e3a 2010

DS 6 : CORRIGÉ

Q de C 1°) N et N' sont équivalentes si $\exists(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$ /

$\forall X\in E\ N(X)\leqslant\alpha N'(X)$ et $N'(X)\leqslant\beta N(X)$

2°) $\forall X\in\mathbb{R}^n\quad N_p(X)\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|N_\infty(X)|^p\right)^{1/p}\leqslant n^{1/p}N_\infty(X)$

et $N_\infty(X)=\left(|N_\infty(X)|^p\right)^{1/p}\leqslant N_p(X)$

cl $\boxed{N_p\leqslant n^{1/p}N_\infty \quad\text{et}\quad N_\infty\leqslant N_p}$

3) Oui, car $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie

4) oui car u étant linéaire et $\mathbb{R}^n$ de dim. finie, u est continue sur $\mathbb{R}^n$ d'où l'existence de K,

Avec les notations de l'énoncé,

$N_\infty(u(X))=N_\infty\left(u\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right)\right)$ avec $(e_1,\dots,e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$,

$=N_\infty\left(\sum_{i=1}^{n}x_iu(e_i)\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}|x_i|N_\infty(u(e_i))\leqslant\sum_{i=1}^{n}N_\infty(X)N_\infty(u(e_i))$

cl : $\boxed{K=\sum_{i=1}^{n}N_\infty(u(e_i))\text{ convient}}$

5) u lip. $\Rightarrow$ u unif. C^0, $\Rightarrow$ u C^0 en 0 ....

Q6 $\Rightarrow$ soit $r>0$

$0 = d(x,A) = \inf \ldots$; $\|x-a\| < r$

$\exists a \in A \mid 0 \leq \|x-a\| < 0 + r$: $a \in B_F(x,r) \cap A \neq \emptyset$

donc $x \in \bar{A}$

$\Leftarrow$ $\exists a_n \longrightarrow x$, $a_n \in A$

comme $\underbrace{0}_{\to 0} \leq d(x,A) \leq \underbrace{\|x - a_n\|}_{\to 0}$: $d(x,A) = 0$ TE

cl° $\boxed{d(x,A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}}$

Q7 On "voit" $A_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(1 + \frac{a}{n}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $1 + \frac{a}{n}$ vp

Avec la trace $2 = 1 + \frac{a}{n} + \lambda \Rightarrow \lambda = 1 - \frac{a}{n}$ vp

cl $\boxed{Sp(A_n) = \left\{ 1 - \frac{a}{n} < 1 + \frac{a}{n} \right\}}$

A_n est diagonalisable car symétrique réelle ou bien possède 2 val. propres distinctes en dimension 2.

Déterminons $E_{1+\frac{a}{n}}$ et $E_{1-\frac{a}{n}}$: ils sont de dim. 1

donc $E_{1+\frac{a}{n}} = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$$AX = \left(1-\frac{a}{n}\right)X \iff \begin{cases} x + \frac{a}{n}y = \left(1-\frac{a}{n}\right)x \\ \frac{a}{n}x + y = \left(1-\frac{a}{n}\right)y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{a}{n}y = -\frac{a}{n}x \\ \frac{a}{n}x = -\frac{a}{n}y \end{cases} \quad a \neq 0$$

$$\iff \begin{cases} x = x \\ y = -y \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \underline{E_{1-\frac{a}{n}} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$$

d' $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ vérifie } A_n = P\begin{pmatrix} 1-\frac{a}{n} & 0 \\ 0 & 1+\frac{a}{n} \end{pmatrix}P^{-1}}$

* $\underline{P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

* $\forall n \geq 1 \quad \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}$ car $1+\frac{a}{n} > 0$

$$= e^{n\left(\frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} e^a$$

* $1 - \frac{a}{n} > 0 \iff n > a$

et donc $\forall n \geq \lfloor a \rfloor + 1$: $\left(1-\frac{a}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{a}{n}\right)}$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-a}$$

d'où $\boxed{\alpha_n^n \longrightarrow e^{-a} \text{ et } \beta_n^n \longrightarrow e^a}$

Comme $M \longmapsto PMP^{-1}$ est linéaire en dim. (4)

finie, elle est continue$/_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ et par critère

séquentiel : $A_n^n \longrightarrow P \begin{pmatrix} \lim \alpha_n^n & 0 \\ 0 & \lim \beta_n^n \end{pmatrix} P^{-1}$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ 0 & e^{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-a}+e^{a} & -e^{-a}+e^{a} \\ -e^{-a}+e^{a} & e^{-a}+e^{a} \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{A_n^n \longrightarrow \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha \\ \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix}}$

D'après CCP-PSI-2016

Q1 $A(\alpha,\beta)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ donc 1 val. propre et $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\in E_1(A(\alpha,\beta))$

si $\dim E_1(A(\alpha,\beta))>1$, $E_1(A(\alpha,\beta))=\mathbb{R}^2$ et $A(\alpha,\beta)=I_2$

donc il faut que $1-\alpha=1$, $\alpha=0$, $\beta=0$, $1-\beta=0$: absurde

car $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ cl° : $\boxed{1 \text{ val. propre de } A(\alpha,\beta) \text{ et } E_1=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)}$

Q2 Comme $\chi_{A(\alpha,\beta)}(x)=(x-1)(x-\mu)$, on a avec la trace $1+\mu=2-\alpha-\beta$ donc $\mu=1-(\alpha+\beta)=\lambda$

Résolvons $AX=\lambda X \iff \begin{cases}(1-\alpha)x+\alpha y=(1-\alpha-\beta)x\\ \beta x+(1-\beta)y=(1-\alpha-\beta)y\end{cases}$

$$\iff \begin{cases}\beta x+\alpha y=0\\ \beta x+\alpha y=0\end{cases} \iff \underline{\beta x+\alpha y=0}$$

Si $\lambda=1$, alors $\alpha+\beta=0$ soit $\alpha=\beta=0$: absurde

cl° : $\boxed{E_1=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right),\ E_\lambda=D/_{\beta x+\alpha y=0}=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}-\alpha\\\beta\end{pmatrix}\right) \text{ et } A(\alpha,\beta) \text{ est diagonalisable.}}$

matriciellement $\underline{A(\alpha,\beta)=P\begin{pmatrix}1&0\\0&\lambda\end{pmatrix}P^{-1}\ \&\ P=\begin{pmatrix}1&-\alpha\\1&\beta\end{pmatrix}}$

Q3 $\forall p \in \mathbb{N} \quad A(\alpha,\beta)^p = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^p \end{pmatrix} P^{-1}$

$$= \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{A(\alpha,\beta)^p = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha\lambda^p & \alpha - \alpha\lambda^p \\ \beta - \beta\lambda^p & \alpha + \beta\lambda^p \end{pmatrix}}$

