$e_3 a$ PC 2018

Partie I

1 a) Posons $f(x) = \ln x - ax$ — f C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ par TG

$f'(x) = \frac{1}{x} - a \geq \frac{1}{x} > 0$

$f(x) = -ax\left[1 - \frac{\ln x}{ax}\right] \underset{+\infty}{\overset{cc}{\sim}} -ax$

x	0	α	1	$+\infty$
f'		$+$		
f	$-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$-a$ $\nearrow$	$+\infty$

Par Th de bijection, $\boxed{\exists!\, \alpha \in]0,1] \setminus \alpha \text{ solution de } (E_a)}$

b) Avec les notations de a)

x	$0 \cdot 1\ \alpha\ e$	$1/a$	β	$+\infty$
f	$+$	0	$-$	
f'	$-\infty \nearrow -a<0 \nearrow 0 \nearrow 1-ae \geq 0$		$\searrow 0 \searrow$	$-\infty$

$f(1) = -a < 0$ et $f(e) = 1 - ae > 0$

Par T.B, $\boxed{\exists!\, \alpha \in]1,e[\text{ et } \exists!\, \beta \in]e,+\infty[\text{ solutions de } (E_a)}$

c)

x	0	$1/a = e$	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$
f	$-\infty \nearrow$	0	$\searrow -\infty$

$f(e) = 1 - \frac{1}{e}e$
$= 0$

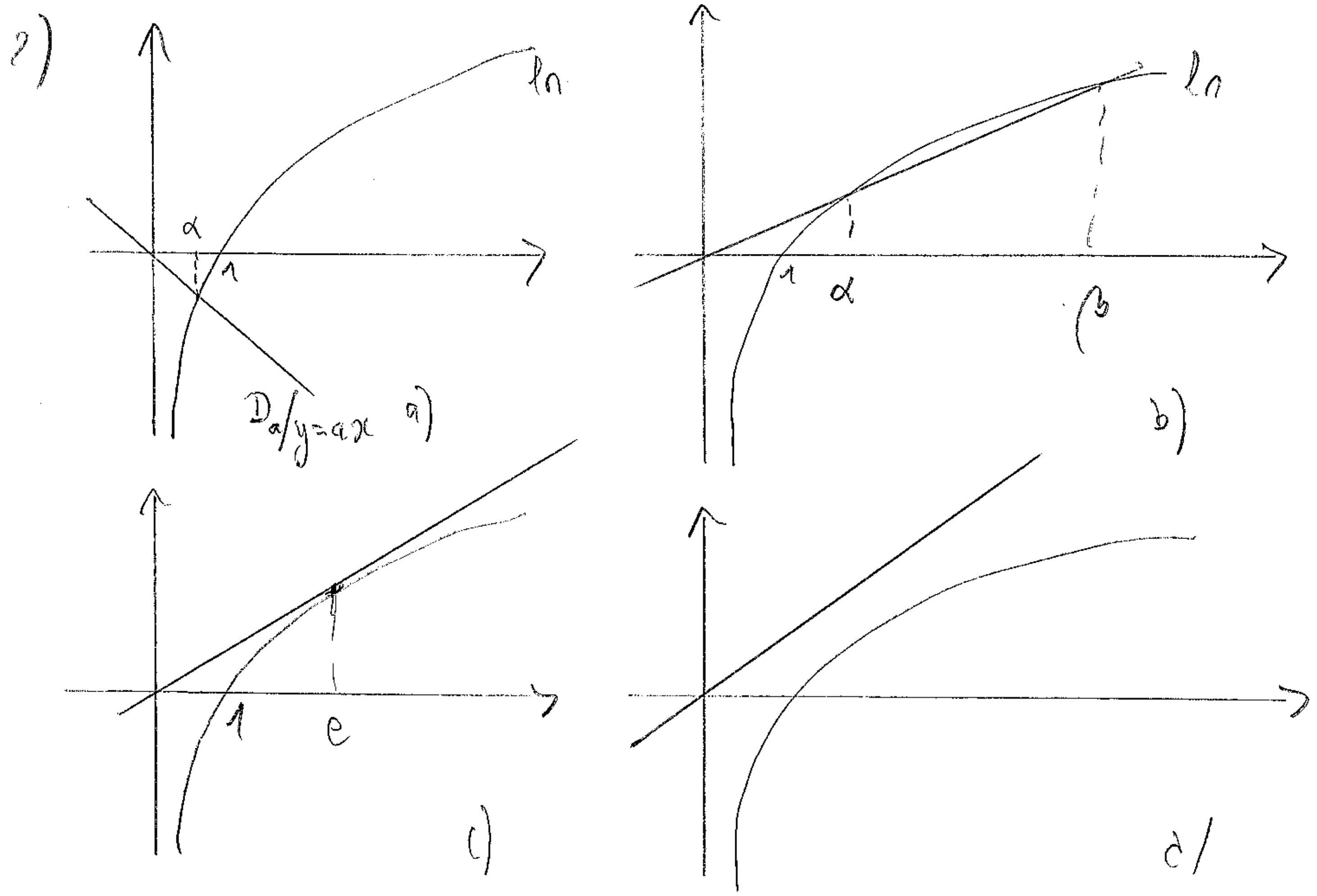
d'où $\boxed{\text{Si } a = e : e \text{ unique sol. de } (E_a)}$

d)

x	0		$1/a$		e	$+\infty$
g'			0			
g	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$-\infty$

