I.C – Une inégalité maximale

Q 13. Soit $\omega \in \mathrm{A}$, $\exists q \in [\![1,n]\!]$ tel que $\max\limits_{1\leqslant p\leqslant n} |\mathrm{R}_p(\omega)| = |\mathrm{R}_q(\omega)| \geqslant 3x$.

Si $q=1$, alors $\omega \in \mathrm{A}_1$ sinon soit $p_0 = \min\{q \in [1,n]$ tel que $|\mathrm{R}_q(\omega)| \geqslant 3x\}$ On a $p_0 \geqslant 2$ et donc $\omega \in \mathrm{A}_{p_0}$.

Réciproquement $\forall p \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{A}_p \subset \mathrm{A}$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{A} = \bigcup\limits_{p=1}^{n} \mathrm{A}_p \text{ (réunion disjointe)}}$ (si $n=1$, alors $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1$).

Q 14. On a donc

$$\mathrm{A} = (\ \mathrm{A} \cap \{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\}\ ) \ \cup\ (\ \mathrm{A} \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\}\ )$$

d'où

$$\mathrm{A} \subset (\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\} \cup (\mathrm{A} \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\})) = \left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\} \cup \left(\bigcup_{p=1}^{n} \mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\}\right)\right)$$

La réunion étant disjointe, on a donc bien

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{A}) \leqslant \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\}\right) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\}\right)}$$

Q 15. Soit $p \in [\![1,n]\!]$. Soit $\omega \in \mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\}$.

On a donc $|\mathrm{R}_p(\omega)| \geqslant 3x$ et $|\mathrm{R}_n(\omega)| < x$. Ainsi selon l'inégalité triangulaire inversée :

$$|\mathrm{R}_n(\omega) - \mathrm{R}_p(\omega)| \geqslant |\mathrm{R}_p(\omega)| - |\mathrm{R}_n(\omega)| > 3x - x = 2x$$

or $\omega \in \mathrm{A}_p$ d'où $\omega \in \mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}$.

On a bien l'inclusion $\boxed{\mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\} \subset \mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}}$

Q 16. D'après Q14 et Q15, on a :

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) \leqslant \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\}\right) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right)$$

Soit $p \in [\![1,n]\!]$. On a

$$\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\} = \left\{\ |\mathrm{Z}_{p+1} + \mathrm{Z}_{p+2} + \cdots + \mathrm{Z}_n| > 2x\ \right\}$$

Ainsi cet événement ne peut s'écrire qu'en fonction de $\mathrm{Z}_{p+1}, \ldots, \mathrm{Z}_n$ alors que A_p s'exprime à l'aide de $\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_p$.

Donc le <u>lemme des coalitions</u> s'applique, on a l'indépendance des événements A_p et $\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}$

Remarque : en temps limité, on déconseille de formaliser davantage et même de chercher à écrire

$$\mathrm{A}_p = \bigcap_{i=1}^{p-1} \left\{\left|\sum_{j=1}^{i} \mathrm{Z}_j\right| < 3x\right\} \cup \left\{\left|\sum_{j=1}^{p} \mathrm{Z}_j\right| \geqslant 3x\right\}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) \leqslant \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\}\right) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p\right) \cdot \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right)$$

or en utilisant l'union disjointe de Q13, on a

$$\sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p\right) \cdot \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right) \leqslant \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p\right) \cdot \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\mathrm{A}\right) \cdot \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right)$$

Comme $\mathbb{P}(\mathrm{A}) \leqslant 1$,on en déduit que $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{A}) \leqslant \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\}\right) + \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right)}$

Q 17. • Si $n = 1$ alors comme $\max(|\mathrm{R}_1|) = |\mathrm{R}_1|$ et $\Big\{|\mathrm{R}_1| \geqslant 3x\Big\} \subset \Big\{|\mathrm{R}_1| \geqslant x\Big\}$, on a donc

$$\mathbb{P}(|\mathrm{R}_1| \geqslant 3x) \leqslant \mathbb{P}(|\mathrm{R}_1| \geqslant x) \leqslant 3\mathbb{P}(|\mathrm{R}_1(x)| \geqslant x)$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
On a $\forall (a, b) \in [-x, x]^2$, $|a - b| \leqslant 2x$, donc si $|a - b| > 2x$ alors on a [$|a| > x$ ou $|b| > x$]. Ainsi

$$\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_k| > 2x\} \subset \left(\{|\mathrm{R}_n| > x\} \cup \{|\mathrm{R}_k| > x\}\right) \subset \left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\} \cup \{|\mathrm{R}_k| \geqslant x\}\right)$$

Ainsi $\mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_k| > 2x\}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\}\right) + \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_k| \geqslant x\}\right) \leqslant 2 \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_p| \geqslant x\}\right)$.
Ce qui avec Q16, permet d'obtenir le résultat attendu :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left\{\max_{1 \leqslant p \leqslant n} |\mathrm{R}_p| \geqslant 3x\right\}\right) = \mathbb{P}(\mathrm{A}) \leqslant \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\}\right) + 2 \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_p| \geqslant x\}\right) \leqslant 3 \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_p| \geqslant x\}\right)}$$

E3A 2008 MP-A

Cours & exemples

1. $P(f)=0$.

2. Idéal de $\mathbb{R}[X]$.

3. Tout idéal de $\mathbb{R}[X]$ est de la forme $P_0\mathbb{K}[X]$ avec P_0 normalisé (nul ou unitaire) et unique. π_f est le P_0 de l'idéal de l'idéal J_f du 2.

4. (Question mal posée) Prouvons que $\pi_f \neq 0$. $(id_E, f, \dots, f^{n^2})$ est liée dans $\mathcal{L}(E)$, de dimension n^2 d'où $\exists (a_0, \dots, a_{n^2}) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\sum_{i=0}^{n^2} a_i f^i = 0$. $P=\sum_{i=0}^{n^2} a_i X^i \in J_f$ et $P\neq 0$ donc $J_f \neq \{0\}$ d'où $\pi_f \neq 0$. Rem. : C.H. prouve aussi que $J_f \neq \{0\}$.

5.1. $$M=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

On a $M^2=M$ et par récurrence, $\forall k\in\mathbb{N}^* \; M^k=M$

M s'annule sur $P=X^2-X$ donc $\pi_f \mid X^2-X$

Comme $\Pi \neq 0$, $\Pi \neq I_4$, iX et $X-1$ n'annule pas f d'où

$$\underline{\Pi_f = X^2 - X}$$

6.1. $y'' + y = e^x$ a pour solution générale :

$$y = \lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{1}{2} e^x$$

de même $y'' + y = e^{-x}$ a pour solution générale :

$$y = \lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{1}{2} e^{-x}$$

d'où, par superposition des solutions :

* $y'' + y = \operatorname{ch} x$ a pour solution générale :

$$\underline{y = \lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{1}{2} \operatorname{ch} x}$$

* $y'' + y = \operatorname{sh} x$ ———————— :

$$\underline{y = \lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{1}{2} \operatorname{sh} x}$$

6.2. Si f est solution de (H_1), $g'' = f^{(4)} + f^{(2)} = g$

donc g solution de $\underline{y'' - y = 0}$.