Q4 Si $(\alpha,\beta) \neq (1,1)$ et comme $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$, $\lambda < 1$ et $\lambda > 1-2 = -1$ donc $|\lambda| < 1$ d'où $\lambda^p \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$

Par TG (evn), $\boxed{\lim_{p\to\infty} A(\alpha,\beta)^p = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}}$

Si $\alpha = \beta = 1$, $A(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A(1,1)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

d' la suite $(A(\alpha,\beta)^p)$ diverge (2 val. d'adhérence)

Q5 On applique la F.P.T. au système fonda. $((X_n = 0), (X_n = 1))$

$$P(X_{n+1} = 0) = P(X_{n+1} = 0 / X_n = 0) P(X_n = 0) + P(X_{n+1} = 0 / X_n = 1) P(X_n = 1)$$

$$= (1-\alpha) P(X_n = 0) + \beta P(X_n = 1)$$

de m. $P(X_{n+1} = 1) = \alpha P(X_n = 0) + (1-\beta) P(X_n = 1)$

ce qui donne matriciellement :

$$\boxed{\begin{pmatrix} P(X_{n+1}=0) \\ P(X_{n+1}=1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \end{pmatrix}}$$

On a donc $\begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} P(X_0=0) \\ P(X_0=1) \end{pmatrix}$

On remarque que $\begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix} = A(\alpha,\beta)^T$ donc avec

Q1, $\begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}^n = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta+\alpha\lambda^n & \beta-\beta\lambda^n \\ \alpha-\alpha\lambda^n & \alpha+\beta\lambda^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$

donc $\begin{cases} P(X_n=0) = a_n P(X_0=0) + b_n P(X_0=1) \\ P(X_n=1) = c_n P(X_0=0) + d_n P(X_0=1) \end{cases}$

Comme $\begin{cases} P(X_n=0) = P(X_n=0 / X_0=0) P(X_0=0) + P(X_n=0 / X_0=1) P(X_0=1) \\ P(X_n=1) = P(X_n=1 / X_0=0) P(X_0=0) + P(X_n=1 / X_0=1) P(X_0=1) \end{cases}$

On peut par analogie <u>conjecturer</u> que $\begin{cases} P(X_n=0 / X_0=0) = a_n \\ P(X_n=1 / X_0=1) = d_n \end{cases}$

avec la F.P.T.

Démontrons-le par récurrence

$n=0 \qquad P(X_0=0/X_0=0)=1$ et $a_0=\dfrac{\beta+\alpha\lambda^0}{\alpha+\beta}=1$

idem avec $P(X_0=1/X_0=1)$

si c'est vrai pour n,

$$P(X_{n+1}=0/X_0=0)=P(X_{n+1}=0\cap X_0=0)/P(X_0=0)$$

$$=\frac{P(X_{n+1}=0\cap X_0=0\cap X_n=0)+P(X_{n+1}=0\cap X_0=0\cap X_n=1)}{P(X_0=0)}$$

$$=\underbrace{P(X_{n+1}=0/X_0=0\cap X_n=0)}_{=1-\alpha \text{ par indép. des relais}}\times P(X_n=0/X_0=0)+\underbrace{P(X_{n+1}=0/X_0=0\cap X_n=1)}_{\beta}\times P(X_n=1/X_0=0)$$

$$=(1-\alpha)P(X_n=0/X_0=0)+\beta(1-P(X_n=0/X_0=0))$$

$$=(1-\alpha)a_n+\beta(1-a_n)$$

$$=(1-\alpha-\beta)a_n+\beta=\lambda a_n+\beta=\lambda\left(\frac{\beta+\alpha\lambda^n}{\alpha+\beta}\right)+\beta$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\lambda^{n+1}+\frac{\lambda\beta}{\alpha+\beta}+\beta=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\lambda^{n+1}+\beta\left(\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta}\right)$$

$$=\frac{\alpha\lambda^{n+1}+\beta}{\alpha+\beta}=a_{n+1}$$ on fait de même pour $P(X_{n+1}=1/X_0=1)$

d° : $$\boxed{\begin{aligned} P(X_n=0/X_0=0) &= \frac{\beta+\alpha\lambda^n}{\alpha+\beta} \\ P(X_n=1/X_0=1) &= \frac{\alpha+\beta\lambda^n}{\alpha+\beta}\end{aligned}}$$

On cherche à minorer $P(X_n = X_0)$:

$$P(X_n=X_0) = P(X_n=0/X_0=0)\,p + P(X_n=1/X_0=1)(1-p) \quad \text{où } p=P(X_0=0)$$

$$= \left[\frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\lambda^n\right]p + \left[\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\lambda^n\right](1-p)$$

$$= \left[\frac{\beta}{\alpha+\beta} + \left(1-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\lambda^n\right]p + \left[\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \left(1-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\lambda^n\right](1-p)$$

on les mets sous la forme $x+(1-x)\lambda^n$
(vu l'expression demandée)

Posons $f(x) = x + (1-x)\lambda^n$

$f'(x) = 1-\lambda^n \geq 0$ car $\lambda \in [-1,1)$

Cas f est croissante sur $[0,1)$ $\quad f(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [0,1)$

donc $P(X_n = X_0) \geq f(x)p + f(x)(1-p) = f(x)$

⑥

d'où $\boxed{P(X_n = X_0) \geqslant r + (1-r)\lambda^n}$

Q6 $P(X_n = X_0) = P\left(\bigcap_{k=1}^{\ell} X_n^k = X_0^k\right)$

$= \prod_{k=1}^{\ell} P(X_n^k = X_0^k)$ par indépendance

$\geqslant \prod_{k=1}^{\ell} (r + (1-r)\lambda^n)$ avec Q5 et car tout est <u>positif</u>.

d'où : $\boxed{Q_n \geqslant [r + (1-r)\lambda^n]^\ell}$

Q7 * si $\alpha = \beta$, $r = 1/2$, $\lambda = 1 - 2\alpha$ et à Q5, on a l'égalité $\left(\delta\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) = \delta\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) = \delta\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

d'où : $\boxed{Q_n = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2\alpha)^n\right]^\ell}$

* On veut $P(X_n \neq X_0) \geqslant \varepsilon$ soit $1 - Q_n \geqslant \varepsilon$

d'où on cherche n tel que $Q_n \leqslant 1 - \varepsilon$:

$Q_n \leqslant 1 - \varepsilon \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2\alpha)^n\right]^\ell \leqslant 1 - \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2\alpha)^n \leqslant (1-\varepsilon)^{1/\ell}$ ($t \mapsto t^{1/\ell} \nearrow$ sur $\mathbb{R}^+$ et $1 - \varepsilon > 0$)

