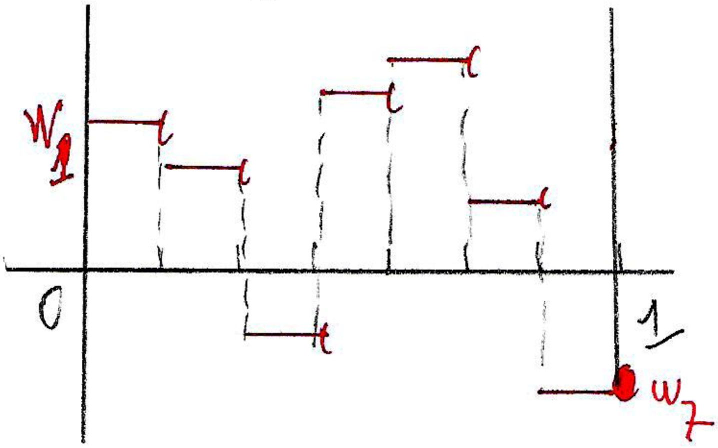
exercice 1 (e3a 2020 MP)

0) 

1) $$\int_0^1 f_n(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} w_k\,dt = \frac{w_1 + w_2 + \dots + w_n}{n}$$

2) Analyse soit $t \in [0,1[$, on cherche k / $t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[$: $\frac{k-1}{n} \leq t < \frac{k}{n}$

$$\iff k-1 \leq nt < k-1+1$$

Synthèse $\forall t \in [0,1[$ posons $k = \lfloor nt \rfloor + 1$,

$$f_n(t) = w_k \text{ car } t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[$$

d'où $\forall t \in [0,1[$ $f_n(t) = w_{\lfloor nt \rfloor + 1}$

3) $w_{\lfloor nt \rfloor + 1} \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell$ car $\lfloor nt \rfloor + 1 \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$ si $t > 0$

Précisons : $\lfloor nt \rfloor + 1 \geqslant nt - 1 + 1 \geqslant nt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si $\underline{t>0}$ ②

Par composition des limites $w_{\lfloor nt \rfloor + 1} = w \circ f(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$

avec $f(x) = \lfloor xt \rfloor + 1$

⚠ $(w_{\lfloor nt \rfloor+1})$ n'est pas une suite extraite (f n'est pas strictement croissante).

d'où $\boxed{\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \begin{cases} w_1 & \text{si } t=0 \\ \ell & \text{si } t \in]0,1[\\ \ell & \text{si } t=1 \end{cases}}$

4) Avec le 1), on demande $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt$, d'où :

utilisons la <u>convergence dominée</u>

Posons $f(t) = \begin{cases} w_1 & \text{si } t=0 \\ \ell & \text{si } t \in]0,1] \end{cases}$

$*_1$ (f_n) converge simplement vers f sur $I=[0,1]$ (c'est le 3))

$*_2$ f_n et f sont C^0 par morceaux sur I

$*$ Comme (w_n) converge dans $\mathbb{R}$, elle est bornée :

$\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}^* \ |w_n| \leq M$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0,1]$ $|f_n(t)| \leq M = \varphi(t)$

et φ c° et intégrable sur $[0,1]$.

Par th. de cvg dominée, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f = l$

d° $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} w_n = l}$

5) Utilisons S.R.C.

1er cas $l > 0$ $w_n \sim l \geq 0$ d'où $\sum\limits_{k=1}^{n} w_k \sim \sum\limits_{k=1}^{n} l = nl$

donc $\lim \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} w_k = l$

2e cas $l < 0$: on applique le 1er cas à $-w_n$

3e cas $l = 0$: $w_n = o(1)$ d'où $\sum\limits_{k=1}^{n} w_k = o\left(\sum\limits_{k=1}^{n} 1\right)$
[et $1 \geq 0$]

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} w_k = 0$

d° on retrouve le 4)

e3a MP 2017

exercice 2

1 a) * $f : t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$ (par T.G.)

* Comme $\alpha > 0$, $t^\alpha = e^{\alpha \ln t} \xrightarrow[t \to 0]{} e^0 = 1$: donc

PPC de f en 0 d'où f intégrable $/]0,1]$

* En $+\infty$: $f(t) = \dfrac{1}{t^{\alpha n}} \dfrac{1}{(1+\frac{1}{t^\alpha})^n} \sim \dfrac{1}{t^{n\alpha}} \geq 0$

Comme $n\alpha > 1 \times 1 = 1$, f, par TC, est intégrable sur $[1, +\infty[$

d'où $\boxed{I_n \text{ existe}}$

b) Le cdV est C^1-bijectif sur $]0,+\infty[$ d'où

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{n}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n} dt \qquad \underline{u = nt^\alpha}$$

donc cette intégrale existe, comme la fonction à l'intérieur de cette intégrale est positive, La fonction $u \longmapsto \dfrac{u^{1/\alpha - 1}}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n}$ intégrable $/]0,+\infty[$

et $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n}\, du = n^{1/\alpha}\, \alpha\, I_n}$

c) Soit par récurrence, soit par étude de fonction, soit, par exemple, avec Newton :

$$\left(1+\frac{u}{n}\right)^n = \underbrace{1 + n\frac{u}{n}}_{\geqslant 1+u} + \underbrace{\binom{n}{2}\left(\frac{u}{n}\right)^2 + \cdots}_{\geqslant 0}$$

cl° $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \geqslant 0 : \left(1+\frac{u}{n}\right)^n \geqslant 1+u}$

2) $\left| \begin{array}{l} 1+\frac{u}{n} > 0 \\ \forall u \geqslant 0, \forall n \geqslant 1 \end{array} \right.$ d'où $\left(1+\frac{u}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{u}{n}\right)}$

$$\underset{0}{=} e^{n\left(\frac{u}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \quad \text{DL}$$

$$= e^u \cdot e^{o(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^u$$

cl° $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{u}{n}\right)^n = e^u}$

3 a) Posons $f_n(u) = \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n}$

i) (f_n) cvg simplement vers $g : u \longmapsto u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u}$ sur $I =]0,+\infty[$

ii) f_n et g sont $C^0 / I =]0, +\infty[$ (par T.G.)

iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall u \in]0, +\infty[$:

H.D.

$$|f_n(u)| \leq \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{1+u} = \varphi(u) \text{ grâce au 1 c).}$$

$\to \varphi \; C^0 / I$

$\to \varphi(u) \underset{0}{\sim} u^{\frac{1}{\alpha}-1} = \frac{1}{u^{1-\frac{1}{\alpha}}} \geqslant 0$ et $1 - \frac{1}{\alpha} < 1$

par T.C., φ int. $/]0, 1]$

$\to \varphi(u) \underset{+\infty}{\sim} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{u} = \frac{1}{u^{2-\frac{1}{\alpha}}} \geqslant 0$

comme $\alpha > 1$, $2 - \frac{1}{\alpha} > 2 - 1 = 1$

par TC, φ int. $/ [1, +\infty[$

On conclut avec le théorème de cvg dominée :

d'
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} v_n = \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

b) Avec le 1 b), on a $\boxed{I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{1/\alpha}\,\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$. car $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \neq 0$