Réciproquement, si $g'' = g$ on a donc $f^{(4)} + \cancel{f^{(2)}} = \cancel{f^{(2)}} + f$

d'où f vérifie H_1 ssi g vérifie $y'' - y = 0$

③

6.3. H_2 : $\underline{y = \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x}$

6.4. Si f vérifie (H_1), alors $f'' + f = \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x$ d'où

par principe de superposition, on a :

$$f(x) = \lambda\left(\lambda_1 \cos x + \mu_1 \sin x + \tfrac{1}{2} \operatorname{ch} x\right) + \mu\left(\lambda_2 \cos x + \mu_2 \sin x + \tfrac{1}{2} \operatorname{sh} x\right)$$

donc $\exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x + \gamma \operatorname{ch} x + \delta \operatorname{sh} x$

La réciproque est évidente par linéarité et parce que cos, sin, ch, sh vérifie (H_1).

cl. $\underline{f \text{ vérifie } (H_1) \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x + \gamma \operatorname{ch} x + \delta \operatorname{sh} x}$

6.5.1. Montrons que (cos, sin, ch, sh) est libre :

soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 \mid \forall x \in \mathbb{R} : \underbrace{\alpha \cos x + \beta \sin x + \gamma \operatorname{ch} x + \delta \operatorname{sh} x =}_{(E)}$

Dérivons 2 fois on obtient une équation (E'').

$(E) + (E'')$ donne $2\gamma \operatorname{ch} x + 2\delta \operatorname{sh} x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ puis $x = 0$ et $x = 1$ donne $\gamma = \delta = 0$

de m̂ $(E) - (E'')$ puis $x = 0$ et $\pi/2$ donne $\alpha = \beta = 0$

d. $\underline{\dim E = 4}$

6.5.2.

δ est bien linéaire et $\cos' = -\sin \in E$ idem pour les 3 autres.

d' $\underline{\delta \in \mathcal{L}(E)}$

6.5.3. on a $\forall f \in E,\ f^{(4)} = f$ donc $\delta^4 = \mathrm{Id}_E$ et

$\Pi_\delta \mid X^4 - 1$

Considérons $f = \cos + \mathrm{ch}$

$rg(f, \delta(f), \delta^2(f), \delta^3(f))$

↗ ds la base $(\cos, \sin, \mathrm{ch}, \mathrm{sh})$

$$= rg(f, f', f'', f''') = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} & & C_3+C_1 & \\ \end{array}$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{C_4+C_2}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

donc $\forall P \in \mathbb{R}_3[X], P \neq 0 \Rightarrow P(\delta)(f) \neq 0 \Rightarrow P(\delta) \neq \Theta$

d'où $d^\circ \Pi_\delta \geq 4$ d. $\boxed{\Pi_\delta = X^4 - 1}$

Problème, Partie 1

1. $\dim E_n = n+1$ et $(1, X, \dots, X^n)$ en est une base.

2. u et v sont clairement linéaires de E ds E.

$d^\circ u(P) = d^\circ P - 1 \leq n$ et $d^\circ v(P) = d^\circ P \leq n$

d. $\boxed{(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2,\ E_n \text{ stable par } u \text{ et } v.}$

3. Notons $\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E_n

$$M_{\mathcal{B}_n}(u_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_{\mathcal{B}_n}(v_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 3 & & \binom{n}{p} \\ \vdots & & & 1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

↑ triangle de Pascal

4. $u_n(P) = P' = 0 \iff P \in \mathbb{R}_0[X]$

$d^\circ v_n(P) = d^\circ P \neq -\infty$ si $P \neq 0$ d'où

d° $\boxed{\operatorname{Ker} u_n = \mathbb{R}_0[X] \text{ et } \operatorname{Ker} v_n = \{0\}}$

$\operatorname{Im} u_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\hat{m}$ dim. avec le th. du rg donc $\boxed{\operatorname{Im} u_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$

$\boxed{\operatorname{Im} v_n = \mathbb{R}_n[X]}$

5. $\forall i \in \mathbb{N}\quad u \circ v(X^i) = v \circ u(X^i) = i(X+1)^{i-1}$ et par linéarité

d. $\boxed{u_n \text{ et } v_n \text{ commutent}}$

6. $\underline{\chi_{u_n}(X) = X^{n+1}}$ ← grâce à la matrice du 3. Si u_n était diagonalisable alors comme $sp(u_n) = \{0\}$ on aurait $E_n = \bigoplus_{\lambda \in sp(u_n)} E_\lambda = E_0 = \ker u_n \neq E_n$ (car $n \geq 1$)

$\underline{cl}$, $\boxed{u_n \text{ non diagonalisable}}$

7. $\underline{\chi_{v_n}(X) = (X-1)^{n+1}}$. $\hat{m}$ raisonnement que u_n : si v_n était diago., $E_n = E_1(v_n)$ et $v_n(X) \neq X$

cl. $\boxed{v_n \text{ non diagonalisable}}$

8.1. Si $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k Q_k = 0$ et s'il existe $k \setminus \lambda_k \neq 0$ alors

$d^\circ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k Q_k = \max(k \setminus \lambda_k \neq 0) \neq -\infty$: absurde

↑ car $\forall k\ d^\circ Q_k = k$

cl. $\boxed{\mathcal{B} \text{ base de } E_n}$ (car libre et bon cardinal)

8.2. $w_n(Q_0) = 1 - 1 = 0$; $\underline{w_n(Q_0) = 0}$

$$w_n(Q_k) = \frac{1}{k!}\left[\prod_{j=0}^{k-1}(X+1-j) - \prod_{j=0}^{k-1}(X-j)\right]$$

$$= \frac{1}{k!}\left[(X+1)(X)(X-1)\cdots(X-k+2) - X(X-1)\cdots(X-k+1)\right]$$

$$= \frac{1}{k!} X(X-1)\cdots(X-k+2)\left[X+1-(X-k+1)\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{k!}_{(k-1)!}} X(X-1)\cdots(X-k+2)\cancel{k} = Q_{k-1}$$ d'o $\forall k \geq 1 \ w_n(Q_k) = Q_{k-1}$

