E3A PC 2005

DSn°1 : Corrigé

I 1°) $\boxed{T_2(X) = 2X^2 - 1}$ et $\boxed{T_3(X) = 4X^3 - 3X}$

2°) Montrons par récurrence que T_n est de degré n, de même parité que n et de coefficient dominant : $\alpha_n = 2^{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $\alpha_0 = 1$.

H_n est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ (et aussi pour $n = 2$ et 3)

Supposons H_n et H_{n-1} vraies avec $n \geq 1$.

$T_{n+1}(X) = 2X(2^{n-1}X^n + \dots) - 2^{n-2}X^{n-1} \dots$

$= 2^n X^{n+1} + \dots$ donc $d°T_{n+1} = n+1$ et $\alpha_{n+1} = 2^n$

enfin $2XT_n(X)$ et $T_{n-1}(X)$ ont même parité que $n-1$ c'est-à-dire de $n+1$, Donc H_{n+1} est vraie.

d $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \; T_n(X) = 2^{n-1}X^n + \dots \text{ de parité de } n.}$

3°) $\forall (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ | $\lambda_0 T_0 + \dots + \lambda_n T_n = 0$

Supposons qu'il existe $i \in [\![0, n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$.

alors si $i_0 = \max\{i \in [\![0,n]\!] \setminus \lambda_i \neq 0\}$, on a :

$$\lambda_0 T_0 + \cdots + \lambda_n T_n = \lambda_0 T_0 + \cdots + \lambda_{i_0} T_{i_0}$$ et donc

$d^\circ(\lambda_0 T_0 + \cdots + \lambda_n T_n) = i_0 \in \mathbb{N}$. Absurde car $d^\circ 0 = -\infty$

D'où $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ et $\underline{(T_0, \cdots, T_n) \text{ libre}}$

comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = \mathrm{card}(T_0, \cdots, T_n) = n+1$, on peut conclure ; $\boxed{(T_0, \cdots, T_n) \text{ base de } \mathbb{R}_n[X]}$

4°) a) Posons H_n : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} T_n(\cos x) = \cos nx \\ T_n(\mathrm{ch}\, x) = \mathrm{ch}\, nx \end{cases}$

* H_0 et H_1 sont trivialement vraies (car $\cos 0 = \mathrm{ch}\, 0 = 1$)

* Supposons H_n et H_{n-1} vraies avec $n \geq 1$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ * $T_{n+1}(\cos x) = 2\cos x \underbrace{\cos nx}_{H_n} - \underbrace{\cos(n-1)x}_{H_{n-1}}$

$$= \cos(n+1)x + \cancel{\cos(n-1)x} - \cancel{\cos(n-1)x}$$

$$= \cos(n+1)x$$

* $T_{n+1}(\mathrm{ch}\, x) = 2\,\mathrm{ch}\, x\, \mathrm{ch}\, nx - \mathrm{ch}(n-1)x$

$$= \mathrm{ch}(n+1)x + \mathrm{ch}(n-1)x - \mathrm{ch}(n-1)x$$

$$= \mathrm{ch}(n+1)x$$

d. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\quad T_n(\cos x) = \cos nx \text{ et } T_n(\operatorname{ch} x) = \operatorname{ch} nx}$ ③

b) $\forall u \in [-1, 1]\ \exists \theta \in \mathbb{R}$ (Arccos u par exemple) tel que $u = \cos\theta$ d'où $|T_n(u)| = |\cos n\theta| \leq 1$.

d. $\boxed{\forall |u| \leq 1,\ |T_n(u)| \leq 1}$

c) Rappel ch est bijective de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$.

Comme $u > 1$, $\exists!\, x > 0 \setminus u = \operatorname{ch} x$ et donc :

$|T_n(u)| = \operatorname{ch} nx > 1$ car $nx > 0$

d: $\boxed{\forall u > 1,\ |T_n(u)| > 1}$

d) Par parité $T_n(\pm u) = \pm T_n(u)$ et donc : $\forall u \in \mathbb{R}$

$|T_n(u)| = |T_n(|u|)| > 1$ car $|u| > 1$ ($u \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$)

d. $\boxed{\forall u \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\quad |T_n(u)| > 1}$

5°) a) $T_n(\cos x) = \cos nx = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \setminus nx = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z} \setminus x = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$

Posons $x_k = \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}$, si $k < 0$, $x_k < 0$

D'autre part $0 < x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} = \pi - \frac{\pi}{2n} < \pi < x_n < \cdots$

d, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \ , k \in [\![0, n-1]\!] \right\}}$

b) $x_0, \dots, x_{n-1}$ étant 2 à 2 distincts dans $[0, \pi]$ et cos étant <u>bijective</u> de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$, on a $\cos x_0, \dots, \cos x_{n-1}$ racines 2 à 2 distinctes de T_n. Comme $d^\circ T_n = n$, ce sont <u>les</u> racines de T_n

d, Les racines de T_n sont $\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$, $k \in [\![0, n-1]\!]$