4a) $\forall n > 0 \quad |I_n x^n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{1/\alpha}\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) |x|^n$

si $|x| < 1$: $I_n x^n = o(|x|^n)$ d'où, par TC,

$(\sum I_n x^n)$ cvg absolument   car $n^{1/\alpha} = e^{\frac{1}{\alpha}\ln n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

[si $|x| > 1$: $\frac{|x|^n}{n^{1/\alpha}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par $\underline{C.C.}$

donc $(\sum I_n x^n)$ Dvg grossièrement] non demandé dans ce devoir

d'où $\boxed{R = 1}$

b) $\forall |x| < 1$: $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+t^\alpha)^n} dt$

Utilisons le théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue :

posons $u_n(t) = \frac{x^n}{(1+t^\alpha)^n}$

i) $(\sum u_n)$ $\underline{\text{cvg simplement sur } I =]0, +\infty[}$, car

$(\sum u_n(t))$ est une série géométrique de raison

$q = \frac{x}{1+t^\alpha}$ et $|q| \leq |x| < 1$

de plus $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) = \frac{x}{1+t^\alpha} \frac{1}{1 - \frac{x}{1+t^\alpha}} = \frac{x}{1+t^\alpha - x}$

posons $F(t) = \frac{x}{1+t^\alpha - x}$

ii) u_n et F sont C^0 sur I (TG)

iii) $\int_0^{+\infty} |u_n| = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} |x|^n = I_n |x|^n$: terme

général d'1 série cvg (c'est le a))

d' : $\boxed{\forall\ |x|<1 \qquad S(x) = \int_0^{+\infty} F = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+t^\alpha - x} dt}$

E3A-2006-MP_A

①

Partie I

1ère méthode (classique)

1, Eq. homogène : $y'+cy=0$ donc $y=\lambda e^{-cx}$.

Solution particulière (VDC) $y_1=\lambda(x)y_0(x)$ avec $y_0(x)=e^{-cx}$

Donc $y_1'=\lambda' y_0+\lambda y_0'$ donc $y_1'+cy_1=\lambda' y_0+\cancel{\lambda y_0'}+\cancel{c\lambda y_0}=f$ d'où

$\lambda'=f(x)e^{cx}$ donc $y_1(x)=\left(\int_0^x f(t)e^{ct}dt\right)e^{-cx}$ convient

csq Les solutions de $y'+cy=f$, sont $x\mapsto \lambda e^{-x}+e^{-x}\int_0^x e^{ct}f(t)dt$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Comme on veut $y(0)=0$, il vient $\lambda=0$, donc unicité et

cl. $\boxed{\forall x\in I,\ \varphi(f)(x)=e^{-cx}\int_0^x e^{ct}f(t)dt}$

2ème méthode : on vérifie que φ est sol. de $\begin{cases} y'+cy=f \\ y(0)=0\end{cases}$

2, Comme $t\longmapsto e^{ct}f(t)$ est continue sur I, $x\mapsto\int_0^x e^{ct}f(t)dt$

est C^1 sur I et par produit $\underline{\varphi(f) \text{ est } C^1 \text{ sur } I}$ de + :

$\forall x\in I\ (\varphi(f))'(x)=\varphi'(f)(x)=-c\,\varphi(f)(x)+f(x)$

cl $\boxed{\varphi'(f)=-cf+\varphi(f)}$ remarque: méthode inutile car $y'=f-cy$!!!

$\forall(\lambda,f,g)\in\mathbb{R}\times C^0(I)^2\ \ \forall x\in I$:

$$\varphi(\lambda f+g)(x) = e^{-cx}\int_0^x e^{ct}(\lambda f(t)+g(t))dt$$
$$= \lambda e^{-cx}\int_0^x e^{ct} f(t)dt + e^{-cx}\int_0^x e^{ct} g(t)dt$$
$$= [\lambda\varphi(f)+\varphi(g)](x) \text{ d'où } \varphi(\lambda f+g)=\lambda\varphi(f)+\varphi(g)$$

Enfin, $\varphi(f)$ est C^1 sur I donc C^0 sur I d'où $\varphi(f)\in C^0(I)$

cl. $\boxed{\varphi : f \longmapsto \varphi(f) \text{ est linéaire sur } C^0(I)}$

Partie II

1. classique (EVN) :

inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt = \int_a^b |f(t)|\times 1 dt \leq \sqrt{\int_a^b |f|^2}\sqrt{\int_a^b 1^2} = \sqrt{b-a}\,\|f\|_2$$

et $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b \|f\|_\infty^2 dt} = \sqrt{b-a}\,\|f\|_\infty$

cl. $\boxed{\forall f\in C^0(I) : \|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\,\|f\|_2 \leq (b-a)\|f\|_\infty}$

2. $\forall x\in I=[a,b]$ $|\varphi(f)(x)| \leq e^{-ca}\int_a^b e^{ct}\|f\|_\infty dt \leq \left[e^{-ca}\int_a^b e^{ct}dt\right]\|f\|_\infty$

cl. $\boxed{\forall f\in C^0(I) \quad \|\varphi(f)\|_\infty \leq M_0 \|f\|_\infty}$ avec $M_0 = e^{-ca}\int_a^b e^{ct}dt$

3. $\forall f\in C^0(I), \forall x\in I$ $|\varphi(f)(x)| \leq e^{-cx}\int_a^b e^{ct}|f(t)|dt \leq e^{-ca}e^{cb}\|f\|_1$

$A = e^{c(b-a)}$ convient

cl. $\boxed{|\varphi(f)(x)| \leq e^{c(b-a)}\|f\|_1}$

4. $|\varphi(f)(x)| = e^{-cx}\left|\int_a^b e^{ct} f(t)\,dt\right| \leq A\|f\|_1 \leq AM_1\|f\|_2$
avec le 3°)

d'où $\boxed{\forall f \in C^0(I),\ \forall x \in I\ \ |\varphi(f)(x)| \leq e^{c(b-a)}\sqrt{b-a}\,\|f\|_2}$

$$\int_a^b |\varphi(f)(x)|^2 dx \leq \int_a^b B^2\|f\|_2^2\,dt \leq B^2(b-a)\|f\|_2^2$$

d'où $\boxed{\forall f \in C^0(I),\ \|\varphi(f)\|_2 \leq B\sqrt{b-a}\,\|f\|_2}$ $\underline{K = e^{c(b-a)}(b-a)}$

5. Comme φ est linéaire, elle est continue avec $\| \|_\infty$ grâce à la question 2. et avec $\| \|_2$ grâce à la question 4.