$(\alpha_k = 1)$

8.3. $$w_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

8.4. Comme $\mathrm{rg}\, w_n = n+1-1 = n$, $\dim \mathrm{Ker}\, w_n = 1$ et comme $w_n(Q_0) = 0$, on a $\mathrm{Ker}\, w_n = \mathrm{vect}(Q_0) = \mathbb{R}_0[X]$

Enfin $\boxed{\mathrm{Im}\, w_n = \mathrm{vect}(Q_0, \dots, Q_{n-1}) = E_{n-1}}$

8.5. $$w_n^j(Q_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > k \\ Q_{k-j} & \text{si } j \leq k \end{cases}$$ (immédiat par récurrence)

9.1. L'existence et l'unicité provient du fait que $(Q_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E_n.

9.2. $$w_n^j(P)(0) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k w_n^j(Q_k)(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > n \\ \beta_j & \text{si } j \leq n \end{cases}$$

avec le 8.5 et $Q_i(0) = 0, \forall i \geq 1$

9.3. $\forall j \in [\![0, n]\!]$ $\beta_j = (v_n - e_n)^j (P)(0)$ car v_n et e_n commutent

$$= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} v_n^k (P)(0)$$

Or $v_n^k(P) = P(X+k)$ (immédiat pour $k \geq 0$, par récurrence)

d $\boxed{\forall j \in [\![0, n]\!] \quad \beta_j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} P(k)}$

~~9.4. Notons $B^* = (\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ la base duale de B.~~

~~On a $\forall P \in E_n$, $\forall j \in [\![0, n]\!]$ $\varphi_j(P) = \beta_j$ d'où avec 9.3~~

~~$\varphi_j : E_n \to \mathbb{R}$, $P \mapsto \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} P(k)$ ← c'est du cours~~

10. $\forall k$ $w_n^{n+1}(Q_k) = 0$ et $w_n^n(Q_n) = Q_{n-n} = 1$

cl : $\boxed{w_n^{n+1} = \theta \text{ et } w_n^n(Q_n) = 1}$

Partie 2

1) c'est le théorème de Cayley-Hamilton

2.1. $u_n^{n+1}(P) = P^{(n+1)} = 0$ si $P \in E_n$

d'où $\boxed{u_n^{n+1} = \theta}$

2.2. $\underline{u_n^n(X^n) = n!}$

2.3. Avec 2.1, $\Pi_{u_n} \mid X^{n+1}$ donc $\Pi_{u_n} = X^d$, $d \leq n+1$

Avec 2.2, $d > n$ d'où $\boxed{\Pi_{u_n} = X^{n+1}}$

2.4 Grâce au 10. et comme au 2.3, $\boxed{\Pi_{w_n} = X^{n+1}}$

3.1 $(v_n - e_n)^{n+1} = P(v) = 0$ avec $P = (X-1)^{n+1}$ donc

$\Pi_{v_n} \mid (X-1)^{n+1}$ d'où $\boxed{\exists m \in [\![1, n+1]\!] \setminus \Pi_{v_n} = (X-1)^m}$

3.2. $(v_n - e_n)^n(\varphi_n) = w_n^n(\varphi_n) = 1 \neq 0$ d'où $\boxed{\Pi_{v_n} = (X-1)^{n+1}}$

4.1. $a_m \neq 0$!

4.2. $r\left(\frac{X^m}{m!}\right) = \sum_{j=0}^{m} a_j u^j\left(\frac{X^m}{m!}\right) = \sum_{j=0}^{m} a_j \left(\frac{X^m}{m!}\right)^{(j)} = \sum_{j=0}^{m} a_j \frac{m(m-1)\cdots(m-j+1)}{m!} \times X^{m-j}$

d'où $\boxed{r\left(\frac{X^m}{m!}\right) = \sum_{j=0}^{m} a_j \frac{X^{m-j}}{(m-j)!}}$

4.3. On a donc $P(u)\left(\frac{X^m}{m!}\right) \neq 0$ car $a_m \neq 0$ d'où

$P(u) \neq \theta$. d'où : $\boxed{P(u) = \theta \Rightarrow P = 0}$

5.1 si $P(v) = 0$ alors $P(v_n) = 0$ d'où $(X-1)^{n+1} = \Pi_{v_n} | P$

d'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad (X-1)^{n+1} | P}$

5.2 Si P annule v et $P \neq 0$ alors $d^\circ P \geq n+1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

absurde. d'où ; $\boxed{P(v) = 0 \Rightarrow P = 0}$

6.1. $s^2(P) = s(P(1-X)) = P(1-(1-X)) = P(X)$

d'où $\boxed{s^2 = id_E \ : \ s \text{ involution}}$

6.2. s s'annule sur le polynôme $A_0 = X^2 - 1$. comme

J_s l'ensemble des polynômes annulateurs de s est un idéal,

on a ; $\forall U \in E \quad A_0 U \in J_s$.

Réciproquement si $A(s) = 0$, La division euclidienne de

A par A_0 donne $A = A_0 U + R$ et $R = aX + b$

d'où $A(s) = R(s) = as + b\,Id_E = 0$

donc $\forall P \in E \quad as(P) + bP = 0$

pour $P = X$, on a $a(1-X) + bX = 0$ d'où $\begin{cases} -a+b=0 \\ a=0 \end{cases}$

soit $a = b = 0$ d'où $\boxed{J_0 = \{(X^2-1)U \,,\, U \in E\}}$

Mines MP1 2016 ①

Dans tout le pb, A^T est noté ${}^tA$

A 1) $J_{n,1} = J_{1,2} = J_{2,3} = \dots = J_{n-1,n} = 1$ et 0 sinon

Posons $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & & n-2 & n-1 \end{pmatrix} = (1\ n\ n-1\ n-2 \cdots 3\ 2)$

d'où $\boxed{J = M_\sigma}$

$\chi_J(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & & 0 \\ 0 & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ 0 & & & \\ -1 & & & x \end{vmatrix} = x^n + (-1)^{n+1} \times (-1)\,(-1)^{n-1}$

dev. selon la 1ère colonne

cqs $\boxed{\chi_J(x) = x^n - 1}$ $sp_{\mathbb{R}}(J)=\{-1,1\}$ ou $\{1\}$ selon parité

d'où $\boxed{sp_{\mathbb{C}}(J) = \left\{ e^{2ik\pi/n},\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\},\ \text{comme } |sp(J)| = n,\ J \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}}$

2) Posons $w_k = e^{2ik\pi/n}$ et résolvons $JX = \omega_k X$, avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_2 = w_k x_1 \\ x_3 = w_k x_2 \\ \vdots \\ x_n = w_k x_{n-1} \\ x_1 = w_k x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = w_k x_1 \\ x_3 = w_k^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = w_k^{n-1} x_1 \\ x_1 = w_k^n x_1 = x_1 \end{cases}$

②

d'où $\boxed{B' = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) \text{ base de } \mathbb{C}^n \text{ de } \vec{vp} \text{ de } J \text{ avec } u_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_k \\ w_k^2 \\ \vdots \\ w_k^{n-1} \end{pmatrix},\ k \in [\![0, n-1]\!]}$

3) On a clairement $\boxed{U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$

rappel : $n = 0$ modulo n, $n+1 = 1$ mod n, $-1 = n-1$ mod n...