$g\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a - 1 < 0$ d'où $\boxed{\text{Aucune solution pour } (E_a)}$

2)



Partie II

1) Si $\exists c \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = c$, alors on doit avoir : $c = c^2$

donc $c = 0$ ou $c = 1$

Réciproquement $\varphi_0(x) = 0$ et $\varphi_1(x) = 1$ vérifie (R)

d'
$$\boxed{x \mapsto 0 \text{ et } x \mapsto 1 \text{ sont les seules fonctions constantes, solutions de } (R)}$$

2) $\Leftarrow]$ oui !

$\Rightarrow]$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\varphi(x) = \varphi(x+0) = \varphi(x)\varphi(0) = 0$

d' $\boxed{\varphi(0) = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0 \text{ application nulle}}$

3 a) Avec $x = y = 0$ $\varphi(0+0) = \varphi(0)^2 \Rightarrow \varphi(0) = 0$ ou $\underline{1}$

d'1 $\boxed{\varphi(0) = 1}$

Avec $(x,y) = (t/2, t/2)$ $\varphi(t) = \varphi(t/2)^2 \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$

Avec le 2), $\varphi(t) \neq 0$ d' $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) > 0}$

b) $\rightarrow H_n$: $\forall x \in \mathbb{R}$ $\varphi(nx) = \varphi(x)^n$

* $\underline{n=0}$: $\varphi(0) = 1 = 1^0$ donc H_0 vraie

* Si H_n est vraie, $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$\varphi((n+1)x) = \varphi(nx)\varphi(x) = \varphi(x)^n\varphi(x) = \varphi(x)^{n+1}$$

donc H_{n+1} vraie donc H_n vraie, $\forall n \in \underline{\mathbb{N}}$

$\rightarrow$ Soit $n = -p \in \mathbb{Z}^-$, $p = -n \in \mathbb{N}$

$$\varphi(px + (-px)) = \varphi(px)\varphi(-px) = \varphi(0) = 1$$

cqs $\varphi(nx) = \varphi(-px) = \dfrac{1}{\varphi(px)}$ avec 3a), $\varphi(px) \neq 0$ (4)

$$= \frac{1}{\varphi(x)^p} = \varphi(x)^{-p} = \varphi(x)^n$$

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R} : \varphi(nx) = \varphi(x)^n}$

c) Pour $n = m$ et $x = \dfrac{1}{m}$: $\boxed{\varphi(1) = \varphi\left(\frac{1}{m}\right)^m}$

d) Pour $n = n$ et $x = \dfrac{1}{m}$:

$$\varphi\left(\frac{n}{m}\right) = \varphi\left(\frac{1}{m}\right)^n = \left(\varphi(1)^{1/m}\right)^n = \varphi(1)^{n/m}$$

d'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N}^* : \varphi\left(\frac{n}{m}\right) = \varphi(1)^{n/m}}$

e) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$

$\Rightarrow \lfloor 10^n x \rfloor 10^{-n} \leq x < \lfloor 10^n x \rfloor 10^{-n} + 10^{-n}$ $\quad (10^{-n} > 0)$

$\Rightarrow x - 10^{-n} < x_n \leq x, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\xrightarrow[n \to \infty]{} x$

Par théorème d'encadrement, $\boxed{\lim_{n \to \infty} x_n = x}$

f) Comme φ est continue sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\lim_{n \to \infty} \varphi(x_n) = \varphi\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right) = \varphi(x)$ <u>critère séquentiel</u>

Or $x_n \in \mathbb{Q}$ donc avec le d), $\varphi(x_n) = \varphi(1)^{x_n}$

Or $\varphi(1)^{x_n} = e^{x_n \ln \varphi(1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{x \ln \varphi(1)}$ car $x \mapsto e^{ax}$ $C^0/\mathbb{R}$

$= \varphi(1)^x$

Par unicité de la limite, d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \varphi(1)^x}$

g) $\forall a > 0 \quad \varphi_a : x \mapsto a^x$ est sol. de $(\mathbb{R})$

d'où $\boxed{\mathcal{S} = \{x \mapsto 0, x \mapsto 1\} \cup \{x \mapsto a^x, a \in \mathbb{R}^{+*}\}}$

Partie III

1a) $\boxed{P_1(X) = X}$ et $\boxed{P_2(X) = \dfrac{X^2 + 2X}{2}}$

b) $\boxed{P_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}}$

2) * $\forall n \geq 2 \quad P_n'(x) = \dfrac{1}{n!}\left[(X+n)^{n-1} + (n-1)X(X+n)^{n-2}\right]$