On a avec 3°) $\|\varphi(f)\|_1 \leq \int_a^b A\|f\|_1 = A(b-a)\|f\|_1$.

d'où $\boxed{\varphi \text{ est continue par les 3 normes } \| \|_\infty,\ \| \|_1 \text{ et } \| \|_2}$

Partie III

1. $\forall x \in [0,+\infty[\ \ \varphi(f_\lambda)(x) = e^{-cx}\int_0^x e^{ct}e^{-\lambda t}\,dt = e^{-cx}\int_0^x e^{(c-\lambda)t}\,dt$

d'où $\boxed{\varphi(f_\lambda)(x) = \begin{cases} x e^{-cx} & \text{si } \lambda = c \\ \dfrac{e^{-\lambda x} - e^{-cx}}{c-\lambda} & \text{si } \lambda \neq c \end{cases}}$

2. f_λ est une fonction de référence et comme $\lambda > 0$,

$\boxed{f_\lambda \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[= I}$

Si $\lambda = c$: $\varphi(f_\lambda)(x) = x e^{-cx} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ car $\lim\limits_{+\infty} x^3 e^{-cx} = 0$ (C.C.)

par TC, $\varphi(f_\lambda)$ intégrable sur I ($\varphi(f_\lambda)$ est C^0 sur I : vu au I 2))

Si $\lambda \neq c$; comme $\lambda > 0$ et $c > 0$, par linéarité et intégrales de références, $\varphi(f_\lambda)$ intégrable sur I

d'où $\boxed{\forall \lambda > 0,\ f_\lambda \text{ et } \varphi(f_\lambda) \text{ sont intégrables sur } I}$

$$\int_0^x |f_\lambda(t)|\,dt = \int_0^x e^{-\lambda t}\,dt = \left[\frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda t}\right]_0^x = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$$

$\xrightarrow[+\infty]{} \frac{1}{\lambda}$ d'où $\boxed{\|f_\lambda\|_1 = \frac{1}{\lambda}}$

Si $\lambda = c$ $\displaystyle\int_0^x \varphi(f_\lambda)(t)\,dt = \int_0^x \underbrace{t}_{u} \underbrace{e^{-ct}}_{v'}\,dt \underset{ipp}{=} \left[t \frac{e^{-ct}}{-c}\right]_0^x + \int_0^x \frac{e^{-ct}}{c}\,dt$

$$= -\frac{x e^{-cx}}{c} + \frac{1}{c^2}\left[1 - e^{-cx}\right] \xrightarrow[+\infty]{} \frac{1}{c^2}$$

Si $\lambda \neq c$ $\displaystyle\int_0^x \varphi(f_\lambda)(t)\,dt = \int_0^x \frac{e^{-\lambda t} - e^{-ct}}{c - \lambda}\,dt \xrightarrow[+\infty]{} \frac{1}{\lambda c}$

d'où $\boxed{\|\varphi(f_\lambda)\|_1 = \frac{1}{\lambda c}}$ $\left(\frac{1}{c^2} = \frac{1}{\lambda c} \text{ qd } \lambda = c\right)$

3. $|f_\lambda(x)|^2 = e^{-2\lambda x}$ et comme $2\lambda > 0$, f_λ^2 intégrable$/I$

Si $\lambda = c$: $\varphi(f_\lambda)^2(x) = x^2 e^{-2cx} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par c.c. donc

$\varphi(f_\lambda)^2$ intégrable sur I

Si $\lambda \neq c$: $\varphi(f_\lambda)^2(x) = \dfrac{e^{-2\lambda x} + e^{-2cx} - 2e^{-(\lambda+c)x}}{(c-\lambda)^2}$

Comme $2\lambda > 0$, $2c > 0$ et $c + \lambda > 0$, par linéarité, $\varphi(f_\lambda)^2$ int.$/I$

$$\int_0^x |f_\lambda(t)|^2 dt = \int_0^x e^{-2\lambda t} dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{2\lambda} \quad \text{d.} \quad \boxed{\|f_\lambda\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}}$$

Si $\lambda = c$: $$\int_0^x \varphi(f_\lambda)^2(t)dt = \int_0^x \underbrace{t^2}_{u} \underbrace{e^{-2ct}}_{v'} dt = \left[t^2 \frac{e^{-2ct}}{-2c}\right]_0^x + \int_0^x 2t \frac{e^{-2ct}}{2c} dt$$

$$= x^2 \frac{e^{-2cx}}{-2c} + \left[2t \frac{e^{-2ct}}{-4c^2}\right]_0^x + \int_0^x 2 \frac{e^{-2ct}}{4c^2} dt$$

$$\xrightarrow[\substack{x \to +\infty \\ \text{avec cc}}]{} 0 + 0 - 0 + \frac{1}{2c^2} \int_0^{+\infty} e^{-2ct} dt = \frac{1}{4c^3}$$

donc $\|\varphi(f_c)\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{4c^3}}$

Si $\lambda \neq c$: $$\int_0^{+\infty} \varphi(f_\lambda)^2 = \frac{1}{(c-\lambda)^2} \left[\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2c} - \frac{2}{\lambda + c}\right] = \frac{\cancel{c^2 + \lambda^2 - 2\lambda c}}{\cancel{(c-\lambda)^2}\, 2\lambda c(\lambda + c)}$$

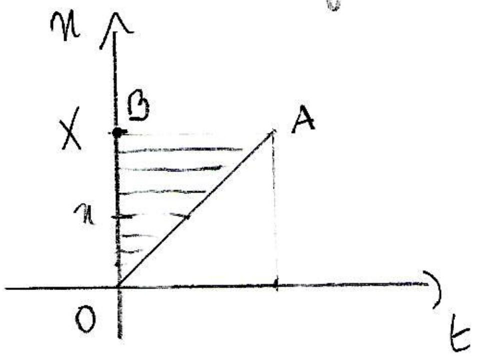
d : $\boxed{\|\varphi(f_\lambda)\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda c(\lambda+c)}}}$ pour $\lambda = c$ on retrouve admis

4. $\forall f \in L^1(I)$, montrons que $\Psi(f) \in L^1(I)$ 6

$$\forall x \geq 0 \quad |\Psi(f)(x)| = \Big|\underbrace{e^{-cx}}_{\text{facteur cvg}} \int_0^x \underbrace{e^{ct}}_{\text{facteur divg}} f(t)\,dt\Big|$$

donc TC bof !