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$: convention $P(X=k) = P(X = k \text{ mod } n)$

$P(X_{m+1} = k) = P\big((X_{m+1} = k) \cap (X_m = k-1) \amalg (X_{m+1} = k) \cap (X_m = k+1)\big)$

$\uparrow$ c'est l'hypothèse du pb

$\underset{FPC}{=} P\big((X_{m+1} = k) / X_m = k-1\big) P(X_m = k-1) + P(X_{m+1} = k / X_m = k+1) P(X_m = k+1)$

$= \frac{1}{2}\big(P(X_m = k-1) + P(X_m = k+1)\big)$

(notamment $P(X_{m+1} = 0) = \frac{1}{2}\big(P(X_m = n-1) + P(X_m = 1)\big)$,

cqs $U_{m+1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & 1 & 0 \end{pmatrix} \Big(U_m \Big)$

posonsA

Saisissez du texte ici

$$A = J + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{K}$$ (3)

On a $K_{2,1} = K_{3,2} \cdots = K_{n,n-1} = K_{1,n} = 1$ et 0 sinon

d'où $K = \Pi_{\sigma'}$ avec $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$

et on a $\sigma' = \sigma^{-1} = \sigma^{n-1}$ donc $K = J^{n-1}$

autre méthode : $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & 0 \end{pmatrix} \cdots$

d'où $\boxed{U_{m+1} = AU_m \text{ avec } A = \frac{1}{2}(J + J^{n-1})}$

4) * Si λ valeur propre de J et si $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(\lambda)$ val. propre de $P(J)$. Ici $P = \frac{1}{2}(X + X^{n-1})$, d'où :

$\forall k \in [\![0, n-1]\!] : P(w_k) = \frac{1}{2}(w_k + \underbrace{w_k^{n-1}) = \frac{1}{2}(w_k + \bar{w}_k}_{\text{refaire le dessin de } U_r}) = \cos\frac{2k\pi}{n}$

* De même $JX = \lambda X \Rightarrow P(J)X = P(\lambda)X$

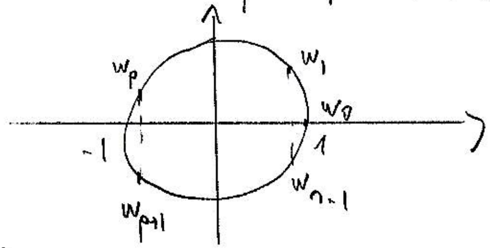
Pb : ces val. propres ne sont pas 2 à 2 distinctes, cependant avec le 2) $J = P\begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_{n-1} \end{pmatrix}P^{-1}$

d'où $A = P\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} \end{pmatrix}P^{-1}$ d'où :

$\chi_A = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\frac{2k\pi}{n}\right)$: 1 est la vp de module maximal (4)

d'où $\boxed{sp(A) = \left\{\cos\frac{2k\pi}{n},\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ } \vec{v}p \text{ unitaire associé à } 1}$

5) Comme n est impair, $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$ $\cos\frac{2k\pi}{n} \neq \pm 1$



d'où les val. propres de A sont $1, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ avec $|\lambda_i| < 1$

De plus A est symétrique donc par théorème spectral

$A = P\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \lambda_1 & \\ 0 & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}{}^tP$ avec $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{n} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/\sqrt{n} & * & & * \end{pmatrix}$

On a donc $A^m = P\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \lambda_1^m & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{n-1}^m \end{pmatrix}{}^tP \xrightarrow[m \to \infty]{} P\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}{}^tP$

(limite : soit TG, soit $M \longmapsto PM{}^tP$ linéaire donc C^0)

Or $P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}{}^tP = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{n} & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/\sqrt{n} & * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{n} & \cdots & 1/\sqrt{n} \\ * & \cdots & * \\ * & & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/n & \cdots & 1/n \\ * & & * \\ * & & * \end{pmatrix}$

d'où $P\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}{}^tP U_0 = \begin{pmatrix} 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix} = \lim_{m \to \infty} A^m U_0 = \lim_{m \to \infty} U_m$

récurrence sur m

d'où $\boxed{\lim_{m \to \infty} U_m = \begin{pmatrix} 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}}$

B/

6) i) Soit $(A, B) \in \mathcal{B}_n$ et $t \in [0, 1]$

Posons $M = tA + (1-t)B$

* $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $M_{i,j} = t A_{i,j} + (1-t) B_{i,j} \geq t \times 0 + (1-t) 0 \geq 0$

* $\sum_{j=1}^{n} (t A_{i,j} + (1-t) B_{i,j}) = t + 1 - t = 1$
* $\sum_{i=1}^{n} (t A_{i,j} + (1-t) B_{i,j}) = 1$ cqs $\underline{M \text{ bistochastique}}$

d'où : $\boxed{\mathcal{B}_n \text{ convexe}}$

ii) * si $A \in \mathcal{B}_n$, $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$.

$0 \leq A_{i,j} \leq \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} = 1$

cqs $\underline{\mathcal{B}_n \text{ bornée}}$

* Notons $l_i : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \longmapsto \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}$ $\quad c_j : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \longmapsto \sum_{i=1}^{n} A_{i,j}$

et $e_{i,j} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \longmapsto a_{i,j}$

$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ l_i, c_j et $e_{i,j}$ sont $C^0 / \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car linéaires en dimension finie et l'on a :

$$\mathcal{B}_n = \bigcap_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} e_{i,j}^{-1}(\mathbb{R}^+) \cap \bigcap_{i=1}^{n} l_i^{-1}(\{1\}) \cap \bigcap_{j=1}^{n} c_j^{-1}(\{1\})$$

intersection de fermés (comme image réciproque de fermés) cqs $\mathcal{B}_n$ fermé et $\subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ev de dim finie, d'où : $\boxed{\mathcal{B}_n \text{ compact}}$

iii) Comme la matrice nulle $(0) \notin \mathcal{B}_n$ $\left(\sum_{i=1}^{n} A_{i,j} = 0 \neq 1 \right)$

d'où $\boxed{\mathcal{B}_n \text{ non sev de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

7) * Soit $M \in \mathcal{P}_n$, $\forall i,j$ $M_{i,j} = 0$ ou 1 donc $M_{i,j} \geq 0$.