Elles sont 2 à 2 distinctes et toutes dans $[-1, 1]$

c) Grâce au 2°) et au 5°) b) on a : $\forall n \geq 1$

$$\boxed{T_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right) \right)}$$

6) Posons $q = t e^{ix}$, on a $|q| = |t| < 1$ donc $q \neq 1$

Donc $\sum_{n=0}^{N} t^n e^{inx} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1-q} \xrightarrow[N \to \infty]{} \frac{1-0}{1-q}$

car $|q| < 1$

Donc $\boxed{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} t^n e^{inx} = \frac{1}{1-te^{ix}}}$

<u>Rappel</u> si $u_n \in \mathbb{C}$ et $\lim_{n\to\infty} u_n = z$ alors $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} Re(u_n) = Re(z) \\ \lim_{n\to\infty} Im(u_n) = Im(z) \end{cases}$

On en déduit que

$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} t^n \cos nx = Re\left(\frac{1}{1-te^{ix}}\right)$ et $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} t^n \sin nx = Im\left(\frac{1}{1-te^{ix}}\right)$

Or $\frac{1}{1-te^{ix}} = \frac{1-te^{-ix}}{(1-te^{ix})(1-te^{-ix})} = \frac{1-t\cos x + it\sin x}{1-2t\cos x + t^2}$

D'où $\boxed{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} t^n \cos nx = \frac{1-t\cos x}{1-2t\cos x+t^2} \text{ et } \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} t^n \sin nx = \frac{t\sin x}{1-2t\cos x+t^2}}$

II A

1°) $\forall (P, Q, R, \lambda) \in \mathbb{R}[X]^3 \times \mathbb{R}$

* $\langle Q, P\rangle = \int_0^{\pi} Q(\cos x) P(\cos x)\,dx = \langle P, Q\rangle$

commutativité

* $\langle \lambda P + Q, R\rangle = \int_0^{\pi} (\lambda P(\cos x) + Q(\cos x)) R(\cos x)\,dx$

$= \lambda \langle P, R\rangle + \langle Q, R\rangle$ par distributivité et linéarité de l'intégrale

* $\langle P, P \rangle = \int_0^{\pi} \underbrace{P(\cos x)^2}_{\geq 0} dx \geq 0$ (car $0 < \pi$)

* $\langle P, P \rangle = 0 \Rightarrow \int_0^{\pi} P(\cos x)^2 dx = 0$

Comme $f : x \mapsto P(\cos x)^2$ est <u>positive</u> et <u>continue</u> sur $[0, \pi]$ et que $\int_0^{\pi} f = 0$ alors f nulle sur $[0, \pi]$

On en déduit que $\forall x \in [0, \pi]$ $P(\cos x) = 0$, d'où P est nulle sur $[-1, 1]$. Comme $[-1, 1]$ est <u>infini</u> P admet une infinité de racine et donc nul sur $\mathbb{R}$ donc. <u>$P = 0$</u>

cl, $\boxed{(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$

2°) a) $\langle T_p, T_q \rangle = \int_0^{\pi} T_p(\cos x) T_q(\cos x) dx = \int_0^{\pi} \cos px \cos qx \, dx$

$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(p+q)x + \cos(p-q)x] dx$ (linéarisation)

$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p+q} \sin(p+q)x + \frac{1}{p-q} \sin(p-q)x \right]_0^{\pi}$ car $\left| \begin{array}{l} p+q \geq 1 \text{ donc} \neq 0 \\ p-q \neq 0 \end{array} \right.$

Comme $\sin k\pi = \sin 0 = 0$, on conclut :

d. $\boxed{\forall p \neq q : \langle T_p , T_q \rangle = 0}$

b) $\langle T_0 , T_0 \rangle = \int_0^{\pi} 1^2 dx = \pi$

$\forall n \geq 1 \quad \langle T_n , T_n \rangle = \int_0^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\cos 2nx + 1) dx$

$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2n} \sin 2nx + x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$

d $\boxed{\langle T_0 , T_0 \rangle = \|T_0\|^2 = \pi \text{ et } \forall n \geq 1 \quad \langle T_n , T_n \rangle = \frac{\pi}{2}}$

c) D'après le 3) $(T_0, \dots, T_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

donc $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \exists (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \setminus$

$P = \lambda_0 T_0 + \dots + \lambda_{n-1} T_{n-1}$ et $\langle P , T_n \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \underbrace{\langle T_i , T_n \rangle}_{= 0 \text{ (a)}}$

$= 0$

d $\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \quad P \perp T_n}$

d) De même qu'au c) $\exists (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus X^n = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i T_i$

d'où $\langle T_n , X^n \rangle = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \langle T_n , T_i \rangle = \lambda_n \langle T_n , T_n \rangle + 0$

donc $\langle T_n, X^n \rangle = \lambda_n \times \frac{\pi}{2}$

Par considération du terme de plus haut degré dans $\lambda_0 T_0 + \dots + \lambda_n T_n = X^n$ on a $\lambda_n \times 2^{n-1} = 1$

donc $\lambda_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ [c'est le I 2°)]

cl. $\boxed{\langle T_n, X^n \rangle = \frac{\pi}{2^n}}$ (rem. $\langle T_0, X^0 \rangle = \pi = \frac{\pi}{2^0}$)

3°) Evident vu le I 3°) et le II A 2° a)!