$= \dfrac{1}{n!}(X+n)^{n-2}\left[X + n + (n-1)X\right]$

$= \dfrac{n(X+1)}{n!}(X+n)^{n-2} = \dfrac{1}{(n-1)!}(X+1)(X+1+n-1)^{n-2}$

* $P_1'(x) = 1 = P_0(X+1)$ d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n'(x) = P_{n-1}(x+1)}$

3) H_n : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$; $P_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_{n-k}(y)$

* $\underline{H_0}$: $P_0(x+y)=1=\sum_{k=0}^{0} 1\times 1$ donc $\underline{H_0 \text{ est vraie}}$

* Si H_k est vraie jusqu'à $n-1$, avec $n\geq 1$;

Posons $f(x)=P_n(x+y)$ et $g(x)=\sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_{n-k}(y)$

$y\in\mathbb{R}$ quelconque et fixé.

$\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=P_n'(x+y)=P_{n-1}(x+y+1)$

$=\sum_{k=0}^{n-1} P_k(x+1)P_{n-1-k}(y)$ c'est H_{n-1}

$=\sum_{k=0}^{n-1} P'_{k+1}(x)P_{n-1-k}(y)$

$=\sum_{k=1}^{n} P'_k(x)P_{n-k}(y)$ cdV bijectif "$k=k+1$"

$=\sum_{k=0}^{n} P'_k(x)P_{n-k}(y)$ car $P_0'(x)=0$

$=g'(x)$

cqs $\underline{f-g \text{ constante sur } \mathbb{R}}$

or $f(0)=P_n(y)$ ↙ c'est la 1) b)

$g(0)=\sum_{k=0}^{n} P_k(0)P_{n-k}(y)=P_0(0)P_n(y)+\sum_{k=1}^{n}0\times P_{n-k}(y)=P_n(y)$

cqs : $f = g$ et H_n est vraie

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) P_{n-k}(y)}$

Partie IV

1 a) $\forall n \geq \underbrace{\max(0, \lfloor -x \rfloor + 1)}_{N}$; $x + n \geq x + \lfloor -x \rfloor + 1 > x - x = 0$

d'où $\forall n \geq N$; $\ln\left(\dfrac{(x+n)^{n-1}}{e^x n^{n-1}}\right) = (n-1)\ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) - x$

$$= (n-1)\left[\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - x$$

$$= \left(\frac{n-1}{n} - 1\right)x + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{-1}{n}x + o\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{TG} 0$$

d'où $\dfrac{(x+n)^{n-1}}{e^x n^{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ d $\boxed{(x+n)^{n-1} \sim e^x n^{n-1}}$

b) Formule de Stirling : $\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall a \in \mathbb{R}$: posons $u_n = P_n(x) a^n$.

On a : $u_n \sim \dfrac{1}{n!} n^{n-1} e^x a^n \sim \dfrac{e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}} n^{n-1} e^x a^n$

$$\sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi}} \frac{(ae)^n}{n^{3/2}} = v_n$$

Si $|ae| > 1$, par croissances comparées, $|v_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

cqs $(\sum v_n)$ Dvg grossièrement d'où $(\sum u_n)$ aussi

si $|ae| \leqslant 1$, $v_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, $\frac{1}{n^{3/2}} \geqslant 0$ et $\left(\sum \frac{1}{n^{3/2}}\right)$ cvg (car $3/2 > 1$). Par T.C. $(\sum u_n)$ cvg absolument

d $\boxed{\left(\sum P_n(x) a^n\right) \text{ cvg ssi } |a| \leqslant \frac{1}{e}}$

2 a) Posons $u_n(x) = P_n(x) a^n$, on a :

* $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n C^0 sur $\mathbb{R}$ par T.G.

* $(\sum u_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ avec le 1 b)

* $\forall x \in [-\alpha, \alpha]$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n(x)| \leqslant \frac{(|x| + n)^{n-1}}{n!} a^n \leqslant \frac{(\alpha + n)^{n-1}}{n!} a^n = \alpha_n$$

comme $\alpha_n = P_n(|\alpha|) a^n$ et $(\sum \alpha_n)$ cvg absolument (1b), $(\sum u_n)$ cvg normalement sur $[-\alpha, \alpha]$.

d' $\boxed{\text{Par th } C^0, \ F_a \ C^0 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

admis [Si $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ cvg absolument, alors, $(\sum w_n)$ cvg abs et $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right)$ avec $w_n = \sum_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}$

b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$F_a(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x+y)\, a^n \qquad \swarrow \text{ III } 3)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} P_k(x) P_{n-k}(y)\, a^n$$

Posons $u_n = P_n(x)\, a^n$ et $v_n = P_n(y)\, a^n$ et

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) P_{n-k}(y)\, a^{k+n-k}$$

d'après la 1b), $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ cvg absolument,

on conclut avec la 2,b) :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad F_a(x+y) = F_a(x) F_a(y) \ : \ (R)}$$