évaluons $\displaystyle\int_0^X |\Psi(f)(x)|\,dx \leq \int_0^X \left|\int_0^x e^{-cx} e^{ct} |f(t)|\,dt\right| dx$



soit Δ_X le triangle OAB : c'est une partie élémentaire et $(x,t) \longmapsto e^{-cx} e^{ct} |f(t)|$ est C^0 sur Δ_X par TG d'où

Fubini donne :

admis

$$\int_0^X |\Psi(f)(x)|\,dx \leq \int_{t=0}^X \int_{x=t}^X e^{-cx} e^{ct} |f(t)|\,dx\,dt$$

$$= \int_0^X e^{ct} |f(t)| \left[\frac{e^{-cx}}{-c}\right]_t^X dt$$

$$= \int_0^X e^{ct} |f(t)| \left(\frac{e^{-ct} - e^{-cX}}{c}\right) dt$$

$$\leqslant \frac{1}{c}\int_0^x |f(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{c}\|f\|_1$$

Donc par caractérisation fondamentale, $\varphi(f)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\underline{\|\varphi(f)\|_1 \leqslant \frac{1}{c}\|f\|_1}$

Donc $\varphi(f) \in L^1(I)$. $L^1(I)$ est un $\mathbb{R}$-ev (SEV de $C^0(I)$) et comme φ est linéaire, $\varphi(f)$ est un <u>endomorphisme continue de $L^1(I)$</u> et de plus :

$$\underline{|||\varphi|||_1 \leqslant \frac{1}{c}}$$

admis

On a vu au 2) que $\|f_\lambda\|_1 = \frac{1}{\lambda}$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_1 = \frac{1}{\lambda c}$

donc $\|\lambda f_\lambda\|_1 \leqslant 1$ d'où $\|\varphi(\lambda f_\lambda)\|_1 \leqslant |||\varphi|||_1$

ce qui donne $\lambda \frac{1}{\lambda c} = \frac{1}{c} \leqslant |||\varphi|||_1$ d'où : $\boxed{|||\varphi|||_1 = \frac{1}{c}}$

admis

5. $f = g' + cg$ donne $fg = gg' + cg^2$ qu'on intègre :

$$\int_0^x f(t)g(t)\,dt = \int_0^x g(t)g'(t)\,dt + c\int_0^x g^2(t)\,dt$$

d'où $$\boxed{\frac{g(x)^2}{2} + c\int_0^x g^2(t)dt = \int_0^x f(t)g(t)dt}$$

On a donc $$\int_0^x g^2(t)dt \leq \frac{1}{c}\int_0^x f(t)g(t)dt$$
$$\leq \frac{1}{c}\sqrt{\int_0^x f^2}\sqrt{\int_0^x g^2}$$ par Cauchy-Schwarz

Si $\int_0^x g^2 \neq 0$, on a donc $\sqrt{\int_0^x g^2} \leq \frac{1}{c}\sqrt{\int_0^x f^2}$

et ceci est aussi valable si $\int_0^x g^2 = 0$. On en déduit

de m̂ qu'au 4 que : φ est un endo. c° de $L^2(I)$

et $|||\varphi|||_2 \leq \frac{1}{c}$

On utilise de m̂ les f_λ :

$\|\sqrt{2\lambda} f_\lambda\|_2 = 1$ donc $\|\varphi(\sqrt{2\lambda} f_\lambda)\|_2 \leq |||\varphi|||_2$

d'où $\sqrt{\frac{2\lambda}{\cancel{2}\lambda c(\lambda+c)}} \leq |||\varphi|||_2$ et ceci $\forall \lambda > 0$, qd

$\lambda \to 0$ il vient $\frac{1}{c} \leq |||\varphi|||_2$

cl° : $\boxed{|||\varphi|||_2 = \frac{1}{c}}$

Partie V

1°a) $\forall t \in I \quad 0 \leq |f(t)g(t)| \leq \max(f^2(t), g^2(t))$

$$\leq \underbrace{f^2(t) + g^2(t)}_{\text{int. } / I}$$

d'où par TC $\underline{fg \text{ intégrable sur } I}$ (et ceci permet de montrer que $H(I)$ est un S.E.V.)

On fait de m̂ pour $\underline{f'g' \text{ int. } / I}$

b) ϕ est symétrique, par linéarité de l'intégrale et de la dérivée, ϕ est bilinéaire.

$\phi(f,f) = \int_I f^2 + \int_I f'^2 \geq 0$ et par le th. de l'$\int$ nulle :

$\phi(f,f) = 0 \Rightarrow f = 0$ (et m̂ $f' = 0$!) d'où $\boxed{\phi \text{ est un PS sur } H(I)}$

c) On a $\|f\|_H = \sqrt{\phi(f,f)}$: $\| \|_H$ est donc la norme euclidienne associée au P.S. ϕ.

2 a) Comme φ est continue, $\exists k \geq 0 \setminus \forall f \in L^2(I) \quad \|\varphi(f)\|_2 \leq k \|f\|_2$.

Ensuite $\underline{\varphi(f)' = f - c\varphi(f) \in L^2(I)}$ car $f \in L^2(I)$ et φ est un endomorphisme, Comme $\varphi(f)$ et $\varphi(f)'$ sont dans $L^2(I)$, $\underline{\varphi(f) \in H(I)}$

Enfin $\varphi(f)(0) = 0$ (partie I) d'où $\boxed{\varphi(f) \in K}$

$\forall f \in L^2(I)$, $\|\varphi(f)\|_2^2 + \|\varphi(f)'\|_2^2$ existe dans $\mathbb{R}$.

Or $\varphi(f) \in K \subset H(I)$. donc

$$\begin{aligned}
\|\varphi(f)\|_H^2 &= \|\varphi(f)\|_2^2 + \|\varphi(f)'\|_2^2 \\
&\leq k^2 \|f\|_2^2 + \|f - c\varphi(f)\|_2^2 \\
&\leq k^2 \|f\|_2^2 + \left(\|f\|_2 + c\,\|\varphi(f)\|_2\right)^2 \\
&\leq k^2 \|f\|_2^2 + \left[(1+ck)\,\|f\|_2\right]^2 \\
&\leq \left(k^2 + (1+ck)^2\right) \|f\|_2^2
\end{aligned}$$

Posons $A = \sqrt{k^2 + (1+ck)^2}$, d'où $\boxed{\forall f \in L^2(I) \quad \|\varphi(f)\|_H \leq A\,\|f\|_2}$

b) φ est linéaire, si $f \in \operatorname{Ker}\varphi$, $\varphi(f) = 0$. Donc $\varphi(f)' = 0$, d'où $f = \varphi(f)' + c\,\varphi(f) = 0$ et donc $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$: $\underline{\varphi \text{ injective}}$.

Soit $g \in K$, <u>analyse</u> on cherche $f \in L^2(I)$ tel que $g = \varphi(f)$ soit $g' + cg = f$ et $g(0) = 0$

synthèse : posons $f = g' + cg$. f existe car $g \in H(I)$ (11)

Ensuite f est continue sur I (g et g' le sont) par TG et $f \in L^2(I)$ (combinaison linéaire d'elt de $L^2(I)$).

Enfin $g(0) = 0$ car $g \in K$, par unicité (voir I), on a

$g = \varphi(f)$ et $\underline{\varphi \text{ surjective}}$

cl° $\boxed{\varphi \text{ isomorphisme de } L^2(I) \text{ dans } K.}$

c) φ est continue par la caractérisation des appl. linéaires continues et la V 2a) ("$K = A$")

d) $\forall g \in K$ $\|\varphi^{-1}(g)\|_2 = \|g' + cg\|_2$

$$\leq \|g'\|_2 + c\|g\|_2 \quad (g \text{ et } g' \in L^2(I))$$

$$\leq \|g\|_H + c\|g\|_H \quad (\|g\|_H^2 = \|g\|_2^2 + \|g'\|_2^2)$$

$$\leq (1+c)\|g\|_H$$

cl° $\boxed{\varphi^{-1} \text{ est } C^0 \text{ de } K \text{ dans } L^2(I)}$

__Rem.__ φ est donc un homéomorphisme

Centrale MP 2021 : épreuve 2
Un corrigé d'après le corrigé de Christophe Devulder (UPS)

I. Inégalité polynomiale de Bernstein et applications.

I.A - Polynômes de Tchebychev

1. On montre par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(T_n) = n}$.
   - C'est vrai aux rang 0 et 1.
   - Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geqslant 1$. On a alors $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ qui est somme de deux polynômes de degrés $n+1$ et $n-1$. Comme ces degrés sont différents, T_{n+1} est de degré $\max(n+1, n-1) = n+1$.