II B

1°) a) $\boxed{c_0 = n}$

b) $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$ $j\frac{\pi}{n} \neq 2h\pi$ $\forall h \in \mathbb{Z}$ donc $e^{ij\frac{\pi}{n}} \neq 1$

donc $\sum_{k=1}^{n} q^k = q + \dots + q^n = q(1 + q + \dots + q^{n-1}) = q\frac{1-q^n}{1-q}$

avec $q = e^{ij\frac{\pi}{n}}$, $q^n = e^{ij\pi} = (-1)^j$ car $j \in \mathbb{Z}$

cl $\boxed{\forall j \in [\![1, n-1]\!] \quad \sum_{k=1}^{n} \left(e^{ij\frac{\pi}{n}}\right)^k = e^{ij\frac{\pi}{n}} \frac{1-(-1)^j}{1-e^{ij\pi/n}}}$

c) $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$ $c_j = \sum_{k=1}^{n} \cos j\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}\right)$. c_j est la partie réelle de $z_j = \sum_{k=1}^{n} e^{ij\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}\right)} = e^{-ij\frac{\pi}{2n}} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{ij\frac{\pi}{n}}\right)^k$

Donc $z_j = e^{ij\frac{\pi}{2n}} \dfrac{1-(-1)^j}{1-e^{ij\frac{\pi}{n}}}$

$$= \cancel{e^{ij\frac{\pi}{n}}} \frac{1-(-1)^j}{\cancel{e^{ij\frac{\pi}{2n}}}\left(-2i\sin(j\pi/2n)\right)}$$

$= i \dfrac{1-(-1)^j}{2\sin j\frac{\pi}{2n}}$; z_j est imaginaire pur donc sa partie réelle est nulle.

cl $\boxed{\forall j \in [\![1, n-1]\!] \quad c_j = 0}$

2°) a) $\forall p \in [\![0, n-1]\!]$: $I(T_p) = \int_0^{\pi} T_p(\cos x)\,dx = \langle T_p, 1\rangle = \langle T_p, T_0\rangle$

cl. $\boxed{I(T_0) = \pi \text{ et } \forall p \in [\![1, n-1]\!] : I(T_p) = 0}$

$\forall p \in [\![0, n-1]\!]$: $S_n(T_p) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} T_p(\cos x_k) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos p x_k = \frac{\pi}{n} c_p$

grâce au I 4°)

$= \frac{\pi}{n} \times n + 0$ grâce au II B 1°) a) et c)

cl $\boxed{\forall p \in [\![0, n-1]\!] \quad S_n(T_p) = \begin{cases} \pi & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

b) $\begin{cases} I(\lambda P+Q)=\lambda I(P)+I(Q) \\ S_n(\lambda P+Q)=\lambda S_n(P)+S_n(Q) \end{cases} \quad \forall(\lambda,P,Q)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}[X]^2$

Donc I et S_n sont linéaires et coïncide sur la base $(T_0,\dots,T_{n-1})$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donc I et S_n coïncide sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$\boxed{\forall P\in\mathbb{R}_{n-1}[X] : I(P)=S_n(P)}$$

3°) a) $QT_n=P-R$ donc $d^\circ(QT_n)=d^\circ Q+d^\circ T_n=d^\circ(P-R)$

donc $d^\circ Q+n\leq \max(d^\circ P,d^\circ R)\leqslant 2n-1$

d'où $d^\circ Q\leqslant n-1$; $\boxed{Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]}$

b) $I(P)=I(QT_n+R)=I(QT_n)+I(R)$ (linéarité de I)

Or $I(QT_n)=\int_0^\pi Q(\cos x)T_n(\cos x)dx=\langle Q,T_n\rangle=0$

II A 2°) c)

d'où $\boxed{I(P)=I(R)}$

c) D'après le 2°) b) $I(R)=S_n(R)=I(P)$

D'autre part $S_n(P)=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}Q(\cos x_k)\overbrace{T_n(\cos x_k)}^{=0}+S_n(R)=S_n(R)$

d $\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X] \quad I(P) = S_n(P)}$

4°) * $I(T_{2n}) = \langle T_{2n}, 1 \rangle = \langle T_{2n}, T_0 \rangle = 0$ car $2n \neq 0$

* $$S_n(T_{2n}) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} T_{2n}(\cos x_k) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos 2n x_k$$

$$= \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)\pi = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1) = -\pi$$

d. $I(T_{2n}) = 0 \neq S_n(T_{2n}) = -\pi$ et donc I et S_n ne coïncide plus dans $\mathbb{R}_{2n}[X]$