$\sum_{i=1}^{n} M_{i,j} = M_{\sigma(j),j} + 0 = 1$

$\sum_{j=1}^{n} M_{i,j} = M_{i,\sigma^{-1}(i)} + 0 = 0$ $\quad$ d'où $\boxed{\mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n}$

* Si on note f_σ l'endomorphisme canoniquement associé à M_σ et si on note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ on a :

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} & 0 & \\ & \vdots & \\ & 1 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{pmatrix} \sigma(j)$$

donc $\underline{f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}, \ \forall j \in [\![1,n]\!]}$

cqs f_σ envoie une base sur une base donc $M_\sigma \in GL_n(\mathbb{R})$

cqs $\underline{\mathcal{P}_n \subset GL_n(\mathbb{R})}$ et $I_n \in \mathcal{P}_n \neq \emptyset$

$\forall (\sigma, \sigma') \in \mathcal{S}_n^2 : \ \left| f_{\sigma\circ\sigma'}(e_j) = f_\sigma(e_{\sigma'(j)}) = e_{\sigma\circ\sigma'(j)} \right. \ \forall j$

d'où $M_\sigma \times M_{\sigma'} = M_{\sigma\circ\sigma'} \in \mathcal{P}_n$

et l'on a également $f_{\sigma\circ\sigma^{-1}} = id_{\mathbb{R}^n}$ donc

$M_\sigma^{-1} = M_{\sigma^{-1}} \in \mathcal{P}_n$ cl $\boxed{\mathcal{P}_n \text{ sous-groupe de } GL_n(\mathbb{R})}$

* Soit $M_\sigma \in \mathcal{P}_n$, $\exists k \in \mathbb{N}^* \mid \sigma^k = id_{[\![1,n]\!]}$ (par exemple car $\{\sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^p, \dots\}$ est fini donc $\exists i<j$ $\sigma^i = \sigma^j$ donc $\sigma^{j-i} = id$, par exemple avec l'ordre de σ dans le groupe fini $\mathcal{P}_n$)

cqs : $M_\sigma^k = I_n$ d'où M_σ s'annule sur le polynôme $X^k - 1$: scindé à racines simples (les racines k-ième de l'unité), dans $\mathbb{C}$.

cl $\boxed{\forall M \in \mathcal{P}_n : M \text{ diagonalisable dans } \mathbb{C}}$

* Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & 0 \\ & & 1 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = M_{(1\,2)}$

$\forall t \in [0,1]$ $tM + (1-t)N = \begin{pmatrix} t & 1-t & & \\ 1-t & t & & 0 \\ & & 1 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{P}_n$ si $t \in]0,1[$

cl $\boxed{\mathcal{P}_n \text{ non convexe}}$

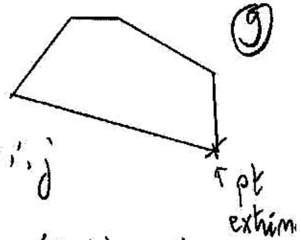
8) Si $M_\sigma \in \mathcal{P}_n$ et si $(A, B, \lambda) \in \mathcal{B}_n^2 \times]0,1[$ | $M_\sigma = \lambda A + (1-\lambda)B$ Mq $M_\sigma = A = B$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 : (M_\sigma)_{i,j} = \lambda A_{i,j} + (1-\lambda)B_{i,j}$

* si $i \neq \sigma(j)$: $0 = \lambda A_{i,j} + (1-\lambda) B_{i,j}$

si $A_{i,j} \neq 0$, $A_{i,j} > 0$ car $A \in \mathcal{B}_n$ et donc $\lambda A_{i,j} > 0$ d'où $\lambda A_{i,j} + (1-\lambda) B_{i,j} > 0 + 0 = 0$: absurde donc $A_{i,j} = 0 = M_{i,j}$

De $\hat{m}$ $B_{ij} = 0 = M_{ij}$



* Si $i = \sigma(j)$ $\quad 1 = \lambda A_{ij} + (1-\lambda) B_{ij}$

on a donc $\lambda A_{ij} + (1-\lambda) B_{ij} = \lambda + (1-\lambda) = 1$

$$\text{donc } \underbrace{\lambda}_{>0}\underbrace{(1-A_{ij})}_{\geq 0} + \underbrace{(1-\lambda)}_{>0}\underbrace{(1-B_{ij})}_{\geq 0} = 0$$

si $1 - A_{ij} > 0$ alors $\lambda(1-A_{ij}) > 0$: absurde

donc $\underset{= M_{ij}}{A_{ij} = 1}$ et de $\hat{m}$ $B_{ij} = 1 = M_{ij}$

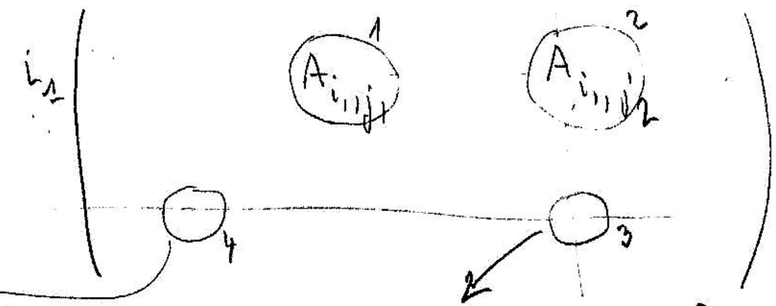
cqs $M_\sigma = A = B$ $\quad$ d'où $\boxed{M_\sigma \text{ extrémale dans } \mathcal{B}_n}$

9) Tout d'abord si la matrice A n'a que des coefficients égaux à 0 ou 1, comme elle est bistochastique il n'y aura qu'un seul 1 sur chaque colonne et donc A sera une matrice de permutation : absurde

Donc il existe $i_1 \in [\![1, n]\!]$ et $j_1 \in [\![1, n]\!]$ \
$\underline{A_{i_1 j_1} \in]0,1[}$ (on a vu av 6) que $A_{ij} \in [0,1]$)

Comme $\sum_{j=1}^{n} A_{i_1 j} = 1 = A_{i_1 j_1} + \sum_{j \neq j_1} A_{i_1 j}$,

$\underline{\exists j_2 \in [\![1, n]\!] \setminus j_1 \neq j_2 \text{ et } A_{i_1 j_2} \in]0,1[}$