$\Leftrightarrow \underbrace{(1-2\alpha)^n}_{\text{signe} > 0} \leqslant \underbrace{2(1-\varepsilon)^{1/\ell} - 1}_{\text{signe ?}}$

cqs • si $2(1-\varepsilon)^{1/\ell}-1 \leq 0$, il n'y a aucun n

• Si ——— > 0 :

$$Q_n \leq 1-\varepsilon \iff n \geq \frac{\ln(2(1-\varepsilon)^{1/\ell}-1)}{\ln(1-2\alpha)}$$

d' $\boxed{\text{si } 2(1-\varepsilon)^{1/\ell}-1>0,\ n_c = \left\lfloor \frac{\ln(2(1-\varepsilon)^{1/\ell}-1)}{\ln(1-2\alpha)} \right\rfloor + 1 \text{ convient}}$

Q8 $\forall i,j$: * $a_{ij} \geq 0$ (resp. $a_{ij} > 0$)

* $a_{ij} = 1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_{i,k} \leq 1$ (resp. < 1)

d'o : $\boxed{\forall i,j \quad 0 \leq a_{ij} \leq 1 \quad (\text{resp. } 0 < a_{ij} < 1)}$

Q9 Posons $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad AU = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} \end{pmatrix} = U \iff A$ sto.

d $\boxed{A \text{ stochastique} \iff Ae = e}$

Q10 Soit A, B sto., posons $C = A \times B$

Comme $c_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} b_{\alpha j}$, $\underline{c_{ij} \geq 0}$ $\underline{(\text{resp. } c_{ij} > 0)}$

$Ce = ABe = Ae = e$ donc C stochastique

d'où $\boxed{AB \text{ est stochastique (resp. st. sto.)}}$

Q11 Soit B stochastique, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

$$Bx = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} x_j \end{pmatrix}$$

et $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} \overset{\geq 0}{a_{i,j}} \|x\|_\infty = \|x\|_\infty$

donc $\|x\|_\infty$ majore les $|(Bx)_i|$ d'où $\underline{\|Bx\|_\infty \leq \|x\|_\infty}$

Il ne reste plus qu'à l'appliquer à A^p qui est sto. (Q10) par réc. /p

d'où $\boxed{\|A^p x\|_\infty \leq \|x\|_\infty}$

Q12 Soit $\lambda \in sp(A) \subset \mathbb{C}$, $\exists x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ et $Ax = \lambda x$

donc $\forall p \in \mathbb{N} \quad A^p x = \lambda^p x$ d'où $\|A^p x\|_\infty = |\lambda^p| \|x\|_\infty \leq \|x\|_\infty$

et comme $x \neq 0$, $\|x\|_\infty > 0$ donc $\forall p \in \mathbb{N} : |\lambda^p| \leq 1$

pour $p = 1$, $\underline{|\lambda| \leq 1}$, comme $1 \in sp(A)$ (c'est Q9) d'où $\boxed{\rho(A) = 1}$

Q13 Soit $x \neq 0$ tel que $Ax = \lambda x$, donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = \lambda x_i \iff \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{i,j} x_j = (\lambda - a_{i,i}) x_i$$

Soit $i_0 \in [\![1, n]\!] \setminus \|x\|_\infty = |x_{i_0}|$, $|x_{i_0}| > 0$ car $x \neq 0$

On a pour ce i_0 : $\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} a_{i_0 j} x_j \right| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}| |x_{i_0}|$

$$\iff |\lambda - a_{i_0,i_0}| \cancel{|x_{i_0}|} \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}| \cancel{|x_{i_0}|}$$

d'où $\boxed{|\lambda - a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}|}$

Q14 Soit A à diagonale st. dominante, si A non inversible alors $0 \in sp(A)$ donc (Q13) $\exists i \setminus |0 - a_{i,i}| = |a_{i,i}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$

<u>Absurde</u>

d'où $\boxed{A \text{ inversible}}$

Q15

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \hphantom{xx} \end{pmatrix}$$

posons $B = A_1 - I_{n-1}$

$\forall i \in [\![1, n-1]\!] : \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n-1} |b_{i,j}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n-1} a_{i,j} = 1 - a_{i,i} - a_{i,n}$

$< 1 - a_{i,i} = |b_{i,i}|$

cqs $\boxed{A_1 - I_{n-1} \text{ est à diagonale str. dominante}}$

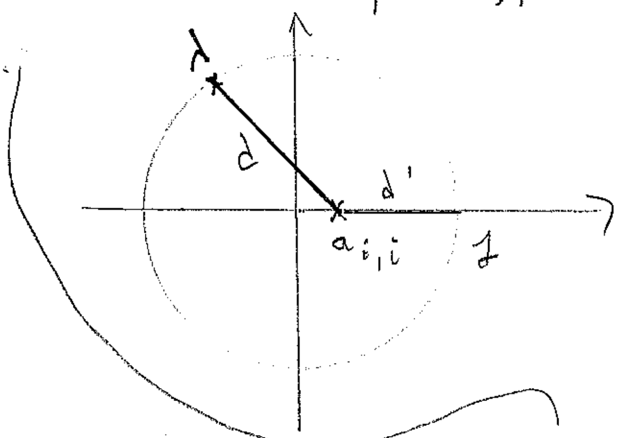
$rg(A - I_n) \geqslant rg(A_1 - I_{n-1}) = n-1$ avec Q_{14}

comme $1 \in sp(A)$, $rg(A - I_n) < n$ d'où $\boxed{rg(A - I_n) = n-1}$

Q16 th du rg : $\boxed{\dim \ker(A - I_n) = 1}$

Q17 Soit $\lambda \in sp(A) - \{1\}$, $|\lambda| \leq 1$ (Q_{12})

supposons $|\lambda| = 1$, d'après Q_{13}, $\exists i \in [\![1, n]\!] \mid |\lambda - a_{i,i}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} a_{i,j} = 1 - a_{i,i}$



On a $d \leq d'$, il faut donc que $\lambda = 1$, précisons :

Posons $\lambda = a + ib$, $a^2 + b^2 = 1$

$|\lambda - a_{i,i}|^2 \leqslant (1 - a_{i,i})^2 \Leftrightarrow (a - a_{i,i})^2 + b^2 \leqslant 1 + a_{i,i}^2 - 2a_{i,i}$

$\Leftrightarrow \cancel{a^2 + b^2} + \cancel{a_{i,i}^2} - 2a\,a_{i,i} \leqslant \cancel{1} + \cancel{a_{i,i}^2} - 2a_{i,i}$

$\Leftrightarrow a \geqslant 1$ car $a_{i,i} > 0$ (st. sto.)

