* Comme f est C^0 sur $C(0,1)$: $\exists \alpha>0 \mid \forall (x,y)\in C(0,1)$:

$$\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_2 \leq \alpha \Rightarrow |f(x,y)-f(x_0,y_0)| \leq \varepsilon$$

* Si $(x,y)\in D(0,1)$ avec II D 4) et III 2 b) et d) : $\exists \eta>0 \mid$

$$|N_f(x,y)-f(x_0,y_0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(x,y,t) f(\cos t,\sin t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(x,y,t) f(\cos t_0,\sin t_0)\,dt\right|$$

$$\leq \underset{b)}{\frac{\varepsilon}{2}} + \underset{d)}{\frac{\varepsilon}{2}} \leq \varepsilon \quad \text{dès que } \|(x,y)-(\cos t_0,\sin t_0)\|_2 \leq \eta.$$

cqs Posons $\beta=\min(\alpha,\eta)>0$: $\forall (x,y)\in\bar{D}(0,1)$,

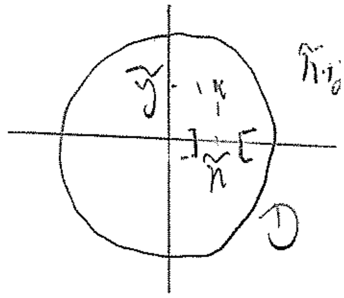
$$\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_2 \leq \beta \Rightarrow |u(x,y)-u(x_0,y_0)| \leq \varepsilon$$

d'où $\boxed{u \text{ continue sur } C(0,1)}$

Cqs u est continue sur $\overline{D}(0,1)$, harmonique sur $D(0,1)$ (IIIA1b) et coïncide avec f sur $C(0,1)$: d'où $\boxed{u \in D_f}$

B1a) Fixons $\tilde{y}$ et étudions localement en $\tilde{x}$ u_n.

$\exists \alpha > 0 \setminus \,]\tilde{x}-\alpha, \tilde{x}+\alpha[\times \{\tilde{y}\} \subset D(0,1)$.



Posons $\varphi :]\tilde{x}-\alpha, \tilde{x}+\alpha[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto u_n(x, \tilde{y})$

On a $\varphi'(\tilde{x}) = \partial_1 u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \left(= \frac{\partial u_n}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y})\right) = 0$ (pt critique)

et $\varphi''(\tilde{x}) = \partial_{11} u_n(\tilde{x}, \tilde{y})$ $\left(\text{car } \varphi'(x) = \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, \tilde{y})\right)$

Supposons que $\partial_{11} u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) > 0$, on a alors localement en $\tilde{x}$ le tableau de variations de φ.

x	$\tilde{x}-\alpha$	$\tilde{x}-\beta$	$\tilde{x}$	$\tilde{x}+\beta$	$\tilde{x}+\alpha$
φ''			$+$		
φ'		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
φ		$\searrow$		$\nearrow$	

donc $\forall x \in]\tilde{x}-\beta, \tilde{x}+\beta[$, $x \neq \tilde{x}$: $\varphi(x) < \varphi(\tilde{x})$ soit

$u_n(x, \tilde{y}) < u_n(\tilde{x}, \tilde{y})$: absurde, $(\tilde{x}, \tilde{y})$ max. local d'où $\boxed{\partial_{11} u_n(\tilde{x},\tilde{y}) \leq 0}$

b) On a $\Delta u_n(\tilde{x},\tilde{y}) = \Delta u(\tilde{x},\tilde{y}) + \frac{2}{n} + \frac{2}{n} = \frac{4}{n} > 0$

Par contraposée, $\boxed{u_n \text{ n'admet pas de max local sur } D(0,1)}$

B2) u_n est continue sur le compact $\bar{D}(0,1)$, donc par T.B.A., il existe $(a,b) \in \bar{D}(0,1) \setminus (a,b)$ maximum global de u_n sur $\bar{D}(0,1)$. Avec la question précédente, (a,b) ne peut appartenir à $D(0,1)$, donc $(a,b) \in C(0,1)$ d'où

$\forall (x,y) \in D(0,1) \quad u_n(x,y) \leq u_n(a,b) = 0 + \frac{1}{n}(a^2+b^2) = \frac{1}{n}$

d'où $\boxed{\forall (x,y) \in D(0,1) : u_n(x,y) \leq \frac{1}{n}}$

B3) * u est nulle sur $C(0,1)$.

