DS 3 : corrigé

Exercice 1

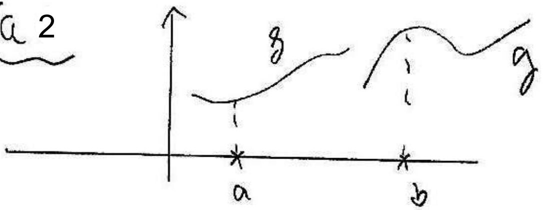
```
from time import *

def test1(n):
    L=10*[0]
    for i in range(9):
        L[n%10]=1
        n=n//10
    if 0 in L[1:10]:
        return False
    else:
        return True

def test2(n):
    for i in range(2,9): #inutile de vérifier i=1 et i=9
        if (n//10**(9-i)) %i !=0:
            return(False)
    return(True)



def recherche():
    L=[]
    t0=time() # on regarde l'heure
    print(t0)
    for n in range(10**8,10**9-1):
        if test1(n) and test2(n):
            print(n) # pour visualiser les nb solutions au fur et à
mesure
            L.append(n)
    t=time()-t0 # c'est le temps qu'elle a mis pour trouver la liste
L
    return(L,t,'secondes')



def rec():
    t0=time()
    a5=5
    L=[]
    c=0
    for a1 in [1,2,3,4,5,6,7,8,9]:
        for a2 in [2,4,6,8]:
            for a3 in [1,2,3,4,5,6,7,8,9]:
                if (a1+a2+a3) % 3 == 0:
                    for a4 in [2,4,6,8]:
                        for a6 in [2,4,6,8]:
                            for a7 in [1,2,3,4,5,6,7,8,9]:
                                for a8 in [2,4,6,8]:
                                    for a9 in [1,2,3,4,5,6,7,8,9]:
                                        n=a1*10**8+a2*10**7+a3*10**6
                                        n+=a4*10**5+a5*10**4+a6*10**3
                                        n+=a7*10**2+a8*10+a9
                                        c+=1
                                        if test1(n) and test2(n):
                                            print(n)
```

```
                                                L.append(n)
    t=time()-t0
    return(L,t,'secondes et nb de nombres testés=',c)




# In [5]: recherche()
# 1478104500.937257
# 381654729
# Out[5]: ([381654729], 2116.312553882599,'secondes')

# In [6]: 2116.312553882599//60
# Out[6]: 35.0 -----> 35 minutes pour les trouver

#         pour un temps plus rapide: voir la fonction rec:

#In [9]: rec()
#381654729
#Out[9]: ([381654729], 1.2845449447631836,
#       'secondes et nb de nombres testés=', 559872)



#Remarque: avec les fonctions str et list, on pouvait écrire :
def test1(n):
    L=list(str(n))
    for i in range(1,10):
        if str(i) not in L:
            return False
    return True
```

①

exercice 2

1)



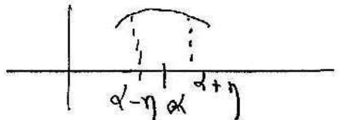
* $a \in I$ car $f(a)g(a)=0$ et $f(a)\neq 0$

donc $I \neq \emptyset$, $I \subset [a,b]$ donc I majoré

cqs $\alpha = \sup I$ existe et $\alpha \in [a,b]$.

* Par caractérisation séquentielle, il existe (x_n) suite de I telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$. Par critère séquentiel de la continuité de g en α, $\lim\limits_{n\to\infty} \overbrace{g(x_n)}^{=0} = g(\alpha)$

cqs $\underline{g(\alpha)=0}$



* Supposons $f(\alpha)\neq 0$, on a donc $\alpha \neq b$ car $f(b)=0$,

d'où $\alpha \in [a,b[$. Par continuité de f en α :

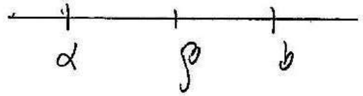
pour $\varepsilon = \frac{|f(\alpha)|}{2} > 0$, $\exists \eta > 0 \mid |x-\alpha| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(\alpha)| \leq \varepsilon$

②

d'où $\big||f(x)| - |f(\alpha)|\big| \leq |f(x)-f(\alpha)| \leq \frac{|f(\alpha)|}{2}$

$\Rightarrow |f(x)| \geq \frac{|f(\alpha)|}{2} > 0$, $\forall x \in [\alpha-\eta, \alpha+\eta]$

d'où $\forall x \in]\alpha, \underbrace{\min(\alpha+\eta, b)}_{\beta}[\neq \emptyset$, $g(x)=0$



donc $]\alpha,\beta[\subset I$ et $\sup I = \alpha \geq \beta$: absurde

d' : $\boxed{f(\alpha)=g(\alpha)=0}$

2) Avec les notations de 1). si $a>b$, en échangeant les rôles de f et g, on a la même conclusion,

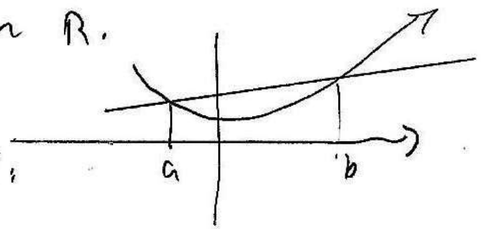
Si $\forall a \in A$ $f(a)\neq 0$, alors $g(a)=0$ et g constante : absurde, idem pour g.

d' : $\boxed{\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid f(\alpha)=g(\alpha)=0}$

3) Par l'absurde, si $\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ $h''(x_1)h''(x_2) \geq 0$, h'' est donc de signe constant. Quitte à changer h en $-h$

ce qui ne change pas les caractères C^2, bornée et non constante, on peut supposer que $\forall x \in \mathbb{R}$ $h''(x) \geq 0$:

donc h est convexe sur $\mathbb{R}$.



Montrons que h non majorée :

comme il existe $a < b$ / $h(a) \neq h(b)$

si $h(a) < h(b)$, $\forall x \geq b$ $h(x) \geq \frac{h(b)-h(a)}{b-a}(x-a) + h(a) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

absurde car h majorée.

si $h(a) > h(b)$, $\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$: absurde

d'où : $\boxed{\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ h''(x_1) h''(x_2) < 0}$

Problème

(ESIGETEL 99) ①

Partie I

0) * comme $\begin{cases} \forall t \in]0, \pi/2[\quad \cos^{2n} t > 0 \\ t \mapsto \cos^{2n} t \text{ continue sur } [0, \pi/2] \end{cases}$: $\boxed{W_n > 0}$

* $W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^{2n+1} t}_{u} \cdot \underbrace{\cos t}_{v'} \, dt = \cancel{\left[\cos^{2n+1} t \cdot \sin t \right]_0^{\pi/2}} + \int_0^{\pi/2} (2n+1) \cos^{2n} t \sin^2 t \, dt$

$= (2n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \, (1 - \cos^2 t) \, dt = (2n+1)(W_n - W_{n+1})$

d'où $\boxed{(2n+2) W_{n+1} = (2n+1) W_n}$

1) a) $J_{n+1} - J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n} t (\cos^2 t - 1) \, dt$

$= -\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n} t \sin^2 t \, dt = -\int_0^{\pi/2} \underbrace{t^2 \sin t}_{v} \cdot \underbrace{\cos^{2n} t \sin t}_{u'} \, dt$

$= -\cancel{\left[t^2 \sin t \left(\frac{-\cos^{2n+1} t}{2n+1} \right) \right]_0^{\pi/2}} - \int_0^{\pi/2} (2t \sin t + t^2 \cos t) \frac{\cos^{2n+1} t}{2n+1} \, dt$