$\Leftrightarrow a = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 + ib = 1$

d $\boxed{\lambda \in sp(A) - \{1\} \Rightarrow |\lambda| < 1}$

Q18

```
from random import *

def saut(i): # i poisition de la particule
    tirage=randint(1,10)
    if tirage==1:
        return i
    else:
        L=[1,2,3,4]
        L.remove(i)
        tirage=randint(0,2)
        return L[tirage]

def X(n): #n temps
    if n==0:
        return 1
    else:
        return saut(X(n-1))
```

Q19

$P(X_1 = i) = \sum_{j=1}^{4} \underbrace{P(X_1 = i / X_0 = j)}_{q_{i,j}} P(X_0 = j)$ (F.P.T.)

$\forall i \in [\![1,4]\!]$

On a $q_{i,j} = \begin{cases} 1/10 & \text{si } i = j \\ 3/10 & \text{sinon} \end{cases}$ d'où :

d $\boxed{P_1 = Q P_0 \text{ avec } Q = \begin{pmatrix} 1/10 & 3/10 & 3/10 & 3/10 \\ 3/10 & 1/10 & 3/10 & 3/10 \\ 3/10 & 3/10 & 1/10 & 3/10 \\ 3/10 & 3/10 & 3/10 & 1/10 \end{pmatrix} \text{ et (réc.) } P_n = Q^n P_0}$

Q20 Π est donc un vect propre de Q associé à $\lambda = 1$.
Comme Q est strictement stochastique,

avec la Q_9 et Q_{16}, $E_1(Q) = \text{vect}(e) = \text{vect}\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$ (12)

d'o $\boxed{\Pi = \frac{1}{4} e}$ $\quad \sum_{i=1}^{4} p_i = 1$

th. spectal

(Q21) Q étant <u>symetrique</u> réelle, <u>Q est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.</u>

(Q22) $Q = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & & 3 \\ & \ddots & \\ 3 & & 1 \end{pmatrix}$ donc $Q + \frac{2}{10} I_4 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

comme $rg(Q + \frac{1}{5} I_4) = 1$, $\dim E_{-1/5}(Q) = 3$

d'o $\boxed{sp(Q) = \{1, -1/5\},\ E_1(Q) = \text{vect}(e) \text{ et } E_{-\frac{1}{5}}(Q) = H /_{x_1+x_2+x_3+x_4=0}}$

$(= E_1(Q)^\perp)$

(Q23) $\exists M \in O_4(\mathbb{R}) \mid Q^p = M \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & (-1/5)^p & & \\ & & (-1/5)^p & \\ 0 & & & (-1/5)^p \end{pmatrix} M^{-1}$ et $M^{-1} = M^T$

$$\xrightarrow[p \to \infty]{T.G.(evn)} M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M^{-1}$$

or $M = \begin{pmatrix} 1/2 & & & \\ 1/2 & C_2 & C_3 & C_4 \\ 1/2 & & & \\ 1/2 & & & \end{pmatrix}$ base OTN de $E_{-1/5}(Q)$

car de norme 1 ds $E_1(Q)$

donc $M = (2\pi \mid C_2 \mid C_3 \mid C_4)$ et $M^{-1} = M^T = \begin{pmatrix} 2\pi^T \\ C_2^T \\ C_3^T \\ C_4^T \end{pmatrix}$

On en déduit $M\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0\end{pmatrix} = \left(2\pi \,|\, 0 \,|\, 0 \,|\, 0\right)$

et $M\begin{pmatrix}1&&&0\\&0&&\\&&0&\\0&&&0\end{pmatrix}M^{-1} = 2\pi \times 2\pi^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

d'où $\boxed{R = 4\pi\pi^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\ \vdots&&\vdots\\1&\cdots&1\end{pmatrix}}$

Posons $D = \begin{pmatrix}1&&&0\\&-1/5&&\\&&-1/5&\\0&&&-1/5\end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix}1&&&0\\&0&&\\&&0&\\0&&&0\end{pmatrix}$, on a

$$\|Q^p - R\| = \|MD^pM^{-1} - M\Delta M^{-1}\|$$
$$= \|M(D^p - \Delta)M^{-1}\|$$

or $D^p - \Delta = \begin{pmatrix}0&&&0\\&(-1/5)^p&&\\&&(-1/5)^p&\\0&&&(-1/5)^p\end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{5}\right)^p N$ avec $N = \begin{pmatrix}0&&&0\\&1&&\\&&1&\\0&&&1\end{pmatrix}$

cqs $\|Q^p - R\| = \frac{1}{5^p}\underbrace{\|MNM^{-1}\|}_{\text{cste}} = O\left(\frac{1}{5^p}\right)$

d'où : $\boxed{\text{Pour toute norme, } \|Q^p - R\| \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{5^p}\right)}$

Posons $P_0 = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$, $a+b+c+d = 1$ $\left(a = P(X_0 = 1), \dots\right)$

D'où $P_n = Q^nP_0 \xrightarrow[n\to\infty]{T.G.} RP_0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}a+b+c+d\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ \vdots\\1\end{pmatrix} = \pi$

d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \pi \text{ ; à l'infini on a autant de chances d'être en 1, 2, 3 ou 4}}$

(Q24) $A^{p+1} = (c_{i,j})$ et $c_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i,\alpha}\, a_{\alpha,j}^{(p)}$

$\forall j \in [\![1,n]\!]$
$\forall i$ $\quad \leq \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i,\alpha}}_{=1} M_j^{(p)} = M_j^{(p)}$

donc $M_j^{(p)}$ majore $\{c_{i,j} \; ; \; i \in [\![1,n]\!]\}$ d'où

$$M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}$$

de même $c_{i,j} \geq m_j^{(p)}$, enfin $m_j^{(p)} > 0$ car A^p est <u>strictement</u> stochastique (Q_{10}) d'où :

d'où : $\boxed{0 < m_j^{(p)} \leq m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}}$

évident $\left| \begin{array}{l} \min E \leq \max E \\ \forall E \neq \emptyset \end{array} \right.$

(Q25) Posons $m_j^{(p+1)} = a_{k_1,j}^{(p)}$, $m_j^{(p)} = a_{k_2,j}^{(p)}$ et $M_j^{(p)} = a_{k_3,j}^{(p)}$

$$m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{k_1,\alpha}\, a_{\alpha,j}^{(p)} - a_{k_2,j}^{(p)}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} a_{k_1,\alpha}\, a_{\alpha,j}^{(p)} - \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{n} a_{k_1,\alpha}}_{=1} a_{k_2,j}^{(p)}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} a_{k_1,\alpha}\left(a_{\alpha,j}^{(p)} - a_{k_2,j}^{(p)}\right)$$

d'où $m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geqslant \underbrace{a_{k_1,k_3}}_{\geqslant m} \underbrace{\left(a_{k_3,j}^{(p)} - a_{k_2,j}^{(p)}\right)}_{M_j^{(p)} - m_j^{(p)}} + 0$ car $a_{k_2,j}^{(p)} = m_j^{(p)}$

donc $m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geqslant m\left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}\right)$