   $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ étant échelonnée en degré est libre. Elle contient $n+1$ éléments de $\mathbb{C}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$. Ainsi,
   $$\boxed{(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est une base de } \mathbb{C}_n[X]}$$
2. Procédons encore par récurrence.
   - C'est vrai aux rang 0 et 1.
   - Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geqslant 1$. On a alors
   $$T_{n+1}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)T_n(\cos(\theta) + T_{n-1}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta)$$
   Comme $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a-b) + \cos(a+b)$, le résultat au rang $n+1$ s'en déduit.
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)}$$
3. Comme $\mathcal{S}_n$ est un espace-vectoriel, il suffit de prouver le résultat pour les éléments d'une base de $\mathbb{C}_n[X]$ (et de conclure par combinaisons linéaires). Or, la question précédente prouve l'appartenance pour les éléments de la base $(T_0, \dots, T_n)$. Ainsi
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ \theta \longmapsto P(\cos(\theta)) \in \mathcal{S}_n}$$
4. Quand θ varie dans $\mathbb{R}$, $\cos(\theta)$ décrit tout $[-1,1]$. Ainsi la norme infinie de T_n sur $[-1,1]$ est celle de $\theta \longmapsto T_n(\cos(\theta))$ sur $\mathbb{R}$. Celle-ci vaut clairement 1 (puisque $|T_n(\cos(\theta))| = |\cos(n\theta)| \leqslant 1$ avec égalité si $\theta = 0$).
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \|T_n\|_{L^\infty([-1,1])} = 1}$$
5. Prouvons par récurrence sur n que
   $$\forall \theta \in \mathbb{R},\ |\sin(n\theta)| \leqslant n|\sin(\theta)|$$
   - C'est immédiat au rang 0 .
   - Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geqslant 0$. On a alors, pour tout réel θ,
   $$|\sin((n+1)\theta)| \leqslant |\sin(n\theta)\cos(\theta)| + |\sin(\theta)\cos(n\theta)| \leqslant |\sin(n\theta)| + |\sin(\theta)| \leqslant (n+1)|\sin(\theta)|$$
   et le résultat est vrai au rang $n+1$.

   Par ailleurs, en dérivant la relation $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, on obtient
   $$\forall \theta \in \mathbb{R},\ -\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = -n\sin(n\theta)$$
   En combinant ceci,
   $$\forall \theta \in \mathbb{R},\ |\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta))| \leqslant n^2|\sin(\theta)|$$
   On en déduit que si $\theta \not\equiv 0[\pi]$, $|T_n'(\cos(\theta))| \leqslant n^2$. Par continuité de $\theta \longmapsto T_n'(\cos(\theta))$, ceci reste vrai sur $\mathbb{R}$.
   La norme infinie de T_n' sur $[-1,1]$ est donc plus petite que n^2.
   En utilisant une expression précédente, on a
   $$\forall \theta \in]0, \pi/2],\ |T_n'(\cos(\theta))| = n\frac{|\sin(n\theta)|}{\sin(\theta)} \underset{\theta\to 0^+}{\sim} n\frac{n\theta}{\theta} = n^2$$
   et ainsi (continuité) $|T_n'(0)| = n^2$. On a donc
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \|T_n'\|_{L^\infty([-1,1])} = n^2}$$

I.B - Inégalité de Bernstein

6. Au vu de la formule et notamment du terme $\dfrac{B(\alpha)}{A'(\alpha)}$, on pense à une décomposition en éléments simple et plus précisément celle de $\dfrac{B}{A}$: $\quad \dfrac{B(X)}{A(X)} = E + \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{\lambda_k}{X-\alpha_k}$ avec $E = 0$ la partie entière, qui est nulle car $\mathrm{d}^o B <\mathrm{d}^o A$ et $\lambda_k = \dfrac{B(\alpha_k)}{A(\alpha_k)}$ car λ_k est un pôle simple de $\dfrac{B(X)}{A(X)}$.
Puis on multiplie par $A(X)$ (toujours dans le corps $\mathbb{C}(X)$) : On a donc

$$\boxed{\forall B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X], \quad B(X) = \sum_{k=1}^{2n} B(\alpha_k) \frac{A(X)}{(X-\alpha_k)A'(\alpha_k)}}$$

7. On a $P_\lambda(1) = 0$ et donc $\boxed{(X-1) \text{ divise } P_\lambda}$.
8. On a $(X-1)Q_\lambda(X) = P(\lambda X) - P(\lambda)$ que l'on dérive : $Q_\lambda(X) + (X-1)Q'_\lambda(X) = \lambda P'(\lambda X)$ puis on évalue en 1 :

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C}, \ Q_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda)}$$

9. Première méthode : On remarque tout d'abord que

$$R(\omega_k) = e^{2in\varphi_k} + 1 = 0$$

et ω_k est racine de R. De plus

$$\varphi_k - \varphi_\ell = (k-\ell)\frac{\pi}{n}$$

Si $k, \ell \in [\![1, 2n]\!]$, $-2n < k-\ell < 2n$ et donc $\varphi_k - \varphi_\ell \in]-2\pi, 2\pi[$ n'est nul que si $k = \ell$.
On a ainsi $2n$ racines différentes pour R unitaire de degré $2n$ et donc

$$\boxed{R(X) = \prod_{k=1}^{2n} (X-\omega_k)}$$

Deuxième méthode : On recherche une racine particulière α de $z^{2n} + 1 = 0$ avec $z^{2n} = -1 = e^{i\pi}$ soit $\alpha = e^{i\frac{\pi}{2n}}$. Les racines de R sont donc les complexes αz_k où $(z_k)_{1\leqslant k\leqslant 2n}$ sont les racines $2n$-ième de l'unité. Or $\alpha z_k = w_k$ (de l'énoncé). D'où le résultat.