Avec la II 3 (8) ; $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \ : \ F_a(x) = F_a(1)^x}$

c) Avec les notations du 2a),

(5/2)

$*$ u_n C^1 sur $\mathbb{R}$ par TG

$*$ $(\sum u_n)$ C.S. sur $\mathbb{R}$

$*$ $\forall x \in [-\alpha, \alpha]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$|u_n'(x)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{III } 2)}}{=} |P_{n-1}(x+1)|\,|a^n| \leq P_{n-1}(|a|+1)\,|a^n| = \alpha_n$$

et $\hat{c}$ av a), $(\sum \alpha_n)$ cvg donc $(\sum u_n')$ cvg normalement $/_{[-\alpha,\alpha]}$

Par le th C^1, F_a est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$F_a'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \quad \text{car } u_0(x) = a^0$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(x+1)\, a^n$$

$$= a \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x+1)\, a^n \quad (\text{décalage d'indice})$$

d'où $\boxed{F_a \ C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} : F_a'(x) = a F_a(x+1)}$

Remarque : si on ne voulait que F_a C^1 sur $\mathbb{R}$, la IV 2 d) et T.G. suffisaient !

d) $\forall x \in \mathbb{R}$: $F_a'(x) = \left(e^{x \ln F_a(1)}\right)' = \ln(F_a(1))\, F_a(1)^x$.

d'où $F_a'(0) = \underline{\ln F_a(1) = a F_a(1)}$

d'où $\boxed{F_a(1) \text{ solution de } (E_a)}$

3 a) Admis (faisable en fin d'année)

b)

x	0		$1/e$
G			γ
	1	$\nearrow$	

$G(0) = F_0(1) = P_0(1) + \sum_{n \geq 1} 0 \cdot e^n = 1$

Posons $G\left(\frac{1}{e}\right) = \gamma$

On a $\ln \gamma = \frac{1}{e} \gamma$ avec le 2 d)

donc γ solution de $(E_{1/e})$. Avec la I 1 c), $\gamma = e$

Fin du corrigé du ds2: à la fin de ce fichier après l'exercice)

Centrale TSI 2016

Ds2*: corrigé

I.A 1a) Si $E=\{1,2,3\}$, les partitions en 2 parties

soit $\{\{1,2\},\{3\}\}$, $\{\{1,3\},\{2\}\}$, $\{\{2,3\},\{1\}\}$

d'où $\boxed{S_{3,2}=3}$

b) $\underline{S_{n,1}=1}$ ($\{E\}$ unique partition à 1 partie)

$\underline{S_{n,n}=1}$ ($\{\{1\},\dots,\{n\}\}$ ———)

2 a i) $\underline{\{\{4\},\{1,2,3\}\}}$ (c'est la seule !)

ii) $\{\{4,1\},\{2,3\}\}$ $\{\{4,1,2\},\{3\}\}$

$\{\{4,2\},\{1,3\}\}$ $\{\{4,1,3\},\{2\}\}$

$\{\{4,3\},\{1,2\}\}$ $\{\{4,2,3\},\{1\}\}$

d'où il y en a donc 6

iii) $S_{4,2}=1+6=7$ (i) + ii))

$S_{3,1}=1$ (b)) et $S_{3,2}=3$ (a)

comme $7=1+2\times 3$, on a $\underline{S_{n,k}=S_{n-1,k-1}+kS_{n-1,k}}$

b) i) si $\mathcal{P} = \{\{x_n\}, A_2, \dots, A_k\}$ est une partition de E, $\{A_2, \dots, A_k\}$ est une partition de $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$

donc il y en a : $\underline{S_{n-1,k-1}}$

ii) si $\mathcal{P} = \{ \underbrace{\{x_n, \dots\}}_{A_1}, A_2, \dots, A_k \}$

Comme $A_1 - \{x_n\} \neq \emptyset$, $\{A_1 - \{x_n\}, A_2, \dots, A_k\}$ est une partition de $\{x_1, \dots, x_n\}$ en k parties,

réciproquement si l'on a une partition $\{A_1, \dots, A_k\}$ de $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$, on peut former k partitions de $\{x_1, \dots, x_n\}$ en "mettant" x_n soit dans A_1, soit dans A_2, ..., soit dans A_k,

donc il y en a $\underline{k S_{n-1,k}}$

iii) d'où $\boxed{S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k S_{n-1,k}}$ (i) + ii))

3) Récurrence sur n : $n = 2$, $S_{2,1} \underset{1a\,i)}{=} 1 = \frac{2 \times 1}{2}$

Si $S_{n,n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$, $S_{n+1,n} = S_{n,n-1} + n S_{n,n}$

car $n+1 \geqslant 2$, $k = n \in [\![1, n+1-1]\!]$ (hypothèses du 2))

d'où $S_{n+1,n} = \frac{n(n-1)}{2} + \underset{1Ab)}{n \times 1} = \frac{n(n+1)}{2}$

cl $\boxed{\forall n \geqslant 2 \quad S_{n+1,n} = \frac{n(n-1)}{2}}$

4) $S_{n,2} = S_{n-1,1} + 2 S_{n-1,2} = 1 + 2 S_{n-1,2}$

d'où $\underline{2(S_{n-1,2}+1) = S_{n,2}+1}$ $\forall n \geqslant 3$

On en déduit que $(S_{n,2}+1)_{\underline{n \geqslant 2}}$ est une suite géométrique,

donc $\forall n \geqslant 2$ $S_{n,2}+1 = 2^{n-2}(S_{2,2}+1)$

réc. sur n pour être sûr !