$= \frac{-1}{2n+1} J_{n+1} - \frac{2}{2n+1} \int_0^{\pi/2} t \sin t \cos^{2n+1} t \, dt$

b) $\left(\frac{2n+2}{2n+1} \right) J_{n+1} - J_n = \frac{-2}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \underbrace{t}_{u} \underbrace{\sin t \cos^{2n+1} t}_{v'} \, dt$ IPP,

$= \frac{-2}{2n+1} \left(\underbrace{\left[t \left(-\frac{\cos^{2n+2} t}{2n+2} \right) \right]_0^{\pi/2}}_{=0} - \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n+2} t}{2n+2} \, dt}_{= W_{n+1}/2n+2} \right)$ ②

d $\boxed{J_{n+1} \left(\frac{2n+2}{2n+1} \right) - J_n = \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)} W_{n+1}}$

On $\frac{2n+2}{2n+1} = \frac{W_n}{W_{n+1}}$ et $\frac{W_{n+1}}{2n+1} = \frac{W_n}{2n+2}$ donc ;

$J_{n+1} \frac{W_n}{W_{n+1}} - J_n = \frac{-2}{2n+2} \frac{W_n}{(2n+2)}$ on divise par

$W_n \neq 0$: $\boxed{\frac{J_{n+1}}{W_{n+1}} - \frac{J_n}{W_n} = \frac{-2}{(2n+2)^2}}$ (*)

c) $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2}$

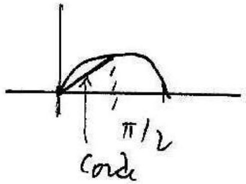
Sommons l'égalité (*) du b) de 0 à n-1 :

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{J_{k+1}}{W_{k+1}} - \frac{J_k}{W_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-2}{4(k+1)^2}$; Somme télescopique d'où

$\Rightarrow \frac{J_n}{W_n} - \frac{J_0}{W_0} = \frac{-1}{2} S_n$

d $\boxed{S_n = \frac{2 J_0}{W_0} - \frac{2 J_n}{W_n}}$

2) a) La fonction $t \mapsto \sin t$ étant concave sur $[0, \pi/2]$ (dérivée $2^{nde} \leqslant 0$) elle est au dessous de la corde $[(0, \sin 0), (\pi/2, \sin \pi/2)]$



$$\underline{\sin t \geqslant \frac{2}{\pi} t}$$

b) * Comme $\begin{cases} t^2 \cos^{2n} t > 0 \text{ sur }]0, \pi/2[\\ t \mapsto t^2 \cos^{2n} t \text{ \underline{continue} sur } [0, \pi/2] \end{cases}$ on a $\underline{J_n > 0}$

* $J_n \leqslant \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t} \cos^{2n} t \, dt = \frac{\pi^2}{4}(W_n - W_{n+1})$

$t^2 \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin^2 t$

et $W_n - W_{n+1} = W_n - \frac{2n+1}{2n+2} W_n = \frac{W_n}{2n+2} = \frac{W_n}{2(n+1)}$

d $\boxed{0 < J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}(W_n - W_{n+1}) = \frac{\pi^2}{8} \frac{W_n}{n+1}}$

b') $0 < \frac{J_n}{W_n} \leqslant \frac{\pi^2/8}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, par théorème d'encadrement :

$\lim_{n \to \infty} \frac{J_n}{W_n} = 0$. Grâce à 1) c on a donc :

la $\underline{\text{suite}}$ (S_n) converge et $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{2 J_0}{W_0}$

Ce qui se traduit en "langage série" :

$\boxed{\left(\sum \frac{1}{p^2}\right) \text{ converge}}$ et $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{2 J_0}{W_0} = \frac{2 \times (\frac{\pi}{2})^3 / 3}{\pi/2} = \frac{\pi^2}{6}$

d $\boxed{\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

c) $S'_{2n+1} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2}$

$= S_{2n+1} - 2 \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = S_{2n+1} - \frac{S_n}{2}$

d $\boxed{S'_{2n+1} = S_{2n+1} - \frac{S_n}{2}}$

d) * (S'_n) converge grâce à $\underline{TSA}$ (le faire) (ou $\underline{\underline{\text{cvg Absolue !}}}$)

* Si $l = \lim_{n \to \infty} S'_n$ on a $\lim_{n \to \infty} S_{2n+1} = l$ (suite extraite)

d'où $l = \lim_{n \to \infty}\left(S_{2n+1} - \frac{S_n}{4}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2/6}{2} = \frac{\pi^2}{12}$

d $\boxed{\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2} = \frac{\pi^2}{12}}$

e) et 3') : voir page (10)

partie II

5

1) a) ITL !!! : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall q \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{p=1}^{q} (-1)^{p-1}\frac{x^p}{p}\right| \leqslant \frac{x^{q+1}}{(q+1)!} M$$

$g : t \mapsto \ln(1+t)$
$a = 0,\ b = x$

avec $M = \sup_{t\in[0,x]} |g^{(q+1)}(t)|$ et $g(t) = \ln(1+t)$

$g'(t) = \frac{1}{1+t}$ et par récurrence $g^{(i)}(t) = \frac{(i-1)!\,(-1)^{i-1}}{(1+t)^i}$

donc $|g^{(q+1)}(t)| = \frac{q!}{(1+t)^{q+1}} \leqslant q!$ donc $M \leqslant q!$

d $\boxed{\left|\ln(1+x) - \sum_{p=1}^{q} (-1)^{p-1}\frac{x^p}{p}\right| \leqslant \frac{x^{q+1}}{q+1}}$

b) $\forall x \in [0,1]$ $\lim_{q\to\infty} \frac{x^{q+1}}{q+1} = 0$, par théorème d'encadrement : $\ln(1+x) = \lim_{q\to\infty}\sum_{p=1}^{q}(-1)^{p-1}\frac{x^p}{p} = \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p-1}\frac{x^p}{p}$

d $\boxed{\forall x \in [0,1] \quad \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p-1}\frac{x^p}{p} = \ln(1+x)}$

2) a) P.P.C. avec $\boxed{\varphi(0) = 1}$! suite à la fin du problème
(prolongement par continuité)

6

b) Grâce au II 1 a) on a :

$$\left|\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx - \int_0^1 \sum_{p=1}^{q}(-1)^{p-1}\frac{x^{p-1}}{p}dx\right| \leqslant \int_0^1\left|\frac{\ln(1+x)}{x} - \sum\cdots\right|dx$$
$$\leqslant \int_0^1 \frac{x^q}{q+1}dx$$

d'où $\left|\int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{p=1}^{q}\frac{(-1)^{p-1}}{p^2}\right| \leqslant \frac{1}{(q+1)^2} \xrightarrow[q\to\infty]{} 0$

Comme au II 1) b/ on conclut :

$$\boxed{\int_0^1 \varphi(x)dx = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p^2} = \frac{\pi^2}{12}}$$

3) a) On fait exactement comme au II 2) b en remplaçant x par x^n :

$$\int_0^1 \ln(1+x^n)dx = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p}\int_0^1 x^{np}dx = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p}\frac{1}{(np+1)}$$

d $\boxed{n\int_0^1 \ln(1+x^n)dx = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}n}{p(np+1)}}$

7

b) Rappel si $(\sum u_p)$ et $(\sum v_p)$ sont convergentes, $(\sum u_p - v_p)$ aussi et $\sum_{p=1}^{\infty} u_p - v_p = \sum_{p=1}^{\infty} u_p - \sum_{p=1}^{\infty} v_p$