* $\forall (x,y) \in D(0,1)$ avec $n \to \infty$: $\underline{u(x,y) \leq 0}$

* Si $u \in D_f$, $-u \in D_f$ car $-u$ est harmonique$/_{D(0,1)}$ et coïncide avec $-f = f = 0$ sur $C(0,1)$, donc $\forall (x,y) \in D(0,1)$ $-u(x,y) \leq 0$ soit $u(x,y) \geq 0$

d'où $\boxed{\forall (x,y) \in \bar{D}(0,1) : u(x,y) = 0}$

III c) Soit $(u,v) \in \mathcal{D}_f^2$, posons $w = u - v$. w est harmonique par linéarité sur $D(0,1)$ et $\forall (x,y) \in C(0,1)$, $w(x,y) = f(x,y) - f(x,y) = 0$ donc $w = 0$ soit $u = v$ cqs : $|\mathcal{D}_f| \leq 1$. Avec III A 3) :

d'où $\boxed{|\mathcal{D}_f| = 1}$

IV A 1) * ϕ_{m-2} est bien définie et $\phi_{m-2} = \Delta \circ \Psi$ où $\Psi(Q) = \overline{Q}$. Ψ et Δ sont linéaires donc ϕ_{m-2} linéaire

* si $d^\circ Q \leq m-2$, $d^\circ \overline{Q} \leq m-2+2 = m$ donc $d^\circ \phi_{m-2}(Q) \leq m-2$

d'où $\mathrm{Im}\, \phi_{m-2} \subset \mathcal{P}_{m-2}$

* si $\phi_{m-2}(Q) = 0$, si $d^\circ \overline{Q} = k \geq 2$, $d^\circ \Delta\overline{Q} = k-2$, or $\Delta\overline{Q} = 0$, donc $d^\circ \overline{Q} < 2$ d'où $d^\circ Q < 0$ soit $Q = 0$

d'où $\boxed{\phi_{m-2} \text{ injective}}$

A2) On a donc $\tilde{\phi}_{m-2} : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}_{m-2} & \longrightarrow & \mathcal{P}_{m-2} \\ Q & \longmapsto & \Delta\overline{Q} \end{array}$ qui est définie, linéaire et injective donc bijective car $\mathcal{P}_{m-2}$ de dim. finie.

On cherche P tel que $P+\overline{T}$ soit harmonique, soit

$$\Delta P + \phi_{m-2}(T) = 0 \iff \phi_{m-2}(T) = -\Delta P$$

Comme $P \in \mathcal{P}_m$, $-\Delta P \in \mathcal{P}_{m-2}$ et la bijectivité donne :

d'où $\boxed{\exists (!) T \in \mathcal{P}_{m-2} \mid P+(1-x^2-y^2)T \text{ harmonique}}$

A3) Avec le III C et le IV A2 ($1-x^2-y^2$ nulle sur $C(0,1)$), d'où : $\boxed{\mathcal{D}_{P_c} = \{P+(1-x^2-y^2)T\}}$ notation du IV A1)

A4) On cherche $T = a+bx+cy$ $(\in \mathcal{P}_1) \mid P+(1-x^2-y^2)T$ harmonique

or $\Delta(P+(1-x^2-y^2)T) = -4a+6x-8bx-8cy$

cqs $a=c=0$ et $6=8b$, soit $b=\frac{3}{4}$ convient

d'où $\boxed{\mathcal{D}_{P_c} = \{x^3+(1-x^2-y^2)(\frac{3}{4}x)\}}$

IV B1) Unicité : Si $P = H_1+\overline{Q_1} = H_2+\overline{Q_2}$ alors

$\Delta P = \Delta\overline{Q_1} = \Delta\overline{Q_2}$. Soit $n = \max(d^\circ Q_1, d^\circ Q_2, 0)$

et $m = n+2$, on a $(Q_1, Q_2) \in \mathcal{P}_{m-2}^2$, d'où par injectivité de ϕ_{m-2}, $\underline{Q_1 = Q_2}$ donc $\overline{Q_1} = \overline{Q_2}$ d'où $\underline{H_1 = H_2}$

existence : $\boxed{\text{analyse}}$ $P = H + \bar{Q}$

$$\Rightarrow \Delta P = \Delta \bar{Q} = \varphi_{m-2}(Q)$$

$\boxed{\text{synthèse}}$ Posons $m = \max(d^\circ P, 2)$

$\Delta P \in \mathcal{P}_{m-2}$ donc $\underline{\exists Q \in \mathcal{P}_{m-2} \mid} \varphi_{m-2}(Q) = \Delta P$