On fait pareil avec l'autre inégalité

d'où $\boxed{m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geqslant m\left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}\right) \text{ et } M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \geqslant m\left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}\right)}$

Q26 On a avec Q25

$$M_j^{(p+1)} \leqslant -m\delta + M_j^{(p)} \quad \text{avec } \delta = M_j^{(p)} - m_j^{(p)}$$

$$-m_j^{(p+1)} \leqslant -m\delta - m_j^{(p)}$$

On somme : $M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leqslant -2m\delta + \overbrace{M_j^{(p)} - m_j^{(p)}}^{=\delta}$

d'où : $\boxed{M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leqslant (1-2m)\left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}\right)}$

Q27 * Q_{24} montre que les 2 suites sont monotones

* Q26 montre (avec une récurrence immédiate) :

(16)

Si $1-2m \geq 0$, $\forall p \geq 1$: $0 \leq M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \leq (1-2m)^{p-1}(M_j^{(1)} - m_j^{(1)})$

Comme A est st. stochastique $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \geq n.m$

donc $\underline{0 < m \leq \frac{1}{n}}$ d'où $1 - \frac{2}{n} \leq 1-2m < 1$

$\underline{\text{Si } n \geq 2}$, $0 \leq 1-2m < 1$ d'où $M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$

(th. d'encadrement)

cqs : <u>les 2 suites sont adjacentes</u>

Si $n=1$, $A = (1)$ d'où $m_j^{(p)} = M_j^{(p)} = m = 1$

d $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ les 2 suites sont adjacentes}}$

Q28 $\forall j \in [\![1, p]\!]$, posons $\ell_j = \lim\limits_{p\to\infty} m_j^{(p)} = \lim\limits_{p\to\infty} M_j^{(p)}$ ($\exists$ car)

$\forall k \in [\![1, n]\!]$ $\quad m_j^{(p)} \leq a_{k,j}^{(p)} \leq M_j^{(p)}$
$\forall p \in \mathbb{N}^*$

$\xrightarrow[p\to\infty]{} \ell_j$ th. d'encadrement

et par TG : $\sum_{j=1}^{n} \ell_j = \lim\limits_{p\to\infty} 1 = 1$

d° : $\boxed{A^p \longrightarrow \begin{pmatrix} \ell_1 & \cdots & \ell_n \\ \vdots & & \vdots \\ \ell_1 & & \ell_n \end{pmatrix}}$

d $\boxed{L \text{ est stochastique}}$

Préliminaire :

0 i) $\forall x \in K^n - \{0\} \quad \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| = 1 \leq 1$

donc $\frac{\|\Pi x\|_1}{\|x\|_1} = \left\|\Pi \frac{x}{\|x\|_1}\right\|_1 \leq \underbrace{\sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|\Pi x\|_1}_{\text{majorant}}$

donc $\sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|\Pi x\|_1}{\|x\|_1} \leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|\Pi x\|_1$

Récip. $\forall x \neq 0 \setminus \|x\|_1 \leq 1$ alors

$\|\Pi x\|_1 = \frac{\|\Pi x\|_1}{\|x\|_1} \|x\|_1 \leq \frac{\|\Pi x\|_1}{\|x\|_1} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|\Pi x\|_1}{\|x\|_1}$

donc $\sup_{\|x\| \leq 1} \|\Pi x\|_1 \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|\Pi x\|_1}{\|x\|_1}$ encore valable pour $x = 0$

d'o $\boxed{\sup_{x \neq 0} \frac{\|\Pi x\|_1}{\|x\|_1} = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|\Pi x\|_1 = \|\Pi\|_1}$

ii) Voir le cours

Mines 1 2006 MP

Ds tout le pb on "confond" matrice et endo, ex : $P(x) = Px$ ....

1° * Comme T et x sont positifs, $Tx \geq 0$: $(Tx)_i = \sum_{\alpha=1}^{n} t_{i,\alpha} x_\alpha \geq 0$

donc $0 \in \Gamma_x$: $\underline{\Gamma_x \neq \emptyset}$

* Soit (θ_p) une suite de Γ_x qui converge vers $\alpha \in \mathbb{R}$

$\forall p \in \mathbb{N}$: $\theta_p x \leq Tx$

Donc $\forall i$, $\theta_p x_i \leq (Tx)_i$, tout cvg (i est fixé, à p) :

$p \to +\infty$: $\alpha x_i \leq (Tx)_i$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$ donc $\alpha x \leq Tx$

d'où $\underline{\Gamma_x \text{ est fermé}}$

* Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_{i_0} \neq 0$ ($x \neq 0$ car $x \in B$)

on a alors $\forall \theta \in \Gamma_x$ $\theta x_{i_0} \leq (Tx)_{i_0}$ soit $\theta \leq \dfrac{(Tx)_{i_0}}{x_{i_0}}$

d'où $\underline{\Gamma_x \text{ est borné par } 0 \text{ et } \dfrac{(Tx)_{i_0}}{x_{i_0}}}$

cl $\boxed{\Gamma_x \text{ non vide, fermé et borné}}$

cqs Γ_x est un compact d'où $\sup \Gamma_x = \max \Gamma_x$

② Soit $\theta \in \Gamma_x$, si $x_i \neq 0$ $\theta \leq \frac{(Tx)_i}{x_i}$ donc

$\theta(x) \leq \min\left\{ \frac{(Tx)_i}{x_i}, 1 \leq i \leq n \ \& \ x_i \neq 0 \right\}$ existe car $x \neq 0$

Soit $\alpha = \min\left\{ \frac{(Tx)_i}{x_i}, \text{———} \right\} = \frac{(Tx)_{i_0}}{x_{i_0}}$

On a $\forall \theta \in \Gamma_x$, $\theta x_{i_0} \leq (Tx)_{i_0}$ donc

$\theta \leq \alpha$

de + $\alpha \in \Gamma_x$ car si $x_i = 0$ alors $\alpha x_i = 0 \leq (Tx)_i$

si $i \neq 0$, $\alpha = \frac{(Tx)_{i_0}}{x_{i_0}} \leq \frac{(Tx)_i}{x_i}$ donc $\alpha x \leq Tx$

d'où $\alpha \leq \theta$

d $\boxed{\theta(x) = \alpha}$

③ $\forall i \mid x_i \neq 0$ $\frac{(T\alpha x)_i}{\alpha x_i} = \frac{\cancel{\alpha}(Tx)_i}{\cancel{\alpha} x_i}$ donc "$\hat{=}$ min"

d: $\boxed{\theta(\alpha x) = \theta(x)}$

④ Comme P est st positive et $x \in B$ est positif, voir début 1°)

$Px \geq 0$. Si Px n'était pas st positif alors !