Ici on a donc :

$$\left|\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1} n}{p(np+1)} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2}\right| = \left|\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} \frac{-1}{p^2(np+1)}\right|$$

Or $\alpha_p = \frac{(-1)^{p-1}}{p^2(np+1)}$ vérifie $|\alpha_p| \sim \frac{1}{np^3} \geq 0$ et

comme $3 > 1$ on a $(\sum \alpha_p)$ qui converge <u>Absolument</u>

d'où $\left|\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2(np+1)}\right| \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2(np+1)} \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2(np)} = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$

↑ cette série est convergente

<u>Posons</u> $\boxed{C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \in \mathbb{R} \text{ et } \left|\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1} n}{p(np+1)} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2}\right| \leq \frac{C}{n}}$

c) On a donc avec les résultats I 2 d) et II 3 a) et

$$\left|n\int_0^1 \ln(1+x^n)dx - \frac{\pi^2}{12}\right| \leq \frac{C}{n}$$

d'où $\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 \ln(1+x^n)dx = \frac{\pi^2}{12} \neq 0$

donc $n\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \sim \frac{\pi^2}{12}$

et <u>d</u>'où $\boxed{\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \sim \frac{\pi^2}{12n}}$

8

4) a) & b) voir page 10

4 c) Comme $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour $x \in]0,1[$ la limite <u>semble</u> être $\int_0^1 \frac{dx}{0+1}$ <u>démontrons</u> :

$$u_n - \int_0^1 \frac{dx}{0+1} = u_n - 1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{x^n+1} - \frac{1}{0+1}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{-x^n}{x^n+1}\,dx$$

d'où $|u_n - 1| \leq \int_0^1 \frac{x^n}{x^n+1}\,dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

<u>d</u>'où $\boxed{\lim u_n = 1}$ (par th. d'encadrement)

b) $\int_0^1 \ln(1+x^n)dx = \int_0^1 \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{\ln(1+x^n)}_{v}\,dx = \left[x\ln(1+x^n)\right]_0^1 - \int_0^1 x\,\frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\,dx$

$$= \ln 2 - n\int_0^1 \frac{x^n}{x^n+1}\,dx = \ln 2 - n\int_0^1 \frac{x^n+1-1}{x^n+1}\,dx$$

<u>d</u>'où $\boxed{\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx = \ln 2 - n + n u_n}$

c) $nu_n - n + \ln 2 \sim \dfrac{\pi^2}{12n}$ grâce au II 3 c)

d'où $nu_n - n + \ln 2 = \dfrac{\pi^2}{12n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

Fin de II 2) a)

2) On a $\forall x \in]0,1]$ $\varphi'(x) = \dfrac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$

effectuons un DL du numerateur en 0 à l'ordre 3 (2 suffit) :

$$\varphi'(x) = \frac{x-(1+x)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)}{x^2(1+x)} = \frac{-x^2/2 + x^3/6 + o(x^3)}{x^2(1+x)}$$

$$= \frac{-1/2 + o(1)}{1+x} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{-1/2+0}{1} = \frac{-1}{2}$$

T.L.D.

Par le théorème de prolongement des fonctions C^1, on a

$\boxed{\varphi \ C^1 \text{ sur } [0,1] \ \left(\text{et } \varphi'(0) = \frac{-1}{2}\right)}$

b) $\forall x \in]-1,1[$ $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ (série entière)

donc $\forall x \in]-1,1[-\{0\}$ $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$

l'égalité est aussi valable en 0 d'où

$\forall x \in [0,1]$ $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$ et φ C^∞ sur $[0,1]$ Th dérivation des s.e.

en +

I 2 e) $\dfrac{1}{(2p+1)^2} \sim \dfrac{1}{4p^2} > 0$ et $\left(\sum \dfrac{1}{p^2}\right)$ cvg. Par TC,

$\left(\sum \dfrac{1}{(2p+1)^2}\right)$ cvg. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)^2}$

$$S_{2n+1} = S'_n + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^2} = S'_n + \frac{1}{4} S_n$$

tout cvg qd n tend vers l'infini : $\dfrac{\pi^2}{6} = \ell + \dfrac{1}{4}\dfrac{\pi^2}{6}$

d: $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$

3) $W_n = \dfrac{2n-1}{2n} W_{n-1} = \dfrac{2n-1}{2n} \times \dfrac{2n-3}{2n-2} \times \cdots \times \dfrac{1}{2} \cdot W_0$

$$= \frac{(2n)!}{[2n \times (2n-2) \cdots \times 2]^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

d'où $W_n \sim \left(\dfrac{\cancel{2n}}{e}\right)^{2n} \sqrt{4n\pi} \dfrac{1}{\cancel{2^{2n}}} \left(\left(\dfrac{e}{\cancel{n}}\right)^n \dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right)^2 \cdot \dfrac{\pi}{2}$

$$\sim \frac{\sqrt{4n\pi}}{2n\cancel{\pi}} \cdot \frac{\cancel{\pi}}{2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

$\boxed{W_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0}$

II 4 a) $u_1 = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$

$u_2 = [\operatorname{Arctan} x]_0^1 = \dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{1}{(1+x)(1-x+x^2)} = \dfrac{a}{1+x} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$

$-j$ et $-j^2$ racine de X^2-X+1

11

$$a = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3} \qquad -bj + c = \frac{1}{1-j} = \frac{1-j^2}{(1-j)(1-j^2)} = \frac{1-(-1-j)}{3}$$

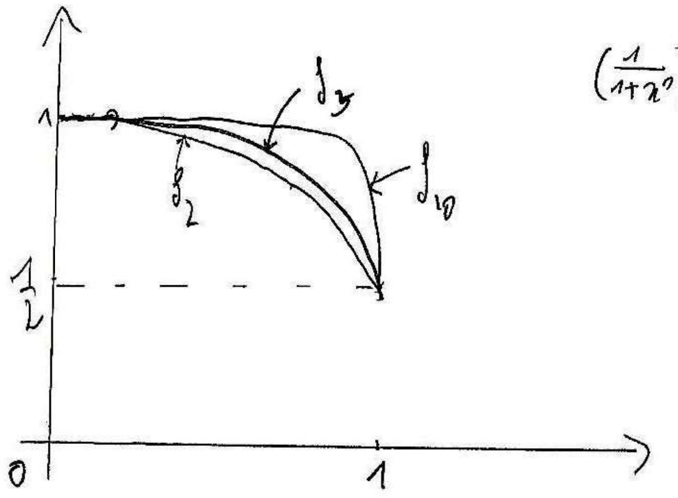
$$= \frac{2+j}{3} \qquad b = -\frac{1}{3} \qquad c = \frac{2}{3}$$

d'où $$u_3 = a\ln 2 + \int_0^1 \frac{2bx - b + b + 2c}{2(x^2-x+1)}\,dx$$

$$= a\ln 2 + \frac{b}{2}\left[\ln(x^2-x+1)\right]_0^1 + \frac{b+2c}{2}\int_0^1 \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$= \text{———} + \text{——} \ \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arctan}\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2}\right]_0^1$$

d'$$\boxed{u_3 = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9}\pi}$$

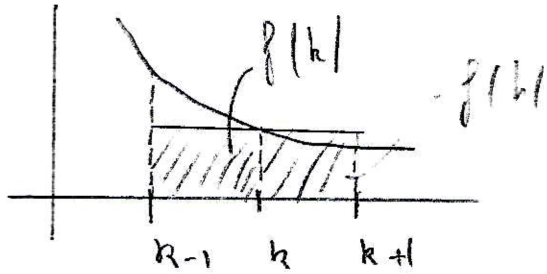


$$\left(\frac{1}{1+x^n}\right)' = \frac{-nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