Sur la colonne j_2, comme $A_{i_1 j_2} \in]0,1[$ et $\sum_{i=1}^{n} A_{i j_2} = 1$,

$\underline{\exists i_2 \in [\![1, n]\!] \setminus i_1 \neq i_2 \text{ et } A_{i_2 j_2} \in]0,1[}$

Sur la ligne i_2, $\exists j_3 \in [\![1, n]\!] \setminus j_3 \neq j_2$ et $A_{i_2 j_3} \in]0,1[$. Si $j_3 = j_1$ c'est fini, sinon

on crée de la même façon i_3 puis j_4 ... puis i_h, j_{h+1} tant que $j_{h+1} \notin \{j_1, \dots, j_{h-1}\}$. Comme $j_h \in [\![1, n]\!]$, il existera un rang α et un rang h \
$1 \leq \alpha < h-1 < h \setminus j_h = j_\alpha$. On dimmme alors de $i_\alpha = i_1'$ (et non de i_1).

d'où $\boxed{\text{On a l'existence demandée.}}$ (11)

10) $$B = \begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ $\qquad\qquad\quad j_3 \quad j_1 \quad j_2$ ici $j_4 = j_1$

Montrons que $\forall i, \sum_{j=1}^{n} B_{i,j} = 0$

si $i \notin \{i_1, \dots, i_n\}$ $\sum_{j=1}^{n} B_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} 0 = 0$

si $i = i_\alpha$, $\sum_{j=1}^{n} B_{i_\alpha,j} = 1 - 1 + \sum 0 = 0$

De même $\forall j, \sum_{i=1}^{n} B_{i,j} = 0$

cqs $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $B_\lambda = A + \lambda B$ vérifie $\sum_{i=1}^{n} (B_\lambda)_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (B_\lambda)_{i,j} = 1$

Soit $\alpha = \operatorname{Min}(A_{i_h, j_h}, h \in [\![1, n]\!])$

$\beta = \min(A_{i_h, j_{h+1}}, \text{———})$

Considérons $C = A - \alpha B$ et $C' = A + \beta B$

On a $\forall i,j$ $C_{i,j} \geq 0$, $C'_{i,j} \geq 0$ et donc $\underline{(C, C') \in \mathcal{B}_n^2}$

$\begin{cases} A - \alpha B = C & (\times \beta) \\ A + \beta B = C' & (\times \alpha) \end{cases}$ $\quad \beta A + \alpha A = \beta C + \alpha C'$

cqs $A = \lambda C + (1 - \lambda) C'$ avec $\lambda = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$ et $1 - \lambda = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ (12)

Or $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ donc $\lambda \in]0, 1[$

Si A était extrémale, on aurait $A = C = C'$ donc

$A - \alpha B = A \Rightarrow \alpha B = (0)$ absurde car $\alpha > 0$ et $B \neq (0)$

d'où $\boxed{\begin{array}{l} A \text{ non extrémale et donc avec la 8),} \\ \{\text{éléments extrémaux de } \mathcal{B}_n\} = \mathcal{S}_n \end{array}}$

11) Utilisons le résultat admis :

* Comme $A \in \mathcal{B}_n$, A est à coefficients positifs.

* Notons I l'ensemble des p lignes extraites de A
  J ——— q colonnes ———

et supposons que la matrice extraite correspondante soit nulle. Donc $A_{i,j} = 0$ si $i \in I$ et $j \in J$

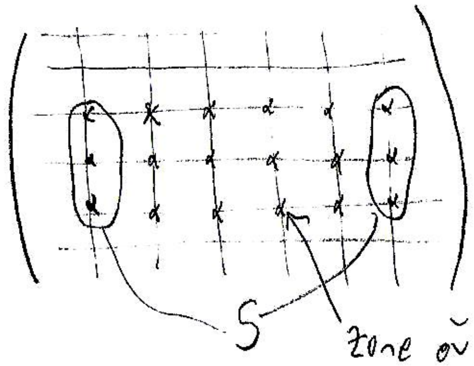
Considérons $S = \sum_{i \in I} \sum_{j \notin J} A_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}$ (on a rajouté des zéros)

$= \sum_{i \in I} 1 = |I| = p$

Or $S = \sum_{j \notin J} \sum_{i \in I} A_{i,j} \leq \sum_{j \notin J} \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} = \sum_{j \notin J} 1 = |\bar{J}| = n - q$

Donc $p = S \leq n - q$ donc $p + q \leq n < n+1$: Absurde d'où $\boxed{\text{A admet un chemin positif strictement}}$

Remarque : la somme S se voit sur la matrice



horizontalement : $S = p$
verticalement : $S \leq n - q$

12) * Mq $\lambda_0 \neq 1$, comme $0 \leq A_{i,j} \leq 1$, $\underline{\text{si } \lambda_0 = 1}$,

$\forall j \in [\![1, n]\!] : A_{\sigma(j),j} = 1$, comme A bistochastique,

on doit avoir $A_{i,j} = 0$ sinon (si $i \neq \sigma(j)$). Donc ce cas

A est une matrice de permutation : absurde.

d'où $\boxed{\lambda_0 \neq 1 \text{ et } A_0 \text{ est bien définie}}$

* $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, si $i \neq \sigma(j)$, $(A_0)_{i,j} = \dfrac{1}{\underbrace{1-\lambda_0}_{>0}} A_{i,j} \geq 0$

si $i = \sigma(j)$, $(A_0)_{i,j} = \dfrac{1}{1-\lambda_0} A_{i,j} - \dfrac{\lambda_0}{1-\lambda_0}$

$$= \frac{A_{\sigma(j),j} - \lambda_0}{1-\lambda_0} \geq 0$$

* $A_0 = tA + (1-t)\Pi_\sigma$ avec $\begin{cases} t = \dfrac{1}{1-\lambda_0} \\ 1-t = \dfrac{-\lambda_0}{1-\lambda_0} \end{cases}$ et ici $t \in \underline{\mathbb{R}}$

$\sum_{j=1}^{n} (A_0)_{i,j} = t \times 1 + (1-t) \times 1 = 1$, idem avec $\sum_i (A_0)_{i,j}$

d'où $\boxed{A_0 \text{ bistochastique}}$

* si $i \neq j$: $(A_0)_{i,j} = \dfrac{1}{1-\lambda_0} A_{i,j}$

si $i = \sigma(j)$: $(A_0)_{i,j} = \dfrac{A_{\sigma(j),j} - \lambda_0}{1-\lambda_0} = 0$ si $\lambda_0 = A_{\sigma(j),j}$

or $\exists j \setminus \lambda_0 = A_{\sigma(j),j}$

d'où $\boxed{A_0 \text{ possède au moins un coeff. nul de plus que A}}$

13) On a donc, avec les notations du 12),

$A = (1-\lambda_0)A_0 + \lambda_0 \Pi_\sigma$

si $A_0 \in \mathcal{P}_n$, c'est fini, sinon on recommence avec A_0

qui a 1 coeff nul de plus.