10. Si on applique (I.1) avec $A = R$ et $\alpha_k = \omega_k$ (qui sont bien distincts), on obtient, compte-tenu de $R'(\omega_k) = 2n\omega_k^{2n-1} = -\dfrac{2n}{\omega_k}$ (puisque $\omega_k^{2n} = -1$)

$$B(X) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{B(\omega_k)R(X)}{X-\omega_k}\omega_k$$

Ceci est vrai pour $B \in \ \mathbb{C}_{2n-1}[X]$ et en particulier pour Q_λ. Comme les ω_k sont différents de 1, l'expression de Q_λ donne alors

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad Q_\lambda(X) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1}\frac{X^{2n}+1}{X-\omega_k}\omega_k}$$

Appliquons cette formule en $\lambda = 1$. Avec la question 8, on a alors

$$\lambda P'(\lambda) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1}\frac{2}{1-\omega_k}\omega_k$$

Il reste à couper la somme en deux pour conclure que

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k)\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} - \frac{P(\lambda)}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2}}$$

11. (I.2) avec $P = X^{2n}$ donne,

$$2n\lambda^{2n} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\lambda^{2n}\omega_k}{(1-\omega_k)^2} - \frac{\lambda^{2n}}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = -\frac{\lambda^{2n}}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2}$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = -n$$

ce qui permet, après multiplication par $P(\lambda)$ de réécrire le second terme de (I.2) et de conclure que

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k)\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} + nP(\lambda)}$$

12. Soit $f \in \mathcal{S}_n$. Il lui est associé une suite $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et une suite $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$. Avec les formules d'Euler, on a

$$\begin{aligned} f(\theta) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k - ib_k}{2}e^{ik\theta} + \frac{a_k+ib_k}{2}e^{-ik\theta}\right) \\ &= e^{-in\theta}\left(a_0e^{in\theta} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k-ib_k}{2}e^{i(k+n)\theta} + \frac{a_k+ib_k}{2}e^{i(n-k)k\theta}\right)\right) \end{aligned}$$

Si on pose

$$U(X) = a_0X^n + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k-ib_k}{2}X^{k+n} + \frac{a_k+ib_k}{2}X^{n-k}\right)$$

on obtient un élément de $\mathbb{C}_{2n}[X]$ tel que $f(\theta) = e^{-in\theta}U(e^{i\theta})$.

$$\boxed{\exists U \in \mathbb{C}_{2n}[X],\ \forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = \mathrm{e}^{-in\theta}U\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)}$$

13. On utilise Euler généralisé : $1-\omega_k = e^{i\varphi_k/2}(e^{-i\varphi_k/2} - e^{i\varphi_k/2}) = -2ie^{i\varphi_k/2}\sin(\varphi_k/2)$ et ainsi

$$\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = \frac{2e^{i\varphi_k}}{-4e^{i\varphi_k}\sin(\varphi_k/2)^2} = \frac{-1}{2\sin(\varphi_k/2)^2}$$

Appliquons la question 11 au polynôme U de la question 12. Avec l'expression ci-dessus, on obtient

$$\lambda U'(\lambda) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} U(\lambda\omega_k)\frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2} + nU(\lambda)$$

En particulier, pour $\lambda = e^{i\theta}$, on obtient (puisque $f'(\theta) = -inf(\theta) + ie^{-in\theta}e^{i\theta}U'(e^{i\theta})$)

$$\begin{aligned} -ie^{in\theta}(f'(\theta) + inf(\theta)) &= -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} U\left(e^{i(\theta+\varphi_k)}\right)\frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2} + nU(e^{i\theta}) \\ &= -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} e^{in(\theta+\varphi_k)}f(\theta+\varphi_k)\frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2} + ne^{in\theta}f(\theta) \end{aligned}$$

Comme $e^{in\varphi_k} = i(-1)^k$, on conclut que

$$-if'(\theta) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} i(-1)^k f(\theta+\varphi_k)\frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2}$$

On a montré que

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f'(\theta) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\theta + \varphi_k\right) \frac{(-1)^k}{2\sin\left(\varphi_k/2\right)^2}}$$

14. D'après la question 11 avec $P = 1$, on a

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = -n$$

et avec la question 13, on en déduit que

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2\sin\left(\varphi_k/2\right)^2} = n$$

Par inégalité triangulaire à partir de la question 13,

$$|f'(\theta)| \leqslant \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \|f\|_{L^\infty([-1,1])} \frac{1}{2\sin\left(\varphi_k/2\right)^2} = n\|f\|_{L^\infty([-1,1])}$$

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |f'(\theta)| \leqslant n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}$$

I.C - Quelques conséquences de l'inégalité (I.4)

15. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Posons $f : \theta \longmapsto P(\cos(\theta))$. La question 3 nous indique que c'est un élément de $\mathcal{S}_n$ et on peut donc lui appliquer la question 14. Mais on a

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ f'(\theta) = -\sin(\theta)P'(\cos(\theta))$$

Si $x \in [-1,1]$, on applique ceci avec $\theta = \arccos(x)$. Comme $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ (car $\sin(\theta) = \sqrt{1-\cos^2(\theta)}$ quand $\theta \in [0,\pi]$)

$$|-\sqrt{1-x^2}P'(x)| \leqslant n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant nP_{L^\infty([-1,1])}$$

Le majorant est indépendant de x et ainsi

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad \forall x \in [-1,1], \quad \left|P'(x)\sqrt{1-x^2}\right| \leqslant n\|P\|_{L^\infty((-1,1))}}$$

16. Soit $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Posons $f : \theta \longmapsto Q(\cos(\theta))\sin(\theta)$. On sait déjà que $Q(\cos(\theta)) \in \mathcal{S}_{n-1}$ et s'écrit donc comme combinaison de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ et d'une constante. Or,

$$\cos(k\theta)\sin(\theta) = \frac{1}{2}(\sin((k+1)\theta) - \sin((k-1)\theta))$$

$$\sin(k\theta)\sin(\theta) = -\frac{1}{2}(\cos((k+1)\theta) - \cos((k-1)\theta))$$

et $f(\theta)$ est donc combinaison de $\cos(j\theta)$ et $\sin(j\theta)$ pour $j \in [\![0, n]\!]$ et de $\sin(\theta)$ (pour la constante multipliée par $\sin(\theta)$). C'est donc un élément de $\mathcal{S}_n$. Comme $f'(\theta) = Q(\cos(\theta))\cos(\theta) - \sin^2(\theta)Q'(\cos(\theta))$, on a $f'(1) = Q(1)$ $(\theta = 0)$. Avec (I.4), on a donc

$$|Q(1)| \leqslant n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

Remarquons alors que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ |f(\theta)| = |Q(\cos(\theta))\sin(\theta)| = |Q(x)|\sqrt{1-x^2} \ \text{ avec } x = \cos(\theta)$$

et donc $|f(\theta)|$ est plus petit que la borne supérieure des $|Q(x)|\sqrt{1-x^2}$ pour $x \in [-1,1]$. Ainsi

$$\boxed{|Q(1)| \leqslant n \sup_{-1\leqslant x\leqslant 1} \left|Q(x)\sqrt{1-x^2}\right|}$$

17. Soit $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $t \in [-1,1]$. Considérons $S_t(X) = R(tX) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. La question précédente utilisée avec ce polynôme donne

$$|S_t(1)| = |R(t)| \leqslant n \sup_{-1\leqslant x\leqslant 1} \left|R(tx)\sqrt{1-x^2}\right|$$