Ds2 * : corrigé

Centrale MP 2011

I A1)



$\forall k \geq 2 : \forall x \in [k, k+1] \quad f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \quad f \searrow$

On intègre de k à $k+1$: $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$

La première inégalité appliquée à $k-1$ donne $f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx$

d'où : $\boxed{\int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx}$

2) On somme cet encadrement de $k=2$ à $k=n$:

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} f \leq \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f \qquad \text{avec } f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$$

pour $\alpha > 0$, f est bien C^0 et décroissante sur $[1, +\infty[$

d'où $\int_2^{n+1} f \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n f$ — si $\alpha \leq 0$: divergence grossière

On $\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^n = \frac{n^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha+1}$ si $\alpha \neq 1$, $= \ln n$ si $\alpha = 1$

d'où on conclut comme dans le cours ! $\boxed{CV \Leftrightarrow \alpha > 1}$

3) si $\alpha > 1$, tout cvg de l'encadrement du 2), d'où lorsque $n \to +\infty$, il vient :

$$\int_2^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

d'où $1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$

d'où $\boxed{1 \leqslant S(\alpha) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha - 1}}$

I B 1) On somme l'encadrement du I A 1) de $k = n$ à N :

$$\int_n^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{N} \frac{dt}{t^\alpha}$$

tout cvg qd $N \to \infty$: $\int_n^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant R_n(\alpha) \leqslant \int_{n-1}^{\alpha} \frac{dt}{t^\alpha}$

donc $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant R_n(\alpha) \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}$ puis on rajoute $\frac{-1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$,

d'où $0 \leqslant R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)}\left[\frac{1}{(n-1)^{\alpha}} - \frac{1}{n^\alpha}\right]$

donc

$$0 \leqslant n^\alpha \left[R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\right] \leqslant n^\alpha \left[\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right]$$

On $\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha(1-\frac{1}{n})^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}\left(1+\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{n^\alpha}$

$\sim \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$

d'où $n^\alpha\left[\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right] \sim \frac{n^\alpha \alpha}{n^{\alpha+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

par th. d'encadrement $\lim_{n\to\infty} n^\alpha\left(R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\right) = 0$

d'où $\boxed{R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \& \text{ "}o \Rightarrow O\text{"}}$

B 2) $f(k+1) = f(k) + f'(k) + \frac{f''(k)}{2} + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{2!} f'''(t)\,dt$ (T.R.I.)

On $f'(t) = t^{-\alpha}$, $f''(t) = -\alpha t^{-\alpha-1}$, $f'''(t) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}}$

donc $f(k+1) = f(k) + \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2k^{\alpha+1}} + A_k$

et $0 \leqslant A_k = \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{2} \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}}\,dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{2} \frac{\alpha(\alpha+1)}{k^{\alpha+2}}\,dt$

$= \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}} \times \int_k^{k+1} 1\,dt$

d'où $0 \leq A_k \leq \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$

d'où : $\boxed{f(k+1) - f(k) = \dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{\alpha}{2k^{\alpha+1}} + A_k \text{ et } 0 \leq A_k \leq \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2 \cdot k^{\alpha+2}}}$

B 7) On a donc $\dfrac{1}{k^\alpha} = f(k+1) - f(k) + \dfrac{\alpha}{2k^{\alpha+1}} - A_k \quad (*)$

* comme $\alpha > 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ d'où $\sum\limits_{k=n}^{N} f(k+1) - f(k) = f(N+1) - f(n)$

$\xrightarrow[N \to \infty]{} -f(n)$

* $A_k = O\left(\dfrac{1}{k^{\alpha+2}}\right)$ et $\dfrac{1}{k^{\alpha+2}} \geq 0$ d'où par sommation

des relations de comparaison, $R_n(A) = O(R_n(\alpha+2))$

$= O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \quad (I\,3\,1)$

d'où en sommant de n à l'infini la relation $(*)$

on obtient $R_n(\alpha) = -f(n) + \dfrac{\alpha}{2} R_n(\alpha+1) + O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$

d' $\boxed{R_n(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \dfrac{1}{2n^\alpha} + O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\right)}$

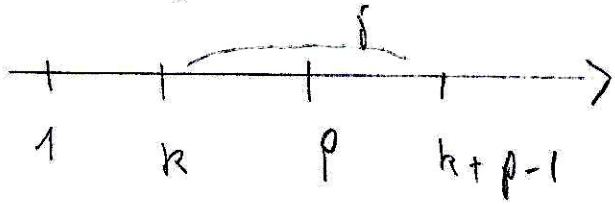
II A 1)

Analyse : $g=\sum_{i=0}^{p-1} a_i f^{(i)}$

$$g'+\frac{g''}{2!}+\dots+\frac{g^{(p)}}{p!} = \sum_{k=1}^{p} \frac{g^{(k)}}{k!} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!}\underbrace{\sum_{i=0}^{p-1} a_i f^{(i+k)}}_{\text{cdv } j=i+k}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!}\sum_{j=k}^{k+p-1} a_{j-k} f^{(j)}$$

on intervertit $\sum_k \sum_j \to \sum_j \sum_k$



$1 \le k \le j \le k+p-1 \le 2p-1$

Le j va donc de 1 à 2p-1, mais pour j fixé, le k va de 1 à j mais doit aussi rester dans $[\![1,p]\!]$

si $j\in[\![1,p]\!]$ alors $k\in[\![1,j]\!] \Rightarrow 1\le k\le j\le p\le k+p-1$

si $j\in[\![p+1,2p-1]\!]$ il faut alors que $k\le p\le j$ et $j\le k+p-1$ donc $k\ge j-p+1$

csq : $$= \sum_{j=1}^{p} \underbrace{\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k!}a_{j-k}}_{\alpha_j} f^{(j)} + \sum_{j=p+1}^{2p-1} \underbrace{\sum_{k=j-p+1}^{p} \frac{1}{k!}a_{j-k}}_{\gamma_j} f^{(j)}$$

Il suffit donc que $\alpha_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k!} a_{1-k} = \boxed{a_0 = 1}$ et que

$$\boxed{\forall j \in [\![2, p]\!], \quad \alpha_j = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k!} a_{j-k} = 0}$$ pour qu'il reste

$$\forall g \in C^\infty, \quad g' + \dots + \frac{g^{(p)}}{p!} = g' + \sum_{j=p+1}^{2p-1} \alpha_j g^{(j)} = g' + \sum_{\ell=1}^{p-1} \alpha_{p+\ell} g^{(p+\ell)}$$

---

2) Le 1) a montré que $\underline{a_0 = 1}$ et pour $j = p+1$

$$\alpha_{p+1} = 0 \text{ donc } \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k!} a_{p+1-k} = 0 \iff a_p + \sum_{k=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-k}}{k!} = 0$$

d'où : $$\boxed{a_0 = 1 \text{ et } \forall p \geq 1 \quad a_p = -\sum_{i=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-i}}{i!}}$$

On en déduit par récurrence : "$|a_p| \leq 1$" :

c'est vrai pour $p = 0$, supposons que cela soit vrai pour tout $i \leq p$, alors :

$$|a_{p+1}| \leq \sum_{i=2}^{p+2} \frac{1}{i!} < \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!} = e - 2 \leq 1$$

d'où : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \quad |a_p| \leq 1}$

On a $a_1 = -\frac{a_0}{2!} = -\frac{1}{2}$ & $a_2 = -\frac{a_1}{2!} - \frac{a_0}{3!} = \frac{+1}{12}$ 7

d'où $\boxed{a_0 = 1,\ a_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } a_2 = \frac{1}{12}}$