posons $\underline{H = P - \bar{Q}}$, on a $P = H + \bar{Q}$ et $\Delta H = \Delta P - \Delta \bar{Q} = 0$

d'où $\boxed{\exists ! (H, Q) \mid P = H + \bar{Q} \text{ et } \Delta H = 0}$

B2) L'application $\Psi : \mathcal{H}_m \times \mathcal{P}_{m-2} \longrightarrow \mathcal{P}_m$ est un

$$(H, Q) \longmapsto H + \bar{Q}$$

isomorphisme d'ev d'où :

$$\dim(\mathcal{H}_m \times \mathcal{P}_{m-2}) = \dim \mathcal{H}_m + \dim \mathcal{P}_{m-2} = \dim \mathcal{P}_m$$

on conclut avec la I B : d'où $\boxed{\dim \mathcal{H}_m = 2m+1}$

B3) Il est clair que $1, x, y, xy, x^2 - y^2$ sont dans $\mathcal{H}_3$,

cherchons en 2 de degré 3 : Avec la A4) :

$$x^3 + (1 - x^2 - y^2)\frac{3}{4}x = \frac{1}{4}(3x + x^3 - 3xy^2) \in \mathcal{H}_3, \text{ donc}$$

par combinaison linéaire $x^3 - 3xy^2 \in \mathcal{H}_3$ et par symétrie $y^3 - 3yx^2 \in \mathcal{H}_3$

Montrons que $(1, x, y, xy, x^2-y^2, x^3-3xy^2, y^3-3yx^2)$ libre :

$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_7) \in \mathbb{R}^7 \setminus \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 y + \lambda_4 xy + \lambda_5 (x^2-y^2)$
$+ \lambda_6 (x^3 - 3xy^2) + \lambda_7 (y^3 - 3yx^2) = 0$

Avec le I A), $\underset{(1)}{\lambda_1} = \underset{(x)}{\lambda_2} = \underset{(y)}{\lambda_3} = \underset{(xy)}{\lambda_4} = \underset{(x^2)}{\lambda_5} = \underset{(x^3)}{\lambda_6} = \underset{(y^3)}{\lambda_7} = 0$

d'où $\boxed{(1, x, y, xy, x^2-y^2, x^3-3xy^2, y^3-3yx^2) \text{ base de } \mathcal{H}_3}$

IV C 1) (classique !) Notons X l'ensemble considéré et posons

$$\phi : X \longrightarrow S$$
$$(i_1, \dots, i_n) \longmapsto (i_1+1, i_1+i_2+2, \dots, i_1+\dots+i_{n-1}+n-1)$$

où $S = \{(j_1, \dots, j_{n-1}) \in (\mathbb{N}^*)^{n-1} \setminus 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n-1} \leq m+n-1\}$

suites strictement $\nearrow$

et $\psi : S \longrightarrow X$

$$(j_1, \dots, j_{n-1}) \longmapsto (j_1-1, j_2-j_1-1, j_3-j_2-1, \dots, j_{n-1}-j_{n-2}-1, m-j_{n-1}+n-1)$$

On a ϕ et ψ bien définis et $\phi \circ \psi = id_S$ et $\psi \circ \phi = id_X$

cqfd $|X| = |S| = \binom{m+n-1}{n-1} = \binom{m+n-1}{m}$ d'où $\boxed{|X| = \binom{m+n-1}{m}}$

Comme au I B 1), $\mathcal{P}_m = \text{vect}\left(p_{i_1,\dots,i_n}\right)_{i_1+\dots+i_n\leq m}$

où $p_{i_1,\dots,i_n}(x_1,\dots,x_n) = x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ et donc

$$\boxed{\dim \mathcal{P}_m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m+n-1}{k}}$$

IV C 2) On pose $\phi_{m-2}(Q) = \Delta \bar{Q}$ où

$\bar{Q}(x_1,\dots,x_n) = (1-x_1^2-x_2^2-\dots-x_n^2)Q(x_1,\dots,x_n)$

et comme au IV B,

$\mathcal{P}_m$ isomorphe à $\mathcal{H}_m \times \mathcal{P}_{m-2}$

cqfd $\boxed{\dim \mathcal{H}_m = \binom{m+n-1}{m} + \binom{m-1+n-1}{m-1}}$