cl $\boxed{\forall n \geqslant 2 : S_{n,2} = 2^{n-1} - 1}$

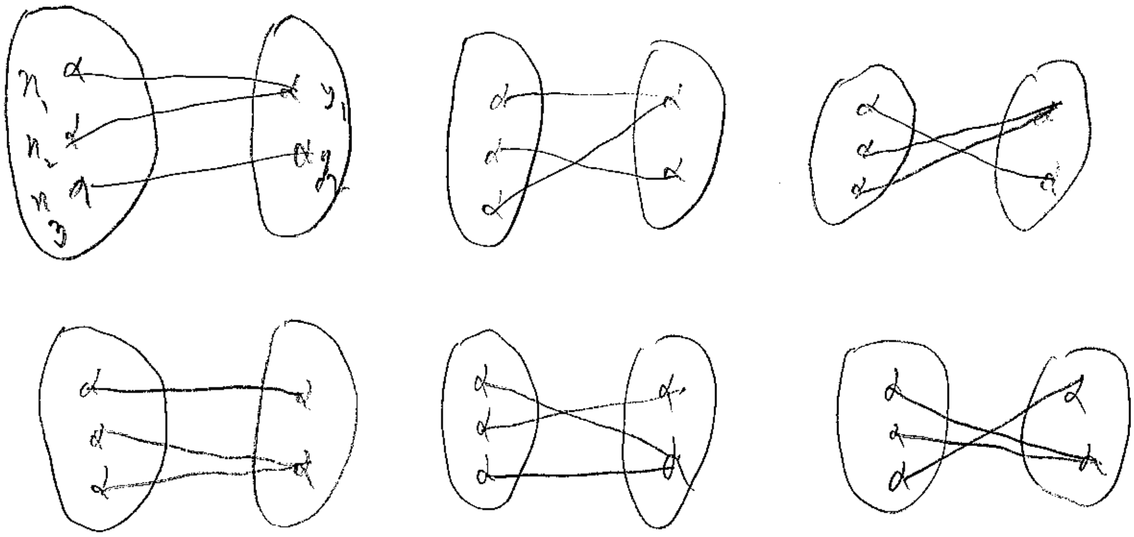
5a) $\underline{\sigma_{n,k} = 0}$ car si $f \in \mathcal{F}(E,F)$, $|f(E)| \leqslant |E| = n < k$

donc $f(E) \neq F$

b) si $|E| = |F|$, f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective

cl : $\underline{\sigma_{n,n} = n!}$

c)



d'où $\boxed{\sigma_{3,2}=6}$

d) i) * $\forall j\in[\![1,k]\!]$, $A_j\neq\emptyset$ car f étant surjective, $\exists x\in E \backslash$ $y_j=f(x)$ et donc $x\in A_j$.

* $\forall (j,j')\in[\![1,k]\!]^2 / j\neq j'$, si $A_j\cap A_{j'}\neq\emptyset$, $\exists x\in E \backslash$ $f(x)=y_j$ et $f(x)=y_{j'}$ absurde

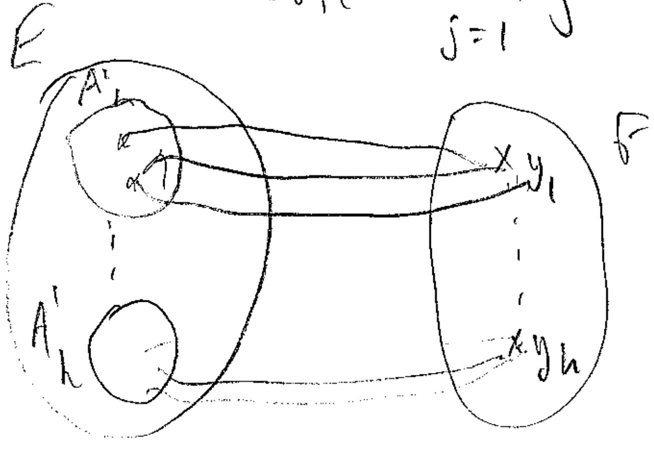
donc $A_j\cap A_{j'}=\emptyset$

* $\forall x\in E$ $\exists j\in[\![1,k]\!] \backslash$ $f(x)=y_j$ et $x\in A_j$

donc $\bigcup_{j=1}^{k} A_j=E$

d'où $\boxed{\mathcal{A} \text{ partition de } E}$

ii)