③

on aurait $\underset{\exists i \in [\![1,n]\!]}{\wedge}$ $(Px)_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x_j = 0$, comme $p_{i,j} > 0$,

alors on a donc $\forall j \in [\![1, n]\!]$ $x_j = 0$: $x = 0$

Absurde car $x \in B$ donc $Px \in B^+$ d'où $\boxed{P(B) \subset B^+}$

⑤ Soit $x \in B$, si $\theta \in \Gamma_x$ alors $\theta x \leq Tx$.

Dans ce cas $-\theta \underline{P}x + T\underline{P}x = -\underline{P}\theta x + \underline{P}Tx$ car $\underline{P}T = T\underline{P}$ $(\underline{P} \in \mathbb{R}[T])$

$$= \underbrace{\underline{P}}_{\geq 0} \underbrace{(Tx - \theta x)}_{\geq 0 \ (\theta \in \Gamma_x)} \geq 0$$ donc $\theta \underline{P}x \leq T\underline{P}x$

d'où $\theta \in \Gamma_{\underline{P}x}$

donc $\underline{\Gamma_x \subset \Gamma_{\underline{P}x}}$ ce qui prouve que

$\sup \Gamma_x \leq \sup \Gamma_{\underline{P}x}$ d'où $\boxed{\theta(\underline{P}x) \geq \theta(x)}$

Etudions $(TPx)_i$: $TPx = PTx$

Si $Tx = 0$ alors $Px = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} T^k x = x$. Avec la 4),

on a $x = Px \in B^+$ donc $\forall i$ $x_i > 0$ et $Tx = 0 \Rightarrow T = 0$

$\Rightarrow P = I_n$: non strictement positive : Absurde donc $Tx \neq 0$, donc $Tx \in \mathcal{B}$ et avec le 4°),

$TPx = P(Tx) \in \mathcal{B}^+$ donc $\forall i \ (TPx)_i > 0$

On conclut avec le 2°) : $\boxed{\theta(Px) > 0}$

(6°) Si $Tx = \lambda x$ alors $Px = \underbrace{(1+\lambda)^{n-1}}_{>0} x$ d'où avec

le 3°) : $\boxed{\theta(Px) = \theta(x)}$

(7°) Posons $\lambda = \theta(x)$ et montrons que $Tx = \lambda x$.

On a $\lambda \in \Gamma_x$ donc $\lambda x \leq Tx$ donc $y = Tx - \lambda x \geq 0$

Si $y \neq 0$, alors $y \in \mathcal{B}$ d'où avec le 4°) $Py \in \mathcal{B}^+$

d'où $\forall i \in [\![1, n]\!] \ [P(Tx)]_i - \lambda (Px)_i > 0$

Comme $x \in \mathcal{B}$, $Px \in \mathcal{B}^+$ (4°)) donc $(Px)_i > 0$

d'où $\forall i \in [\![1, n]\!] \ \lambda < \dfrac{[P(Tx)]_i}{(Px)_i} = \dfrac{[T(Px)]_i}{(Px)_i}$

Soit i_0 tq $\dfrac{[T(Px)]_{i_0}}{(Px)_{i_0}} = \theta(Px)$ (c'est le 2°))

on a donc $\lambda < \theta(Px) = \theta(x) = \lambda$; Absurde ⑤

d' : $y=0$; $Tx = \lambda x$ d'où $\boxed{\begin{array}{l}\theta(x) \text{ vp de } T \\ \cdot\, x \ \vec{v}p \text{ de } T\end{array}}$

⑧ On a $C \subset B$ donc $P(C) \subset P(B) \subset B^+$ (c'est le 4)).

D'où $\forall y \in P(C)$, $y \in B^+$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $y_i > 0$

et donc $\theta(y) = \min\left(\dfrac{(Ty)_i}{y_i}, i \in [\![1, n]\!]\right)$

$= \phi_n(f_1(y), \dots, f_n(y))$

où $f_i : B^+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$y \longmapsto \dfrac{(Ty)_i}{y_i}$ qui est $C^0/_{TG}$ sur B^+

($y \longmapsto Ty$ C^0 car linéaire)

et $\phi_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \min(x_1, \dots, x_n)$

On sait que $\phi_2(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 + x_2 - |x_1 - x_2|}{2}$

donc continue sur $\mathbb{R}^2$ par TG.

Comme $\phi_n(x_1, \dots, x_n) = \min(x_1, \phi_{n-1}(x_2, \dots, x_n))$, On déduit par récurrence que φ_n est $C^0/\mathbb{R}^n$ et TG

D'où par TG, $\boxed{\Theta \ C^0 \text{ sur } P(C) \subset B^+}$

(9) Comme Θ est C^0 sur $P(C)$, comme C est compact car fermé : $C = B \cap \Sigma = \Sigma \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$: intersection de fermés si $x_p \to x$ et $x_p \geq 0$ alors $x \geq 0$ et C est borné (car inclus dans Σ) de $\mathbb{R}^n$. L'application $y \longmapsto Py$ est continue car linéaire donc $P(C)$ est compact de $\mathbb{R}^n$.

En conséquence sur ce compact $P(C)$, Θ, continue, est bornée et <u>atteint</u> ses bornes :

$$\boxed{\exists x_0 \in P(C) \mid \Theta(x_0) = \sup_{x \in P(C)} \Theta(x)}$$

(10) si $x \in C$ $P(x) \in P(C) \subset B$ donc $\Theta(x) \underset{\text{c'est le 5)}}{\leq} \Theta(Px) \leq \sup_{x \in P(C)} \Theta(x)$

d'où $\boxed{\sup_{x \in C} \Theta(x) \leq \sup_{x \in P(C)} \Theta(x)}$

(11) Si $x \in B$, $x \neq 0$ et $\frac{x}{\|x\|_1} \in \Sigma$ donc

$\frac{x}{\|x\|_1} \in \Sigma \cap B = C$ d'où $\theta(x) = \underbrace{\theta\left(\frac{1}{\|x\|_1} x\right)}_{\text{c'est le } 3^\circ)} \leq \sup\limits_{x \in C} \theta(x)$

donc $\underline{\sup\limits_{x \in B} \theta(x) \leq \sup\limits_{x \in C} \theta(x)}$