Pour tout $x \in [-1,1]$, on a $1 - x^2 \leqslant 1 - t^2x^2$ et donc $\sqrt{1-x^2} \leqslant \sqrt{1-t^2x^2}$. Ainsi

$$\forall x \in [-1,1],\ \left|R(tx)\sqrt{1-x^2}\right| \leqslant \left|R(tx)\sqrt{1-(tx)^2}\right| \leqslant \sup_{-1\leqslant y\leqslant 1} |R(y)\sqrt{1-y^2}|$$

On a ainsi montré que

$$\sup_{-1\leqslant x\leqslant 1} \left|R(tx)\sqrt{1-x^2}\right| \leqslant \sup_{-1\leqslant y\leqslant 1} |R(y)\sqrt{1-y^2}|$$

et on a donc

$$\boxed{|R(t)| \leqslant n \sup_{-1\leqslant x\leqslant 1} \left|R(x)\sqrt{1-x^2}\right|}$$

18. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on peut appliquer ce qui précède à $P' \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$:

$$\forall t \in [-1,1],\ |P'(t)| \leqslant n \sup_{-1\leqslant x\leqslant 1} \left|P'(x)\sqrt{1-x^2}\right|$$

Avec la question 15, on a donc

$$\forall t \in [-1,1],\ |P'(t)| \leqslant n^2 \|P\|_{L^\infty([-1,1])}$$

et ainsi

$$\boxed{\|P'\|_{L^\infty([-1,1])} \leq n^2 \|P\|_{L^\infty([-1,1])}}$$

19. D'une part, on $\|T_n\|_{L^\infty([-1,1])} = 1$ (question 4). D'autre part, $\|T_n'\|_{L^\infty([-1,1])} = n^2$ (question 5). Ainsi,

$$\boxed{\text{L'inégalité est une égalité quand } P = T_n \in\ \mathbb{C}_n[X]}$$

II Inégalités de Bernstein et transformée de Fourier

II.A - Transformée de Fourier d'une fonction

20. On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
    - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto f(t)e^{-itx}$ est continue sur $\mathbb{R}$ par T.G.
    - Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto f(t)e^{-itx}$ est continue sur $\mathbb{R}$ par T.G.
    - On a l'hypothèse de domination : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ |f(t)e^{-itx}| \leqslant |f(t)|$ et la fonction $|f|$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$

    Ainsi, la fonction $\widehat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \widehat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})}$$

21. L'application $f \longmapsto \widehat{f}$ est linéaire (linéarité du passage à l'intégrale : $(\widehat{\lambda f + g}) = \lambda\widehat{f} + \widehat{g}$).
    Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\widehat{f}(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(t)e^{-itx}|\, dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt = \|f\|_1$$

et donc $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$ avec

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$$

Ceci montre que l'application linéaire $f \longmapsto \widehat{f}$ est continue et même 1 lipschitzienne (pour les normes proposées).

$$\boxed{f \longmapsto \widehat{f} \text{ est continue de } \big(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\big) \text{ dans } (L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)}$$

22. f étant continue, g l'est aussi. De plus, le changement de variable linéaire $u = \lambda x$ donne

$$\int_0^a |g(x)|\, dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda a} |f(u)|\, du$$

et cette quantité admet une limite finie quand $a \to +\infty$ et aussi quand $a \to -\infty$. Il y a donc intégrabilité aux voisinage des infinis et

$$\boxed{g \in L^1(\mathbb{R})}$$

On peut alors écrire $\widehat{g}(x)$ et le même changement de variable C^1-bijectif donne

$$\widehat{g}(x) = \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-ixu/\lambda}\, du$$

et ainsi

$$\boxed{\widehat{g}(x) = \frac{1}{\lambda}\widehat{f}(\frac{x}{\lambda})}$$

II.B - Produit de convolution

23. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \longmapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)g(x-t)| \leqslant |f(t)|\|g\|_\infty$$

f étant intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto f(t)g(x-t)$ l'est aussi, ce qui assure la définition de $f * g$ sur $\mathbb{R}$.
Le changement de variable C^1 bijectif $u = x - t$ donne immédiatement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)\, du = (g*f)(x)}$$

24. L'inégalité de la question précédente entraine que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |(f*g)(x)| \leqslant \|g\|_\infty \|f\|_1$$

et ainsi

$$\boxed{f*g \text{ est bornée et } \|f*g\|_\infty \leqslant \|f\|_1\|g\|_\infty}$$

25. On utilise le théorème C^k des intégrales à paramètres. Posons $h(x,t) = f(t)g(x-t)$
• $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par T.G.

• $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|f(t)g(x-t)| \leqslant \|g\|_\infty |f(t)|$ et ce majorant est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $t \longmapsto h(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

• $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto h(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ par T.G. de dérivée p-ième $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) = f(t)g^{(p)}(x-t)$

• $\forall t \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(t)g^{(p)}(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par T.G.

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(t)g^{(p)}(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par T.G.

• **(H.D.)** $\forall x, t \in \mathbb{R}$, $\forall p \in [\![1, k]\!]$, $\left|f(t)g^{(p)}(x-t)\right| \leqslant \|g^{(p)}\|_\infty |f(t)|$ et ce majorant est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(cette majoration permet d'assurer que $t \longmapsto \dfrac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour $p \in [\![1, k-1]\!]$ et qu'on a la **(H.D.)** pour $t \longmapsto \dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)$.
Le théorème C^k s'applique et donne que

$$\boxed{f * g \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ avec } (f*g)^{(k)} = f * \left(g^{(k)}\right)}$$

26. Par définition

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(x) e^{-ix\xi}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(t) g(x-t)\, dt \right) dx$$

Avec le résultat admis,

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(t) g(x-t)\, dx \right) dt$$

On effectue le CDV C^1 bijectif : $u = x - t$ dans l'intégrale intérieure :

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(u+t)\xi} f(t) g(u)\, du \right) dt$$

et on peut "faire sortir" de l'intégrale les termes indépendants de la variable u

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(t) e^{-it\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\xi} g(u)\, du \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-it\xi} \widehat{g}(\xi)\, dt$$

Là encore $\widehat{g}(\xi)$ peut sortir de l'intégrale et on obtient $\widehat{f}(\xi) \times \widehat{g}(\xi)$.

$$\boxed{\widehat{f*g} = \widehat{f}\, \widehat{g}}$$

II. C - Introduction d'une fonction plateau

27. φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ par théorèmes d'opération. On prouve par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists P_k \in \mathbb{R}[X],\ \forall t > 0,\ \varphi^{(k)}(t) = P_k(1/t) e^{-1/t}$$

- C'est vrai au rang 0 avec $P_0 = 1$.
- Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $k \geqslant 0$. On peut alors redériver et obtenir

$$\forall t > 0,\ \varphi^{(k)}(t) = \left(-\frac{1}{t^2} P_k'(1/t) + \frac{1}{t^2} P_k(1/t) \right) e^{-1/t}$$

  $P_{k+1} = X^2(-P_k' + P_k)$ est un polynôme convenable au rang $k+1$.

φ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{-*}$ à dérivée nulle. Par le théorème de limite de la dérivée (TLD), il suffit de montrer que toutes les dérivées ont une limite finie à droite et gauche en 0 et que ces limites sont égales pour conclure que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. C'est le cas avec une limite nulle (évident à gauche et croissances comparées à droite).