On a une bijection entre $\{A'_1, \dots, A'_k\}$ et $\{y_1, \dots, y_k\}$

donc il y a $\boxed{k! \text{ surjections telles que } \pi(f) = \mathcal{A}'}$

iii) $\sigma_{n,k}$ est donc égal au nombre de partitions de E

fois le nb de surjections associées à ces partitions.

d'où $\boxed{\sigma_{n,k} = k! \, S_{n,k}}$

6) Effectuons une récurrence sur n :

$H_n : \forall k \in [\![0, n]\!] \quad S_{n,k} \leq (2k)^n$

$\underline{n=0}$ $[\![0, n]\!] = \{0\}$ et $S_{0,0} = 1 \leq (2\times 0)^0 = 1$ (conventions)

donc $\underline{H_0 \text{ vraie}}$

Le problème de la formule de récurrence du A 2),

c'est qu'elle n'est valable que pour $n \geq 2$.

Il faut donc aussi vérifier H_1 :

$k=0$: $S_{1,0} = 0 \leq (2\times 0)^1$
convention

donc $\underline{H_1 \text{ vraie}}$

$k=1$: $S_{1,1} = 1 \leq (2\times 1)^1 = 2$

Supposons H_{n-1} vraie et $n \geq 2$, alors avec I 2) :

$*$ $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$ $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k S_{n-1,k}$

$$\leq (2k-2)^{n-1} + k.(2k)^{n-1} \quad (H_{n-1})$$

$$\leq 2^{n-1}\left[(k-1)^{n-1} + k^n \right]$$

$$\leq 2^{n-1}\left[k^{n-1} + k^n \right] \leftarrow \text{car } 0 \leq k-1 \leq k$$

$$\leq 2^{n-1}\left[k^n + k^n \right] \leftarrow \text{car } k \geq 1$$

$$\leq (2k)^n$$

$*$ $k=0$ $\quad S_{n,0} = 0 \leq (2 \times 0)^n = 0$
$(n \in \mathbb{N}^*)$

$*$ $k=n$ $\quad S_{n,n} = 1 \leq (2 \times n)^n$ donc H_n vraie

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0, n]\!] \quad S_{n,k} \leq (2k)^n}$

I B 1) $\text{card}\{P_0, \dots, P_N\} = n+1 = \dim \mathbb{R}_N[X]$, il suffit donc de montrer que cette famille est libre :

$\forall (\lambda_0, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{N+1} \setminus \lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_N P_N = 0$

Comme $\forall i, d^\circ P_i = i$, si $\exists i \setminus \lambda_i \neq 0$ alors :

$d^\circ(\lambda_0 + \dots + \lambda_N P_N) = \max\{ i \in [\![0, N]\!] \setminus \lambda_i \neq 0 \}$
$\in \mathbb{N}$: absurde

cqs $\lambda_0 = \cdots = \lambda_N = 0$ d'où $\boxed{(P_0, \dots, P_N) \text{ base de } \mathbb{R}_N[X]}$. (7)

B 2a) $* \; P_{k+1} + kP_k = \prod_{j=0}^{k} (X-j) + k \prod_{j=0}^{k-1} (X-j)$

$k \geq 1$ $\qquad = \left[\prod_{j=0}^{k-1} (X-j)\right]\left[X - k + k\right] = XP_k$

$* \; P_1 + 0P_0 = P_1 = X = X \cdot 1 = XP_0$

d'où $\boxed{\forall k \in [\![0, N-1]\!] \quad P_{k+1} + kP_k = XP_k}$

b) $n=0$: $X^0 = 1 = P_0 = \sum_{k=0}^{0} S_{0,k} P_k$: vraie pour $n=0$

Supposons la relation vraie pour $n \leq N-1$:

$X^{n+1} = X \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} P_k$ (hyp. de réc.)

$= \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} (P_{k+1} + kP_k)$ (2a)

cdV

$= \sum_{k=1}^{n+1} S_{n,k-1} P_k + \sum_{k=0}^{n} k S_{n,k} P_k$

$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(S_{n,k-1} + k S_{n,k})}_{= S_{n+1,k}} P_k + \underbrace{\overbrace{S_{n,n+1-1}}^{= S_{n,n} = 1} P_{n+1}}_{= S_{n+1,n+1} P_{n+1}} + 0 \cdot S_{n,0} P_0$

$= \sum_{k=1}^{n+1} S_{n+1,k} P_k$ d'où : $\boxed{\forall n \in [\![0, N]\!] \quad X^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} P_k}$

B3)

$$M = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}) = \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^N \end{matrix} & \\ \hline \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} P_0 \\ \vdots \\ P_N \end{matrix} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & S_{1,0} & S_{2,0} & \cdots & S_{N,0} \\ 0 & S_{1,1} & S_{2,1} & & \vdots \\ \vdots & 0 & S_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & S_{N,N} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\boxed{M = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & & n & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & S_{n,k} & \\ & 0 & & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}}$$

B4 a) $\underline{\chi_M(x) = (x-1)^{N+1}}$

b) Si $N=1$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: diagonale !