Comme $C \subset B$, $\underline{\sup\limits_{x \in C} \theta(x) \leq \sup\limits_{x \in B} \theta(x)}$

d'où : $\boxed{\sup\limits_{x \in C} \theta(x) = \sup\limits_{x \in B} \theta(x)}$

(12) Avec le 10) on a $\sup\limits_{x \in C} \theta(x) \leq \sup\limits_{x \in P(C)} \theta(x)$

Comme $P(C) \subset B$, $\sup\limits_{x \in P(C)} \theta(x) \leq \sup\limits_{x \in B} \theta(x) \overset{\text{le } 11^\circ)}{=} \sup\limits_{x \in C} \theta(x)$

Avec le 9, on conclut : $\boxed{\sup\limits_{x \in C} \theta(x) = \sup\limits_{x \in P(C)} \theta(x) = \theta(x_0)}$

(13) $x_0 \in P(C) \subset B$ donc avec le 5) : $\theta(P x_0) \geq \theta(x_0) = \theta_0$

Or $P x_0 \in B$ donc $\theta(P x_0) \leq \sup\limits_B \theta = \sup\limits_C \theta = \theta_0$

d'où $\underline{\theta(P x_0) = \theta(x_0)}$

Avec le 7), $\underline{x_0 \text{ est un } \vec{v}p \text{ de } T}$

Avec le 4) $x_0 \in P(C) \subset P(B) \subset B^+$, donc $\underline{x_0 \text{ est positif}}$

Avec le 5) $\underline{\theta(x_0) = \theta(Px_0) > 0}$

---

14) Soit $x \setminus Tx = \theta x$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\sum_{j=1}^{n} t_{i,j} x_j = \theta x_i$

d'où $\left|\sum_{j=1}^{n} t_{i,j} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |t_{i,j}||x_j| = \sum_{j=1}^{n} t_{i,j} |x_j|$, car $T \geq 0$.

(st θ => ≥ 0)

donc $\begin{cases} |\theta x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} t_{i,j} |x_j| = (Tx^+)_i \\ \forall i \in [\![1, n]\!] \end{cases}$

d'où par définition de $\leq$, $\boxed{|\theta| x^+ \leq Tx^+}$

15) On a donc $|\theta| \in \Gamma_{x^+}$ et comme $x^+ \in B$, $|\theta| \leq \sup_{x \in B} \theta(x) = \theta_0$

d'où $\boxed{|\theta| \leq \theta_0}$

16) Avec les notations du 14), $|\theta x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} t_{ij} |x_j|$

sommons de 1 à n : $\sum_{i=1}^{n} |\theta x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} |x_j|$ (9)

comme toujours on intervertit les Σ :

$$|\theta| \, \|x^+\|_1 \leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} \right)}_{\substack{=1 \\ \text{car stochastique}}} |x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

d'où : $\boxed{|\theta| \, \|x^+\|_1 \leq \|x^+\|_1}$

Comme $x \neq 0$ (car $\vec{v}p$), $x^+ \neq 0$ et donc $\|x^+\| > 0$ d'où ;

d'où : $\boxed{|\theta| \leq 1}$

17) * Comme θ_0 est une vp de T et que $\theta_0 > 0$ (13°))

on a $\underline{\theta_0 \leq 1}$

* comme T est stochastique on a $T^T \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

donc 1 est valeur propre de T^T d'où 1 est racine du polynôme caractéristique $\chi_{T^T}(X)$.

or $\chi_{{}^tT}(x) = \det({}^tT - xI_n) = \det(T - xI_n)^T = \chi_T(x)$

donc 1 est valeur propre de T, d'où avec la 15°), $\underline{1 \leq \theta_0}$ d'où : $\boxed{\theta_0 = 1}$

18°) Montrons que si A et B sont stochastiques, alors AB aussi. $AB = (c_{ij})$ & $c_{ij} = \sum_{\alpha=1} a_{i\alpha} b_{\alpha j}$

* $\forall i, j : c_{ij} \geq 0$ donc $\underline{AB \text{ est positive}}$

* $\forall j \in [\![1, n]\!]$ $\sum_{i=1}^{n} c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} b_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^{n} \overbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i\alpha}\right)}^{=1} b_{\alpha j}$

$= 1$

d'où $\underline{AB \text{ stochastique}}$ $I_n = T^0$ est aussi $\underline{\text{stochastique}}$

On en déduit par récurrence que $\underline{\forall j \geq 1, T^j \text{ stoch.}}$

si l'on pose $T^s = (t_{ij}(s))$ pour tout s,

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad (R_k)_{i,j} = r_{i,j} = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{1}{k} t_{i,j}(s)$ (11)

* On a clairement $r_{i,j} \geq 0$, donc R_k positive

* $\forall j \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{i=1}^{n} r_{i,j} = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{1}{k} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} t_{i,j}(s)}_{=1} = 1$

cl : $\boxed{T^j \text{ et } R_k \text{ sont toutes stochastiques.}}$

(19) Soit A une matrice stoch.

$\forall X \in \mathbb{C}^n, \quad \|AX\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overbrace{a_{i,j}}^{\geq 0} |x_j|$

$\leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \right)}_{=1} |x_j| = \|X\|_1$ d'où avec le

préf. 9) ; $\|A\|_1 \leq 1$, pour $A = T^k$ et $A = R_k$ on a :

$\boxed{\|T^k\|_1 \leq 1 \text{ et } \|R_k\|_1 \leq 1}$

20) $TR_k - R_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (T^{j+1} - T^j) = \frac{1}{k} (T^k - I_n)$

Par inégalité triangulaire et avec la 19') du prél. a) on

conclut : $\boxed{\|TR_k - R_k\|_1 \leq \frac{2}{k}}$

21) $\forall k \geq 1 \quad \|R_k x\|_1 \leq \|R_k\|_1 \|x\|_1$ (norme subordonnée)

Prél. d)

$\leq \|x\|_1$

La suite $(R_k x)_{k\geq 1}$ est donc bornée dans $\mathbb{C}^n$ qui

est de dimension finie (donc les boules fermées sont

compactes), d'où par B.W., la suite

$\boxed{(R_k x) \text{ admet des valeurs d'adhérence}}$

22) Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ st $\nearrow$ | $R_{\varphi(k)} x \xrightarrow[k\to\infty]{} y$

Avec la 20'), $\forall k \geq 1 : 0 \leq \|TR_{\varphi(k)} x - R_{\varphi(k)} x\|_1 \leq \frac{2}{\varphi(k)} \|x\|_1$

$\xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$(\varphi(k) \geq k \to \infty)$