Précisons : Soit H_k : $\left[\begin{array}{l} \text{Si A admet k termes} \\ \text{non nuls, } A = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i \Pi_i \\ s \geq 0,\ \Pi_i \in \mathcal{P}_n,\ \lambda_i > 0 \text{ et } \sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1 \end{array}\right.$

Mq H_n est vraie et que si H_k est vraie jusqu'à p avec $n \leq p < n^2$ alors H_{p+1} est vraie.

$\underset{\sim}{H_n}$: On a vu que s'il y a exactement n coeff. non nuls ds A, $A = \Pi_\sigma$ donc $s=0$, $\lambda_0 = 1$ convient

* Si H_k vraie jusqu'à $p < n^2$, on note A_0 la matrice définie au 12) associée à A qui a $p+1$ coeff $\neq 0$.

$$A = (1-\lambda_0)A_0 + \lambda_0 \Pi_\sigma \quad , \lambda_0 > 0$$

Comme A_0 a au moins un coeff nul de plus, elle a $k \leq p$ coeff non nuls, donc

$$\exists s \geq 0 \ , \ \exists (\lambda'_0, \dots, \lambda'_s) \in (\mathbb{R}^{+*})^{s+1} \ \Big| \ \sum_{i=0}^{s} \lambda'_i = 1 \text{ et}$$
$$\exists (\Pi_0, \dots, \Pi_s) \in \mathcal{P}_n^{s+1} \quad A_0 = \sum_{i=0}^{s} \lambda'_i \Pi_i$$

$\underline{\text{Cqs}}$: $A = \sum_{i=0}^{s} (1-\lambda_0)\lambda'_i \Pi_i + \lambda_0 \Pi_\sigma$

Posons $\left| \begin{array}{l} \mu_i = (1-\lambda_0)\lambda'_i \\ i \in [\![0,s]\!] \end{array} \right.$ et $\mu_{s+1} = \lambda_0$

On a * $\forall i \in [\![0, s+1]\!] \ \mu_i > 0$

* $\sum_{i=0}^{s} (1-\lambda_0)\lambda'_i + \lambda_0 = (1-\lambda_0) \times 1 + \lambda_0 = 1$

* $A = \sum_{i=0}^{s+1} \mu_i \Pi_i$ d'où $\boxed{\text{On a la récurrence demandée}}$

14) Comme $\mathcal{P}_n$ est fini ($n!$) et non vide,

$\underline{\inf_{\Pi \in \mathcal{P}_n} \varphi(\Pi) \text{ existe (et c'est un min)}}$

Posons $\alpha = \inf_{\Pi \in \mathcal{P}_n} \varphi(\Pi)$ et $\beta = \inf_{\Pi \in \mathcal{B}_n} \varphi(\Pi)$

Mq β existe et que $\beta = \alpha$

$\forall \Pi \in \mathcal{B}_n$, $\Pi = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i \Pi_i$ notations du 13)

donc $\varphi(\Pi) = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i \varphi(\Pi_i)$ (φ linéaire)

$\geq \sum_{i=0}^{s} \lambda_i \times \alpha \quad (\lambda_i > 0)$

$\geq \alpha$

$\underline{\text{cqs}}$ $\{\varphi(\Pi), \Pi \in \mathcal{B}_n\}$ minoré par α et non vide

donc β existe et $\beta \geq \alpha$ (+ gd des minorants)

Comme $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n$, $\alpha \geq \beta$

d'où $\boxed{\inf_{\Pi \in \mathcal{B}_n} \varphi(\Pi) = \inf_{\Pi \in \mathcal{P}_n} \varphi(\Pi) = \varphi(\Pi_0) \quad \Pi_0 \in \mathcal{P}_n \text{ (min)}}$

C

15) $\|PAQ\|^2 = Tr({}^t(PAQ)PAQ)$

$= Tr({}^tQ\,{}^tA\,{}^tP\,PAQ)$ or ${}^tPP = I_n$ car $P \in O_n(\mathbb{R})$.

$= Tr(({}^tQ\,{}^tAA)Q)$ or $Tr\,AB = Tr\,BA$

$= Tr(Q\,{}^tQ\,{}^tAA)$ or $Q \in O_n(\mathbb{R})$

$= Tr({}^tAA) = \|A\|^2$

Comme $\|\;\| \geqslant 0$, d'où $\boxed{\|PAQ\| = \|A\|}$

16) Par le théorème spectral, $\exists D_A, D_B$ diagonales réelles,
$\exists (P_1, P_2) \in O_n(\mathbb{R}) \mid A = P_1 D_A {}^tP_1$ et $B = P_2 D_B {}^tP_2$

d'où $\|A-B\|^2 = \|P_1 D_A {}^tP_1 - P_2 D_B {}^tP_2\|^2$

$= \|P_1[D_A {}^tP_1 P_2 - {}^tP_1 P_2 D_B]{}^tP_2\|^2$ car $P_1{}^tP_1 = {}^tP_2P_2 = I_n$

On conclut avec 15) en posant $P = {}^tP_1 P_2 \in O_n(\mathbb{R})$ car $O_n(\mathbb{R})$ est un gpe avec $\times$ et $P = P_1^{-1}P_2$

d'où : $\boxed{\|A-B\|^2 = \|D_A P - P D_B\|^2}$

17) $*\ \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]\ R_{i,j} = (P_{i,j})^2 \geqslant 0$

$*\ \sum_{i=1}^{n} (P_{i,j})^2 = 1$ car les colonnes de P sont OTN

$*$ Comme ${}^tP \in O_n(\mathbb{R})$, les lignes de P sont aussi OTN :

donc $\sum_{j=1}^{n} (P_{i,j})^2 = 1$ d'où $\boxed{R \in B_n}$

On a facilement :

$$D_A P - P D_B = \begin{pmatrix} (\lambda_1(A) - \lambda_1(B))P_{11} & \cdots & (\lambda_1(A) - \lambda_n(B))P_{1,n} \\ \vdots & & \\ (\lambda_n(A) - \lambda_1(B))P_{n,1} & \cdots & (\lambda_n(A) - \lambda_n(B))P_{n,n} \end{pmatrix}$$

Or si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\|M\|^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}^2$ $(Tr\,{}^tMM = \cdots)$

d'où $\boxed{\|A-B\|^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} R_{i,j} |\lambda_i(A) - \lambda_j(B)|^2}$