Si $N \geq 2$, si M diagonalisable, $\pi_M(x) = x-1$

et $M = I_{N+1}$: absurde

d'où : $\underline{\text{oui } N=1, \text{ non } N \geq 2}$

I D 1) a) Posons $f : x \longmapsto \frac{1}{(k+1)!}(e^x-1)^{k+1}$ (9)

* f C^1 sur $\mathbb{R}$ par TG

* $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{1}{k!}(e^x-1)^k \times e^x$

et $(k+1)f(x) + \frac{1}{k!}(e^x-1)^k = \frac{(e^x-1)^{k+1}}{k!} + \frac{1}{k!}(e^x-1)^k$

$\frac{(e^x-1)^k}{k!}(e^x \cancel{-1} + \cancel{1}) = f'(x)$ d'où $\boxed{f \text{ solution de } (I.1)}$

b) Eq. homogène : $y_0' = (k+1)y_0$ donc $y_0 = \lambda e^{(k+1)x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme f est solution (particulière) de (I.1)

d'où : $\boxed{\mathcal{S} = \{x \longmapsto \lambda e^{(k+1)x} + \frac{1}{(k+1)!}(e^x-1)^{k+1}, \lambda \in \mathbb{R}\}}$

I 2 a) $\forall n \geq k$, $\forall x \in \mathbb{R}$: $0 \leq \left|\frac{S_{n,k}}{n!} x^n\right| \leq \frac{|2kx|^n}{n!} = \frac{q^n}{n!}$

et comme $(\sum q^n/n!)$ cvg, $\forall q \in \mathbb{R}$, par TC :

d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \left(\sum \frac{S_{n,k}}{n!} x^n\right)_{n \geq k} \text{cvg}}$

b) $\frac{1}{0!}(e^x-1)^0 = 1$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_{n,0}}{n!} x^n = \frac{S_{0,0}}{0!} + 0 + 0 \dots = 1$

d' $\boxed{\text{I.2 est vraie pour } k=0.}$

d) Avec le D 1 b), $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ \

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{S_{n,k+1}}{n!} x^n = \lambda e^{(k+1)x} + \frac{1}{(k+1)!} (e^x - 1)^{k+1}$$

Pour $x = 0$, $\frac{S_{k+1,k+1}}{(k+1)!} 0^{k+1} + 0 + 0 \dots = \lambda$ donc $\lambda = 0$

cqs la propriété est vraie pour $k+1$.

d $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=k}^{\infty} \frac{S_{n,k}}{n!} x^n = \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k}$

D4) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, fixé, $\forall n \geq k$ $(k \in [\![0, n]\!])$:

$$\frac{S_{n,k}}{k^n} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \frac{j^n}{k^n}$$

pour $j \in [\![0, k-1]\!]$ $\left|\frac{j}{k}\right| < 1$ et $\left(\frac{j}{k}\right)^n \longrightarrow 0$

d'où $\lim_{n \to \infty} \frac{S_{n,k}}{k^n} = \frac{1}{k!} (-1)^0 \binom{k}{k} \times 1 = \frac{1}{k!}$

d° $\boxed{S_{n,k} \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{k^n}{k!}}$

Fin du corrigé Ds2*

exercice 1

1) $n=1$ $\{\{a\}\}$ est l'unique partition de X_1, d'où $\boxed{\pi_1 = 1}$

$\underline{n=2}$ $\{\{a\},\{b\}\}$ et $\{\{a,b\}\}$ sont les partitions de X_2

d'où $\boxed{\pi_2 = 2}$

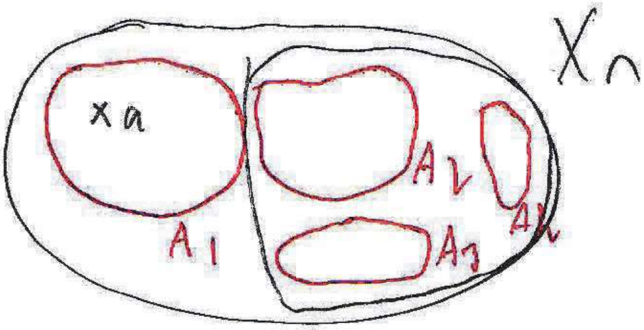
$\underline{n=3}$ $\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$

$\{\{a,b\},\{c\}\}$, $\{\{a,c\},\{b\}\}$, $\{\{b,c\},\{a\}\}$

$\{\{a,b,c\}\}$ sont les partitions de X_3

d'où $\boxed{\pi_3 = 5}$

2)



ici $k=4$

Une partition de X_n est de la forme :

$$\{ \underbrace{\{a, x_2, x_3, \dots, x_p\}}_{A_1}, \underbrace{\{x_{p+1}, \dots, \}}_{A_2}, \dots, \underbrace{\{x_q, \dots, x_n\}}_{A_k} \}$$

① Dans A_1, on peut donc mettre $\boxed{a}$ avec $p-1$ elt ②

avec $p \in [\![1, n]\!]$ (si $p=1$: $A_1 = \{a\}$

$p=n$: $A_1 = X_n$)

Soit $p \in [\![1, n]\!]$, on choisit $\binom{n-1}{p-1}$ élt pour

créer A_1 et avec les elt restant de $X_n - A_1$

qui sont au nombre de $n-p$, on peut créer

Π_{n-p} partitions,

d'où $\boxed{\Pi_n = \sum_{p=1}^{n} \binom{n-1}{p-1} \Pi_{n-p}} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \Pi_k$

rem, pour $p=n$, $A_1 = X_n$ et $n-p=0$ et

comme $\Pi_0 = 1$, on a bien $\underline{1}$

partition avec $A_1 = X_n$.