3a) $\forall z \in \mathbb{C}$ $a_p z^p = O(|z|^p)$ car (a_p) bornée (par 1)

Comme $|z| < 1$, $(\sum |z^p|)$ cvg d'où par TC :

$$\boxed{\left(\sum a_p z^p\right) \text{ cvg (absolument)}}$$

b) $(e^z - 1)\varphi(z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \times \left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p\right)$

posons $\alpha_n = \begin{cases} 1/n! & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$ et $\beta_n = a_n$

Comme les 2 séries sont absolument cvg, le produit de Cauchy donne :

$(e^z - 1)\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ avec $\begin{cases} c_0 = \alpha_0 \beta_0 = 0 \\ c_n = \sum_{p=0}^{n} \alpha_p \beta_{n-p} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} a_{n-p} \\ \forall n \geq 1 \end{cases}$

On a $\underline{c_1} = \alpha_1 \beta_0 = 1 \times 1 = \underline{1}$

II A 2)

$\forall n \geq 2$: $c_n = a_{n-1} + \frac{a_{n-2}}{2!} + \dots + \frac{a_0}{n!} = a_{n-1} + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{n-1+1-i}}{i!} = 0$

On a donc : $\boxed{\forall |z|<1 \quad (e^z-1)\varphi(z) = z}$

$e^z = 1 \Leftrightarrow e^{x+iy} = 1$ avec $z = x+iy$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ y \equiv 0 \ (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow z = 0 + 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}$

d'où si $|z|<1$ et $z \neq 0$ alors $e^z \neq 1$

d'où : $\boxed{\forall |z|<1, \ z \neq 0 : \quad \varphi(z) = \frac{z}{e^z-1}}$

c) On a donc $\forall x \in]-1,1[\quad \varphi(x) = \frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

On y voit du "DL" :

$$\left|\varphi(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |x^n| \quad (|a_n| \leq 1)$$

$$\leqslant \frac{|x|^{N+1}}{1-|x|} = o(x^N)$$

d'où le DL de φ en 0 est $\left| \begin{array}{l} \varphi(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + o(x^N) \\ \forall N \in \mathbb{N} \end{array}\right.$

si les coefficients $a_3, a_5, a_7 \dots$ sont nuls

c'est que $\varphi(x) - a_1 x = \varphi(x) + x/2$ doit être <u>paire</u>.

Posons $f(x) = \varphi(x) + x/2$.

$\forall x \in]-1,1[$ $f(-x) - f(x) = \frac{-x}{e^{-x}-1} - x/2 - \frac{x}{e^{x}-1} - \frac{x}{2}$

$= \frac{-x(e^{x}-1) - x(e^{-x}-1) - x(e^{x}-1)(e^{-x}-1)}{(e^{x}-1)(e^{-x}-1)} = 0$

d'où : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad a_{2k+1} = 0}$

$a_4 = -\frac{a_3}{2!} - \frac{a_2}{3!} - \frac{a_1}{4!} - \frac{a_0}{5!}$ d'où $\boxed{a_4 = \frac{-1}{720}}$

II B 1) f $C^\infty / \mathbb{R}_+^*$

$g(k+1) = \sum_{j=0}^{2p} \frac{g^{(j)}(k)}{j!} 1^j + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} g^{(2p+1)}(t)\,dt$

cdV : $t = k+u$

$g(k+1) - g(k) = f'(k) + \sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,p} f^{(2p+l)}(k) + \int_0^1 \frac{(1-u)^{2p}}{(2p)!} g^{(2p+1)}(k+u)\,du$

donc $R(k) = \sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,p} f^{(2p+l)}(k) + \int_0^1 \frac{(1-u)^{2p}}{(2p)!} g^{(2p+1)}(k+u)\,du$

$= \sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,p} f^{(2p+l)}(k) + \int_0^1 \frac{(1-u)^{2p}}{(2p)!} \sum_{i=0}^{2p-1} a_i f^{(2p+1+i)}(k+u)\,du$

On $f^{(i)}(x) = (1-\alpha)(-\alpha)(-\alpha-1)\ldots(2-\alpha-i)\, x^{1-\alpha-i} \times \frac{1}{1-\alpha}$

donc :

10

$$R(k) = \sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,p} (1-\alpha)(-\alpha)\cdots(2-\alpha-2p+l) \frac{k^{1-\alpha-2p-l}}{1-\alpha}$$

$$+ \int_0^1 \frac{(1-u)^{2p}}{(2p)!} \sum_{i=0}^{2p+1} a_i (1-\alpha)\cdots(2-\alpha-(2p+1+i)) \frac{(k+u)^{1-\alpha-(2p+1+i)}}{1-\alpha}\, du$$

$$= k^{-\alpha-2p} \sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,p} \frac{(1-\alpha)(-\alpha)\cdots(2-\alpha-2p+l)}{(1-\alpha)\, k^{l-1}}$$

$$+ \int_0^1 \frac{(1-u)^{2p}}{(2p)!} \sum_{i=0}^{2p+1} \frac{a_i (-\alpha)\cdots(2-\alpha-2p-1-i)}{(k+u)^{\alpha+2p+i}}\, du$$

On majore $\frac{1}{k^{l-1}}$ par 1 et $\frac{1}{(k+u)^{\alpha+2p+i}} \leq \frac{1}{k^{\alpha+2p}}$

d'où $\boxed{|R(k)| \leq A k^{-\alpha-2p}}$ (avec A indépendant de k)

B.2) On a $R(k) = O\left(\frac{1}{k^{\alpha+2p}}\right)$ et comme $\alpha+2p>1$,

$\sum R(k))_k$ cvg et par S.R.C., $\sum_{k=n}^{\infty} R(k) = O\left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+2p}}\right)$

On $\sum_{k=n}^{N} R(k) = \sum_{k=n}^{N} \left(g(k+1) - g(k) - g'(k)\right)$

$$= g(N+1) - g(n) - \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

On $\lim_{N\to\infty} g(N) = 0$ par T.G. nb de termes ind. de k

d'où lorsque $N \to \infty$, il vient :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} R(k) = -g(n) + R_n(\alpha)$$

donc $R_n(\alpha) = -g(n) + \sum_{k=n}^{\infty} R(k)$

or $\sum_{k=n}^{\infty} R(k) = O\left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+2p}}\right)$ et $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+2p}} \sim \frac{1}{(\alpha+2p-1)n^{\alpha+2p-1}}$

grâce au I B 1°)

d'où $\boxed{R_n(\alpha) = -g(n) + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}}\right)}$

B.3) $g(n) = \frac{-1}{2n^2}$, $g'(n) = \frac{1}{n^3}$, $g''(n) = \frac{-3}{n^4}$, $g'''(n) = \frac{12}{n^5}$

et $g''''(n) = \frac{-60}{n^6}$

Avec $\left|\begin{array}{l}\text{II A 2)} \\ \text{A 3)}\end{array}\right.$, $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{12}$, $a_3 = 0$ et $a_4 = -\frac{1}{720}$

d'où $\boxed{R_n(3) = \frac{1/2}{n^2} + \frac{1/2}{n^3} + \frac{1/4}{n^4} - \frac{1/12}{n^6} + O\left(\frac{1}{n^8}\right)}$

III A 1) $\underline{A_0 = 1}$ donc existe et unique !