18) Considérons $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$M \longmapsto \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} M_{i,j} |\lambda_i(A) - \lambda_j(B)|^2$

On a φ forme linéaire d'où avec le 14), on a :

$\|A-B\|^2 = \varphi(R) \geqslant \inf_{B_n} \varphi = \inf_{P_n} \varphi = \inf_{\sigma \in S_n} \varphi(M_\sigma)$

Or si $M_\sigma \in P_n$, $\varphi(M_\sigma) = \sum_{j=1}^{n} 1\,|\lambda_{\sigma(j)}(A) - \lambda_j(B)|^2 + \sum 0$
$(M_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)})$

d'où $\boxed{\min \sum_{j=1}^{n} |\lambda_{\sigma(j)}(A) - \lambda_j(B)|^2 \leqslant \|A-B\|^2}$

19) Avec le théorème de transfert, si $X \sim P_1$ et $Y \sim P_2$,

$$E(|X-Y|^2) = E(f(Z)) \quad \text{avec } Z=(X,Y)$$
$$f(x,y) = |x-y|^2$$
$$= \sum_{1\leq i,j\leq n} |a_i - b_j|^2 \, \mathbb{P}(X=a_i, Y=b_j)$$

Posons $p_{i,j} = \mathbb{P}(X=a_i, Y=b_j)$

Avec la F.P.T., $\sum_{i=1}^{n} p_{i,j} = P(Y=b_j) = \frac{1}{n}$ (loi uniforme)

et de même $\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = \frac{1}{n}$

Posons $R_{i,j} = n\, p_{i,j}$ et $R = (R_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a $\underline{R \in \mathcal{B}_n}$ et donc :

$$E(|X-Y|^2) = \frac{1}{n}\sum_{1\leq i,j\leq n} R_{i,j} |a_i - b_j|^2 = \varphi(R) \text{ (cf 18))}$$

Avec la 14) $\exists \Pi_\sigma \in \mathcal{P}_n \setminus E(|X-Y|^2) \geq \frac{1}{n}\sum_{1\leq i,j\leq n} (\Pi_\sigma)_{i,j} |a_i - b_j|^2$

Or $\sum_{1\leq i,j\leq n} (\Pi_\sigma)_{i,j} |a_i - b_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} |a_{\sigma(j)} - b_j|^2$.

d'où $d^2(P_1, P_2) \geq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{\sigma(j)} - b_j|^2$.

Montrons que $\sum_{j=1}^{n} |a_{\sigma(j)} - b_j| \geq \sum_{j=1}^{n} |a_{(j)} - b_{(j)}|^2$:

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{\sigma(j)} - b_j|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_{\sigma(\varphi(k))} - b_{\varphi(k)}|^2$$

avec φ bijective de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ telle que

$$b_{\varphi(1)} < \dots < b_{\varphi(n)}$$

cqs $\sum_{j=1}^{n} |a_{\sigma(j)} - b_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} |a_{\sigma'((j))} - b_{(j)}|^2$ ($\sigma' = \sigma\circ\varphi \in \mathcal{S}_n$)

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{\sigma'((j))}^2 + \sum_{j=1}^{n} b_{(j)}^2 - 2\sum_{j=1}^{n} a_{\sigma'((j))} b_{(j)}$$

$$= \underset{(cdv)}{\sum_{j=1}^{n} a_{(j)}^2} + \sum_{j=1}^{n} b_{(j)}^2 - 2\sum_{j=1}^{n} a_{\sigma'((j))} b_{(j)}$$

Comme $\sum_{j=1}^{n} |a_{(j)} - b_{(j)}|^2 = \sum_{j=1}^{n} a_{(j)}^2 + \sum_{j=1}^{n} b_{(j)}^2 - 2\sum_{j=1}^{n} a_{(j)} b_{(j)}$,

il suffit de montrer : $\sum_{j=1}^{n} a_{\sigma((j))} b_{(j)} \leq \sum_{j=1}^{n} a_{(j)} b_{(j)}$ $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$

Notons $a'_j = a_{(j)}$ et $b'_j = b_{(j)}$ et montrons :

$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$, $\sum_{j=1}^{n} a'_{\sigma(j)} b'_j \leq \sum_{j=1}^{n} a'_j b'_j$

(21)

récurrence sur n : si $n=1$: oui ($n=2$ à faire pour comprendre!)

si c'est vrai jusqu'au rang n, montrons le pour $n+1$:

soit $\sigma \in \mathcal{S}'_{n+1}$

1er cas $\sigma(n+1)=n+1$ donc $\sigma([\![1,n]\!]) = [\![1,n]\!]$;

on est ramené au cas n.

2e cas $\sigma(n+1) = k \leq n$

$$\underbrace{(a'_k - a'_{n+1})}_{<0}\underbrace{(b'_k - b'_{n+1})}_{<0} \geq 0$$

donc $a'_{n+1} b'_k + a'_k b'_{n+1} \leq a'_k b'_k + a'_{n+1} b'_{n+1}$

donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} a'_{\sigma(j)} b'_j \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k \text{ et } j \neq n+1}}^{n+1} a'_{\sigma(j)} b'_j + a'_{\sigma(k)} b'_k + \underbrace{a'_k}_{\sigma(n+1)} b'_{n+1}$

$\leq$ ——— $+ \underbrace{a'_{n+1} b'_k + a'_k b'_{n+1}}_{\text{car } \sigma(k) \leq n+1}$

$\displaystyle\leq \sum_{j=1}^{n} a'_{\sigma'(j)} b'_j + a'_{n+1} b'_{n+1}$

réc. avec $\sigma'(j) = \begin{cases} \sigma(j) & \text{si } j \neq k \\ k \end{cases} \rightsquigarrow \sigma' \in \mathcal{S}_n$

$\displaystyle\leq \sum_{j=1}^{n} a'_j b'_j + a'_{n+1} b'_{n+1}$

(22)

cqs $\displaystyle d^2(P_1, P_2) \geq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{(j)} - b_{(j)}|^2$

Pour (X,Y) définie par $P(X = a_{(j)}, Y = b_{(j)}) = \frac{\delta_{ij}}{n}$

* $\displaystyle E(\|X-Y\|^2) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{(j)} - b_{(j)}|^2 \geq d^2(P_1, P_2)$

* $X \sim P_1$ et $Y \sim P_2$

d'où $\boxed{\displaystyle d^2(P_1, P_2) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{(j)} - b_{(j)}|^2}$

On conclut avec la 17) :

$$\boxed{n\, d^2(P_1, P_2) \leq \|A - B\|^2}$$