3) $\Pi_4 = \binom{3}{0}\Pi_3 + \binom{3}{1}\Pi_2 + \binom{3}{2}\Pi_1 + \binom{3}{3}\Pi_0$

$= 5 + 3 \times 2 + 3 + 1 = \underline{15}$, de même :

$\Pi_5 = \underline{52}$ et donc $\boxed{\Pi_6 = 203}$

4) On sait qu'une relation d'équivalence crée une partition de E. sur un ensemble E

Réciproquement soit $\{A_1, \dots, A_h\}$ une partition de E. Associons lui une relation d'équivalence de tel sorte que les classes d'$\sim$ soient $A_1, \dots, A_h$:

$\forall (x,y) \in E^2 \quad x \mathcal{R} y$ si $\exists i \in [\![1, h]\!] \mid x \in A_i$ et $y \in A_i$

- $\forall x \in E \quad \exists i \in [\![1, h]\!] \mid x \in A_i$ car $\bigcup_{i=1}^{h} A_i = E$

 donc $\mathcal{R}$ réflexive

- $\mathcal{R}$ est clairement symétrique.

- $\forall (x,y,z) \in E^3 \mid x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$:

 $\exists i \in [\![1, h]\!] \mid x \in A_i$ et $y \in A_i$

 $\exists j \in [\![1, h]\!] \mid y \in A_j$ et $z \in A_j$

 si $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ (partition). Or $y \in A_i \cap A_j$

 donc $i = j$ d'où $x \in A_i$ et $z \in A_i$: $x \mathcal{R} z$

 donc $\mathcal{R}$ transitive cqs $\mathcal{R}$ relation d'$\sim$

En conséquence il y a exactement le m̂ nombre de partitions et de relations d'éq. sur un ensemble à n élt. c'est $\boxed{\Pi_n}$. (4)

5)

```
from math import factorial

def binome(n,p):
    return(factorial(n)//factorial(n-p)//factorial(p))
```

```
def P(n):
    if n==0 or n==1:
        return 1
    else:
        som=0
        for p in range(1,n+1):
            som=som+binome(n-1,p-1)*P(n-p)
        return(som)
```

```
for n in range(21):
    print('P(',n,') = ',P(n))
```

```
In [4]: (executing lines 1 to 17 of "NombreDeBell(partitions).py")
P( 0 ) =  1
P( 1 ) =  1
P( 2 ) =  2
P( 3 ) =  5
P( 4 ) =  15
P( 5 ) =  52
P( 6 ) =  203
P( 7 ) =  877
P( 8 ) =  4140
P( 9 ) =  21147
P( 10 ) =  115975
P( 11 ) =  678570
P( 12 ) =  4213597
P( 13 ) =  27644437
P( 14 ) =  190899322
P( 15 ) =  1382958545
P( 16 ) =  10480142147
P( 17 ) =  82864869804
P( 18 ) =  682076806159
P( 19 ) =  5832742205057
P( 20 ) =  51724158235372

In [5]:
```

Fin corrigé de l'exercice

d'où $\boxed{G\left(\left[0,\frac{1}{e}\right]\right)=[1,e]}$. Th de la bijection

c) On conclut directement avec le I 1) (notamment le b)) le ~~II~~ 2 c)

d'où $\boxed{\forall a\in\left[-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right] : F_a(1)=\alpha_a}$

4) si $y>0$, $y^y=c \iff e^{y\ln y}=c \iff y\ln y=\ln c$

$$\iff \ln\frac{1}{y}=(-\ln c)\frac{1}{y} \quad \text{c'est } E_{-\ln c}$$

Comme $1\leq c\leq e^{1/e}$, $-\ln c\in\left[-\frac{1}{e},0\right]$, d'après le I 1 a), l'équation $E_{-\ln c}$ admet une unique solution α.

De plus $\alpha=F_{-\ln c}(1)$ avec le 3° c).

cqs l'équation $y^y=c$ admet une unique solution :

$$y_0=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{F_{-\ln c}(1)}=\left(F_{-\ln c}(1)\right)^{-1}=\underset{\uparrow\ 2c)}{F_{-\ln c}(-1)}$$

On conclut avec la définition de F_a :

$$\boxed{y_0=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(-1)(-\ln c)^n=1+\ln c+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n-1)^{n-1}}{n!}(\ln c)^n}$$