$A_1' = 1$ donc $A_1 = X + \lambda$

et $\int_0^1 A_1 = \frac{1}{2} + \lambda \implies \underline{A_1 = X - \frac{1}{2}}$ $\underline{\exists \text{ et unique}}$

$A_2' = X - \frac{1}{2}$ donc $A_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{1}{2}X + \lambda$

et $\int_0^1 A_2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \lambda = 0 \Rightarrow$ $\underline{A_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12}}$

idem pour $\underline{A_3 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^4 + \frac{1}{12}X}$

donc $A_0, \dots, A_3$ existent et sont uniques.

Supposons A_n existe et unique, alors A'_{n+1} existe et unique donc A_{n+1} $\exists$ et unique à 1 constante près qui est unique avec la condition $\int_0^1 A_{n+1} = 0$

d'où $\underline{(A_n) \text{ déterminée de façon unique}}$

b) Montrons que $C_n(t) = (-1)^n A_n(1-t)$ vérifie (III.1) :

$c_0(t) = A_0(1-t) = 1$

$c'_{n+1}(t) = (-1)^{n+2} A'_{n+1}(1-t)$

$= (-1)^n A_n(1-t) = C_n(t)$

$\int_0^1 A_{n+1}(1-t)\,dt = \int_0^1 A_{n+1}(u)\,du$ cdv $u = 1-t$, $du = -dt$

$= 0$

Par unicité, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n(t) = (-1)^n A_n(1-t)}$

c) $\forall n \geq 2 \quad A_n(1) - A_n(0) = \int_0^1 A'_n(t)\,dt$

$$= \int_0^1 A_{n-1}(t)\,dt = 0 \quad \text{car } n-1 \geq 1$$

d'où $\boxed{\forall n \geq 2 \quad A_n(0) = A_n(1)}$

$$A_{2n-1}(0) = (-1)^{2n-1} A_{2n-1}(1) = -A_{2n-1}(1) = -A_{2n-1}(0)$$

b)

d'où $\boxed{A_{2n-1}(0) = 0}$

d) Montrons le par récurrence sur n.

$A_0(x) = 1 = c_0$

si c'est vrai pour n,

$$A_{n+1}(x) = \int_0^x A_n(t)\,dt + A_{n+1}(0)$$

$$= \int_0^x \left(c_0 \frac{t^n}{n!} + \dots + c_n\right) dt + c_{n+1}$$

$$= c_0 \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots + c_n X + c_{n+1}$$

donc vraie pour $n+1$

Puis en intégrant cette relation pour $n \geq 1$:

$$\int_0^1 A_{n+1} = \frac{c_0}{(n+1)!} + \dots + \frac{c_{n-1}}{2!} + c_n = 0$$

c) $a_0 = c_0$ et par récurrence forte avec la

II A 2) et III A 1 d) : même relation de récurrence,

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = c_n}$

III A 2 a) $\forall t \in [-1,1] : |A_n(t)| = \left| \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} \frac{t^i}{i!} \right| \underset{\text{I A 2)}}{\leq} \sum_{i=0}^{n} 1 \times \frac{1}{i!} \leq e^1$

cqs $A_n(t) z^n = O(|z|^n)$, par TC :

d'où $\boxed{\left(\sum A_n(t) z^n\right) \text{ cvg } \forall t \in [-1,1], \forall |z| < 1}$

b) Posons $u_n(t) = A_n(t) z^n$ u_n C^1 sur $[0,1]$ / TG

$\forall n \geq 1 \quad u_n'(t) = A_n'(t) z^n = A_{n-1}(t) z^n$

$\forall t \in [0,1] \quad |u_n'(t)| \leq e \cdot |z^n| = \alpha_n$

Comme $|z| < 1$, $(\sum \alpha_n)$ cvg et $(\sum u_n')$ C.N. / $[0,1]$

$(\sum u_n)$ C.S. sur $[0,1]$ (c'est la a))

d'où $\boxed{\begin{array}{l} f(\cdot, z) \text{ est } C^1 \text{ sur } [0,1] \\ \forall t \in [0,1], \forall |z| < 1, \ \frac{\partial f}{\partial t}(t,z) = z f(t,z) \end{array}}$

Si on pose $g = f(\cdot, z)$, g solution de $g' = zg$

cqs $\exists \lambda \in \mathbb{C} \mid \forall t \in [0,1] : g(t) = \lambda e^{zt}$

On $g(0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(0) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \dfrac{z}{e^z - 1}$ (III A 3) (fct φ)

III A 1)

d'où $\boxed{\forall t \in [0,1],\ \forall 0 < |z| < 1 : \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) z^n = \dfrac{z e^{tz}}{e^z - 1}}$

c) Si $0 < |z| < 2\pi$, $e^z = 1 \iff \begin{cases} e^a = 1 \\ b = 2k\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff z = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$z = a + ib$

absurde.

donc $e^z - 1 \neq 0$ or $\dfrac{z e^{z/2}}{e^z - 1} + \dfrac{z}{e^z - 1} = \dfrac{z(\cancel{e^{z/2}+1})}{(e^{z/2}-1)(\cancel{e^{z/2}+1})}$

d'où $\forall z \in \mathbb{C} \mid \boxed{0 < |z| < 2\pi ;\ \dfrac{z e^{z/2}}{e^z - 1} + \dfrac{z}{e^z - 1} = \dfrac{2 z/2}{e^{z/2} - 1}}$

On a $\forall 0 < |z| < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(1/2) z^n = \dfrac{z e^{z/2}}{e^z - 1} = 2\varphi(z/2) - \varphi(z)$

$= 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$

Par identification des coeff. d'1 série entière :

d'où $\boxed{A_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right) a_n}$

Suite et fin du corrigé fourni par mon collègue de l'UPS. M. Dufait

III.A.3) Variations des polynômes de Bernoulli

a) Montrons par récurrence sur p que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a les tableaux de variations suivants:

x	0	α_{2p-1}	$1/2$	β_{2p-1}	1
$A_{4p-2}(x)$	$\searrow$	0	$\searrow\ \nearrow$	0	$\nearrow$

x	0	α_{2p-1}	$1/2$	β_{2p-1}	1
$A_{4p-1}(x)$	$0\ \nearrow$	$\searrow$	0	$\searrow\ \nearrow$	0

x	0	α_{2p}	$1/2$	β_{2p}	1
$A_{4p}(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow\ \searrow$	0	$\searrow$

x	0	α_{2p}	$1/2$	β_{2p}	1
$A_{4p+1}(x)$	$0\ \searrow$	$\nearrow$	0	$\nearrow\ \searrow$	0

Pour $p = 1$, le tableau de de variations de A_2 est bien comme indiqué avec $\alpha_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ et $\beta_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$, puis, comme $A_3' = A_2$ et $A_3(1/2) = a_3 = 0$, le tableau de variations de A_3 est celui voulu. On en déduit, puisque $A_4' = A_3$ que A_4 croît sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc $A_4\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^3} - 1\right) > a_4$ ce qui donne $a_4 < 0 < A_4\left(\frac{1}{2}\right)$ et donc, grâce à sa stricte monotonie, A_4 a une unique racine $\alpha_4 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. De même, puisque $A_4(1) = a_4$, A_4 décroît sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et a une unique racine $\beta_4 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$. On a donc le tableau voulu pour A_4 et donc celui de A_5 en sachant que $A_5(0) = A_5(1) = A_5(1/2) = 0$.