Or par TG (T linéaire de C^0), $TR_{\varphi(k)} x \longrightarrow Ty$

d'où : $\boxed{Ty = y}$

On en déduit que $\underline{R_n y = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y = y}$

23) $R_\ell (R_m x - z) - R_m (R_\ell x - y)$

$= R_\ell R_m x - R_m R_\ell x - R_\ell z + R_m y$

Comme R_ℓ et R_m sont des polynômes en T, elles commutent. D'autre part (avec la 22) $R_\ell z = z$ et $R_m y = y$

d'où : $\boxed{R_\ell (R_m x - z) - R_m (R_\ell x - y) = y - z.}$

24) Soit φ et ψ st $\nearrow$ | $R_{\varphi(k)} x \longrightarrow y$ et $R_{\psi(k)} \longrightarrow z$

pour $m = \psi(k)$ et $\ell = \varphi(k)$ (du 23°) on a :

$\|y - z\|_1 \leq \|R_{\varphi(k)}\|_1 \cdot \|R_{\psi(k)} x - z\|_1 + \|R_{\psi(k)}\|_1 \cdot \|R_{\varphi(k)} x - z\|_1$

$\overset{19)}{\leq} \|R_{\psi(k)} x - z\|_1 + \|R_{\varphi(k)} x - y\|_1 \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0 + 0 = 0$

d'où : $\boxed{y = z \text{ et } (R_n x) \text{ admet exactement } 1 \text{ v.a.}}$ ↳ avec la 21)

25) * Montrons que $(R_k x)_k$ converge, soit y sa unique valeur d'adhérence (24°)). Supposons que $(R_k x)$ ne converge pas vers y :

$\exists \varepsilon_0 > 0 \mid \underbrace{\forall N \in \mathbb{N},\ \exists k \geq N}$ et $\|R_k x - y\|_1 > \varepsilon_0$

Avec cela on peut construire par récurrence, une suite d'entiers $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(p) \dots$ tel que

$\forall p \in \mathbb{N} \quad \|R_{\varphi(p)} x - y\|_1 > \varepsilon_0$

La suite $(R_{\varphi(p)} x)$ est bornée dans $\ell^1(\mathbb{N})$, elle possède une v.a. qui ne peut être que y (24°)) : Absurde

cqfd $\underline{\forall x \in \mathbb{C}^n,\ (R_k x) \text{ converge.}}$

* Ceci définit une fonction $F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$

$x \longmapsto F(x) = \lim_{k \to +\infty} R_k x$

Montrons que F est linéaire :

$\forall (x,y) \in (\mathbb{C}^n)^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$; $\forall k \geq 1$

$R_k(\lambda x + y) = \lambda R_k x + R_k y$ et tout converge

d'où qd $k \to \infty$: $F(\lambda x + y) = \lambda F(x) + F(y)$

<u>csq</u> F linéaire, posons R la matrice canoniquement associée à F. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \lim_{k \to \infty} R_k x = Rx$$

---

* Pour $x = e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de la base canonique, la suite $(R_k e_j)_k$ converge, si on pose $R_k = (r_{i,j}(k))$, $R_k e_j = \begin{pmatrix} r_{1,j}(k) \\ \vdots \\ r_{n,j}(k) \end{pmatrix}$

donc $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ $(r_{i,j}(k))_{k \in \mathbb{N}}$ cvg, d'où

la suite (R_k) cvg (pour toutes normes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$)

si on pose $S = \lim_{k \to \infty} R_k$, on a $\forall x \in \mathbb{C}^n$,

$R_k x \xrightarrow[k \to \infty]{TG} Sx$ d'où $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $Sx = Rx$ unicité de la limite

csq $\underline{R = S}$

d'où $\boxed{\lim_{h\to\infty} \|R_h - R\|_1 = 0}$

26) $\forall h \geq 1 \quad R_h T = T R_h$ (R_h polynôme en T)

par TG, qd $h \to \infty$, $\boxed{RT = TR}$

27) * $R_h T = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{h-1} T^{j+1} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{h} T^j$

$= \frac{1}{k}\left[(k+1)R_{h+1} - I_n\right] \xrightarrow[h\to\infty]{TG} 1.R - 0 = R$

d'où $\boxed{RT = T}$

* $\forall n \in \mathbb{C}^n$, $\left| \begin{array}{l} R_h R n = R n \\ \forall h \in \mathbb{N} \end{array} \right.$ avec $y = Rn$ et la 22)

qd $h \to \infty$: $R^2 n = Rn$, $\forall n \in \mathbb{C}^n$

d'où : $\boxed{R^2 = R}$

28) * Comme $RT = R$, $R(T - I_n) = 0$ donc

$\mathrm{Im}(T - I_n) \subset \mathrm{Ker}\, R$

* Si $n \in \mathrm{Ker}(T - I_n)$, $Tn = n$ donc $R_h n = n$ d'où $Rn = n$

soit $\mathrm{Ker}(T - I_n) \subset \mathrm{Im}\, R$

On en déduit que $\begin{cases} rg(T-I_n) \leqslant n - rg R \\ n - rg(T-I_n) \leqslant rg R \end{cases}$

d'où $rg(T-I_n) = n - rg R = \dim \operatorname{Ker} R$

donc $\underline{\operatorname{Im}(T-I_n) = \operatorname{Ker} R}$

et donc (m̂ dim) $\underline{\operatorname{Ker}(T-I_n) = \operatorname{Im} R}$

Comme $R^2 = R$, on conclut :

$\boxed{R \text{ est le projecteur sur } \operatorname{Ker}(T-I_n) \parallel^t \text{ à } \operatorname{Im}(T-I_n)}$

29) $\forall x \in B$, $Rx \in \operatorname{Im} R = \operatorname{Ker}(T-I_n) = E_1(T) = \operatorname{vect}(x_0)$

donc $Rx = \lambda x_0$

On $R_k x_0 = x_0$ et comme $x_0 \geqslant 0$, en notant $R_k = (r_{ij})$

$$\|R_k x_0\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij}\, \alpha_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \|x_0\|_1 \qquad x_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

par TG, qd $k \to \infty$, $\|R x_0\|_1 = \|x_0\|_1$

On en déduit que $\|R\|_1 = 1$ et que, comme $x \geq 0$

$\|Rx\|_1 = \|x\|_1$ (idem x_0)

d'où $\|\lambda x_0\|_1 = \|x\|_1$ soit $\lambda = \pm \frac{\|x\|_1}{\|x_0\|_1}$

Or $\lambda \geq 0$ car x et Rx sont positifs.

d $\boxed{Rx = \frac{\|x\|_1}{\|x_0\|_1} x_0}$