Si le résultat est vrai pour p, du tableau de A_{4p+1}, on déduit le signe de A'_{4p+2} qui donne la décroissance stricte de A_{4p+2} sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et sa croissance stricte sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et, comme pour A_4 ceci donne, puisque $\frac{1}{2^{n-1}} - 1 < 0$, $A_{4p+2}\left(\frac{1}{2}\right) < 0 < a_{4p+2}$ donc A_{4p+2} s'annule une fois et une seule dans chaque intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$. On en déduit le signe de A_{4p+2} donc les variations de A_{4p+3}, puis son signe sachant que A_{4p+3} s'annule en 0, $\frac{1}{2}$ et 1. Les tableaux de variations de A_{4p+4} et A_{4p+5} s'obtiennent de même et sont bien ceux attendus.

b) ⋄ D'après les tablaux ci-dessus $\|A_{2n}\|_\infty^{[0,1]} = \text{Max}\left(|a_{2n}|, \left|A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\right|\right)$ mais, pour $n \geqslant 1$, $\left|A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right)|a_{2n}| < |a_{2n}|$ donc $\underline{\forall n \geqslant 1,\ \forall x \in [0,1],\ |A_{2n}(x)| \leqslant |a_{2n}|}$.

⋄ Puisque $A_{2n+1}(1-x) = -A_{2n+1}(x)$, on a $\|A_{2n+1}\|_\infty^{[0,1]} = \|A_{2n+1}\|_\infty^{[0,1/2]}$. Mais si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $|A_{2n+1}(x)| = \left|A_{2n+1}(0) + \int_0^x A_{2n}(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^x A_{2n}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant x\,\|A_{2n}\|_\infty^{[0,1]}$ car $a_{2n+1} = 0$ si $n \geqslant 1$. Ainsi $\underline{\forall n \geqslant 1,\ \forall x \in [0,1],\ |A_{2n+1}(x)| \leqslant \frac{|a_{2n}|}{2}}$.

III.B - *Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin*

III.B.1) *a)* Montrons par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$ (il est plus simple de partir de 0) que

$$\underline{f(1) - f(0) = \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1} \left[A_j(t) f^{(j)}(t)\right]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t)\,\mathrm{d}t\,.}$$

Pour $q = 0$, la formule se réduit à $f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)\,dt$ qui est vraie et si celle est vraie pour q, comme, par intégration par parties,

$$\int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 A'_{q+1}(t) f^{(q+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \Big[A_{q+1}(t) f^{(q+1)}(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 A_{q+1}(t) f^{(q+2)}(t)\,\mathrm{d}t,$$

on obtient celle pour $q+1$.

b) Puisque $A_1(0) = -A_1(1) = -\frac{1}{2}$ et pour $k \geqslant 1$, $A_{2k}(1) = A_{2k}(0)$ et $A_{2k+1}(1) = A_{2k+1}(0) = 0$, on en déduit, pour tout $p \geqslant 0$,

$$\underline{f(1) - f(0) = \frac{1}{2}\big(f'(1) + f'(0)\big) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\Big(f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0)\Big) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t\,.}$$

III.B.2) ◇ En appliquant à $f_k(t) = f(k+t)$, on obtient

$$\begin{aligned} f(k+1) - f(k) &= \frac{1}{2}\big(f'(k+1) + f'(k)\big) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\Big(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)\Big) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t+k)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\big(f'(k+1) + f'(k)\big) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\Big(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)\Big) - \int_k^{k+1} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

donc, en sommant entre n et N, par télescopage,

$$f(N+1) - f(n) = \sum_{k=n}^{N} f'(k) + \frac{1}{2}\big(f'(N+1) - f'(n)\big) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\Big(f^{(2j)}(N+1) - f^{(2j)}(n)\Big) - \int_n^{N+1} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

et, selon les hypothèses, d'une part, $\forall j,\ f^{(j)}(N+1) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ et d'autre part, en notant ϵ est le signe constant de $f^{(2p+2)}$ sur $[n, +\infty[$, $\forall t \in [n, +\infty[$, $\left|A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\right| \leqslant \left\|A_{2p+1}\right\|_\infty^{[0,1]} \epsilon\, f^{(2p+2)}(t)$, avec

$$\int_n^x \left|f^{(2p+2)}(t)\right|\,\mathrm{d}t = \epsilon \int_n^x f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t = f^{(2p+1)}(x) - f^{(2p+1)}(n) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -f^{(2p+1)}(n)$$

ce qui montre l'intégrabilité de $f^{(2p+2)}$ donc de $A^*_{2p+1} f^{(2p+2)}$ sur $[n, +\infty[$. En écrivant

$$\sum_{k=n}^{N} f'(k) = f(N+1) - f(n) - \frac{1}{2}\big(f'(N+1) - f'(n)\big) + \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\Big(f^{(2j)}(N+1) - f^{(2j)}(n)\Big) + \int_n^{N+1} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

ceci montre la convergence de $\sum\limits_{k\geqslant n} f'(k)$ et donne, à la limite,

$$\underline{\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = f - f(n) + \frac{1}{2} f'(n) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t\,.}$$

◇ L'inégalité vue plus haut donne $\left|\int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left\|A_{2p+1}\right\|_\infty^{[0,1]} \epsilon \int_n^{+\infty} f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t = -\epsilon \left\|A_{2p+1}\right\|_\infty^{[0,1]} f^{(2p+1)}(n)$ donc , avec le résultat de [**A.3.b**] , et vu que le signe du majorant est positif, $\underline{\left|\int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|a_{2p}|}{2} \left|f^{(2p+1)}(n)\right|}$.

III.B.3) En appliquant la formule ci-dessus à $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$ au rang $p-1$, ce qui est légitime car, comme on a vu au [**II.B.1**], f est de classe C^∞ sur tout $[n, +\infty[$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f \leqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in$

$\mathbb{R}_+^*$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{x^{\alpha+n-1}}$ du signe de $(-1)^{n-1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on obtient $\underline{\displaystyle\int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t) f^{(2p)}(t)\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)}$.

IV - Complément sur l'erreur

IV.A - *Encadrement de l'erreur*

IV.A.1) Si $n \equiv 1 \bmod 4$ alors selon **[III.A.3.a]**, $A_n \leqslant 0$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $A_n \geqslant 0$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Donc, l'inégalité $\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $g(t) \leqslant g\left(\frac{1}{2}\right)$ implique $\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $A_n(t)g(t) \geqslant g\left(\frac{1}{2}\right) A_n(t)$. De même, $\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $g(t) \geqslant g\left(\frac{1}{2}\right)$ implique $\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $A_n(t)g(t) \geqslant g\left(\frac{1}{2}\right) A_n(t)$. On a donc $\forall t \in [0,1]$, $A_n(t)g(t) \geqslant g\left(\frac{1}{2}\right) A_n(t)$ donc $\displaystyle\int_0^1 A_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant g\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 A_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ car $n \geqslant 1$. Le cas $n \equiv 3 \bmod 4$ se traite de même et on peut résumer en $\underline{\forall p \in \mathbb{N},\ (-1)^p \displaystyle\int_0^1 A_{2p+1}(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0}$.

IV.A.2) ◇ Par définition (vue au **[II.B.2]**) et d'après **[III.B.3]**, on a pour $p \geqslant 1$,

$$\widetilde{S}_{n,2p} = S(\alpha) - R_n(\alpha) - f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j} f^{(2j)}(n) = S(\alpha) - \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Or $\displaystyle\int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=n}^{+\infty}\int_k^{k+1} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=n}^{+\infty}\int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t+k)\,dt$ et, en posant, pour $t \in [0,1]$, $g_k(t) = f^{(2p+2)}(t+k)$, on a $g_k'(t) = f^{(2p+3)}(t+k) \geqslant 0$ (voir **[III.B.3]**) donc on peut appliquer **[1]** et on obtient que $\forall k \geqslant n$, $\int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t+k)\,dt$ est du signe de $(-1)^p$ et donc $S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2p}$ est également du signe de $(-1)^p$.
Ceci donne donc $\underline{\widetilde{S}_{n,4p} \leqslant S(\alpha) \leqslant \widetilde{S}_{n,4p+2} \text{ et } \widetilde{S}_{n,4p} \leqslant S(\alpha) \leqslant \widetilde{S}_{n,4p-2}}$.

◇ Donc $0 \leqslant S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4p} \leqslant \widetilde{S}_{n,4p+2} - \widetilde{S}_{n,4p} = -a_{4p+2} f^{(4p+2)}(n)$ d'où $\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4p}\right| \leqslant \left|a_{4p+2} f^{(4p+2)}(n)\right|$ et $-a_{4p} f^{(4p)}(n) = \widetilde{S}_{n,4p} - \widetilde{S}_{n,4p-2} \leqslant S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4p-2} \leqslant 0$ d'où $\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4p-2}\right| \leqslant \left|a_{4p} f^{(4p)}(n)\right|$. On a donc traité le cas $q = 2p$ et $q = 2p-1$, donc $\underline{\forall q \geqslant 1,\ \left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2q}\right| \leqslant \left|a_{2q+2} f^{(2q+2)}(n)\right|}$.

IV.A.3) On a donc $\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{100,4}\right| \leqslant \left|a_6 f^{(6)}(100)\right|$. Or $f^{(6)}(x) = (-1)^5 \dfrac{3\times 4\times 5\times 6\times 7}{x^8} = -\dfrac{7\times 6!}{2\,x^8}$ (voir **[III.B.3]**) donc $\underline{\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{100,4}\right| \leqslant \frac{1}{12}10^{-16} < 10^{-17}}$.

IV.B - *Séries de Fourier*

IV.B.1) $\widetilde{A}_p(x+2\pi) = A_p\left(\frac{x}{2\pi} + 1 - \left[\left(\frac{x}{2\pi}+1\right]\right) = A_p\left(\frac{x}{2\pi} - \left[\left(\frac{x}{2\pi}\right]\right) = \widetilde{A}_p(x)$ car $\forall t,\ [t+1] = [t]+1$.
$\forall x \in [0, 2\pi[$, $\widetilde{A}_p(x) = A_p\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ qui se prolonge en une fonction continue sur $[0, 2\pi]$ donc, vue la périodicité, $\underline{\widetilde{A}_p \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$.

IV.B.2) ERREUR D'ÉNONCÉ: *lire $\widetilde{A}_p(x)$ au lieu de $\widetilde{A}_p(t)$ dans l'intégrande.*

En posant $x = 2\pi\,t$, on a déjà $\widehat{A}_p(n) = \displaystyle\int_0^1 A_p(u)\,\mathrm{e}^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t$. Si $n = 0$, on a donc $\widehat{A}_p(0) = \displaystyle\int_0^1 A_p(u)\,\mathrm{d}t = 0$ car $p \geqslant 1$. Si $n \neq 0$, on peut écrire $\widehat{A}_p(n) = \displaystyle\int_0^1 A_p(u)\, f^{(p+1)}(t)\,\mathrm{d}t$ en prenant $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2i\pi nt}}{(-2i\pi n)^{p+1}}$ de façon à utiliser la formule du **[III.B.1]**. Comme $A_j(1) = A_j(0)$ pour $j \geqslant 2$ et $f^{(j)}(1) = f^{(j)}(0)$ pour tout j, il vient

$$\widehat{A}_p(n) = (-1)^p \left[0 - (-1)^2 \frac{A_1(1) - A_1(0)}{(-2i\pi n)^p}\right]$$

soit $\underline{\widehat{A}_p(0) = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z}^*,\ \widehat{A}_p(n) = -\dfrac{1}{(2i\pi n)^p}}$.

IV.B.3) Comme au [1], la restriction de $\widetilde{A}_p$ à $[0, 2\pi[$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $[0, 2\pi]$, donc $\widetilde{A}_p$ est de classe C^∞ par morceaux sur $\mathbb{R}$. De plus, la valeur en 2π de ce prolongement est $A_p(1)$ donc, si $p \geqslant 2$, $\widetilde{A}_p$ est continue sur $\mathbb{R}$ tandis que si $p = 1$, $\widetilde{A}_1(0^+) = -\frac{1}{2}$ et $\widetilde{A}_1(0^-) = \frac{1}{2}$.
Les théorèmes de Dirichlet et de connvergence normale des séries de Fourier donnent donc

$$\begin{cases} \text{si } p \geqslant 2, \text{ la série de Fourier de } \widetilde{A}_p \text{ converge normalement vers } \widetilde{A}_p \text{ sur } \mathbb{R} \ ; \\ \text{si } p = 1, \text{ la série de Fourier de } \widetilde{A}_1 \text{ converge simplement vers } \widetilde{A}_1 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus 2\pi.\mathbb{Z}, \text{ vers } 0 \text{ sur } 2\pi.\mathbb{Z} \ . \end{cases}$$

IV.B.4) Pour $p \geqslant 1$, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{A}_{2p}(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2i\pi n)^{2p}} \left[e^{inx} + e^{-inx}\right]$ et $\widetilde{A}_{2p}(0) = A_{2p}(0) = a_{2p}$ ce qui donne $\underline{a_{2p} = \dfrac{(1)^{p+1}}{2^{2p-1}\pi^{2p}} S(2p)}$.

IV.C - *Comportement de l'erreur*

IV.C.1) Pour $p \geqslant 1$, on a $f^{(2p)}(n) = -\dfrac{\alpha \cdots (\alpha + 2p - 2)}{n^{\alpha+2p-1}}$ et $f^{(2p+2)}(n) = -\dfrac{\alpha \cdots (\alpha + 2p - 2)(\alpha + 2p - 1)(\alpha + 2p)}{n^{\alpha+2p+1}} = \dfrac{(\alpha + 2p - 1)(\alpha + 2p)}{n^2} f^{(2p)}(n)$ et, avec **[B.4]**, $\underline{\left|\dfrac{a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p} f^{(2p)}(n)}\right| = \dfrac{(\alpha + 2p - 1)(\alpha + 2p)\, S(2p+2)}{4n^2\pi^2\, S(2p)}}$.

IV.C.2) $\diamond$ L'encadrement du **[I.A.3]** montre que $S(\alpha) \xrightarrow[\alpha \to +\infty]{} 1$ donc, à n fixé, $\left|\dfrac{a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p} f^{(2p)}(n)}\right| \xrightarrow[p \to +\infty]{} +\infty$ et, notamment, il existe p_0 tel que $\forall p \geqslant p_0$, $\left|\dfrac{a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p} f^{(2p)}(n)}\right| > 1$ et donc dans l'écriture

$$\widetilde{S}_{n,2p} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} - f(n) + \frac{1}{2} f'(n) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j} f^{(2j)}(n)$$

la dernière somme est somme partielle d'une série (alternée) grossièrement divergente.
On en conclut que $\underline{n \text{ étant fixé, la suite } \left(\widetilde{S}_{n,2p}\right)_{p\geqslant 1} \text{ ne converge pas vers } S(\alpha) \text{ quand } p \text{ tend vers } +\infty}$.

$\diamond$ ERREUR D'ÉNONCÉ: *« doit-on » est mal venu qui suggère une condition nécessaire alors qu'il s'agit d'une condition suffisante.*
On choisit p et n pour que la majorant obtenu au **[A.2]** soit le plus petit possible. C'est la méthode de sommation au plus petit terme que Poincaré appelait "méthode des astronomes".

* * *
* *
*