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$$

28. On vérifie que

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \psi(t) = \varphi(1-t^2)}$$

En effet, si $|t| \geqslant 1$, $1-t^2 \leqslant 0$ et $\varphi(1-t^2) = 0 = \psi(t)$ et si $|t| < 1$, $1-t^2 > 0$ et $\varphi(1-t^2) = e^{1/(t^2-1)} = \psi(t)$. Par théorèmes généraux,

$$\boxed{\psi \in \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$$

29. $\boxed{\theta \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$ comme primitive d'une telle fonction. De plus θ' est nulle sur chaque intervalle $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$ et donc θ est constante sur chacun de ces intervalles.

$$\boxed{\theta \text{ est constante sur }]-\infty,-1] \text{ et sur } [1,+\infty[}$$

Par théorème fondamental,

$$\theta(x) = \int_0^x \psi(t)\ dt$$

et les constantes sont

$$A = -\int_{-1}^{0} e^{\dfrac{1}{t^2-1}}\ dt \quad \text{et} \quad B = \int_0^1 e^{\dfrac{1}{t^2-1}}\ dt$$

Dans les deux cas, on intègre une fonction continue positive non nulle et les intégrales sont > 0. Ainsi

$$\boxed{A < 0 < B \text{ et par parité } A = -B}$$

et les constantes sont en particulier différentes.

30. **<u>Question vraiment difficile, il fallait faire beaucoup de dessins : d'ailleurs ceux qui en en fait on eut des points (voir rapport de jury)</u>**

On utilise θ pour construire de manière C^∞ une fonction h_1 qui est vaut 0 si $t < -1$ et vaut 1 si $t > 1$.
Puis à l'aide de h_1, on construit ensuite une fonction H_1 qui vaut 0 si $t < -2$ et vaut 1 si $t > -1$.
On fait de même avec h_2 pour obtenir une fonction H_2 qui vaut 0 si $t > 2$ et vaut 1 si $t < 1$.
La fonction $\rho = H_1 H_2$ convient alors.
Notons $h_1 = \dfrac{\psi - A}{B - A}$: c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, -1]$ et valant 1 sur $[1, +\infty[$.
$H_1(t) = h_1(2t+3)$ vaut 0 si $t \leqslant -2$ et vaut 1 si $t \geqslant -1$.

Notons $h_2 = \dfrac{\psi - B}{A - B}$: c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, nulle sur $[1, +\infty[$ et qui vaut 1 sur $]-\infty, -1]$.
$H_2(t) = h_2(2t-3)$ vaut 0 si $t \geqslant 2$ et vaut 1 si $t \leqslant 1$.

La fonction $\rho = H_1 H_2$ est nulle hors de $]-2, 2[$ et vaut 1 sur $[-1, 1]$.

$$\boxed{\text{Il existe } \rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \text{ constante égale à 1 sur } [-1,1] \text{ et constante égale à 0 sur } \mathbb{R}\backslash[-2,2]}$$

II.D - Inégalités de Bernstein

31. On remarque tout d'abord que

$$r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{+2} e^{ix\xi} \rho(\xi)\ d\xi$$

On utilise le théorème de régularité des intégrales à paramètres avec $I = [-2, 2]$.

- Pour tout x, $\xi \longmapsto e^{ix\xi}\rho(\xi)$ est continue sur le segment I et donc intégrable sur ce segment.
- Pour tout $\xi \in [-2, 2]$, $x \longmapsto e^{ix\xi}\rho(\xi)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \longmapsto i\xi e^{ix\xi}\rho(\xi)$.
- Pour tout x, $\xi \longmapsto i\xi e^{ix\xi}\rho(\xi)$ est continue sur I.
- On a enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\xi \in [-2, 2]$, $|i\xi e^{ix\xi}\rho(\xi)| \leqslant 2\|\rho\|_{\infty,[-2,2]} = \varphi(\xi)$ qui est intégrable sur le segment $[-2, 2]$.

$$\boxed{r \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \text{ et } r'(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{ix\xi} \rho(\xi)\ d\xi}$$

32. Utilisons à nouveau l'expression ci-dessus de r. Par intégrations par parties (sur un segment) et comme ρ et toutes ses dérivées sont nulles en 2 et -2, on trouve

$$2\pi x^2 r(x) = i \int_{-2}^{+2} x e^{ix\xi} \rho'(\xi)\ d\xi = -\int_{-2}^{+2} e^{ix\xi} \rho''(\xi)\ d\xi$$

et ainsi

$$|x^2 r(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} 4 \|\rho''\|_{L^\infty([-2,2])}$$

$$\boxed{x \longmapsto x^2 r(x) \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$$

r est continue sur $\mathbb{R}$ et les seuls problèmes d'intégrabilité sont au voisinage des infinis. En notant M un majorant de $x^2r(x)$, on a $|r(x)| \leqslant M/x^2$ qui prouve cette intégrabilité par comparaison aux fonctions de Riemann.

$$\boxed{r \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$$

Enfin, on a $|r(x)| \leqslant \dfrac{2}{\pi}\|\rho\|_{L^\infty([-2,2])}$ et

$$\boxed{r \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$$

33. Commençons par le cas $\lambda = 1$. Les fonctions f et r vérifient les hypothèses de la question 26 et on a donc $\widehat{f * r} = \widehat{f}\widehat{r}$.
Par ailleurs, le second résultat d'inversion de Fourier donne $\rho = \widehat{r}$ et $\widehat{r}$ est donc égale à 1 sur $[-1, 1]$.
Ainsi, $\widehat{f}\widehat{r}$ est égale à $\widehat{f}$ sur $[-1, 1]$ mais cela est aussi vrai ailleurs (où il y a nullité).
On a donc $\widehat{f * r} = \widehat{f}\widehat{r} = \widehat{f}$ et donc $f * r = f$ par formule d'inversion de Fourier.

Pour un $\lambda > 0$ quelconque, on remarque que (changement de variable C^1-bijectif $u = \lambda t$)

$$f * r_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)r(\lambda t)\, dt = \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \frac{u}{\lambda})r(u)\, du = \frac{1}{\lambda}(f_{1/\lambda} * r)(\lambda x)$$

Or, $\widehat{f_{1/\lambda}}(x) = \lambda\widehat{f}(\lambda x)$ est nulle en dehors du segment $[-1, 1]$, intégrable sur $\mathbb{R}$ et $f_{1/\lambda} \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
On peut donc, avec le premier cas, affirmer que $f_{1/\lambda} * r = f_{1/\lambda}$. Ainsi

$$f * r_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}f_{1/\lambda}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}f(x)$$

$$\boxed{f = \lambda f * r_\lambda}$$

34. La question 25 donne alors en dérivant (r et sa dérivée sont bornées) $f' = \lambda f * (r_\lambda)'$ et la question 24 indique que

$$\|f'\|_\infty \leqslant \lambda\|f\|_\infty\|(r_\lambda)'\|_1$$

Il suffit alors de remarquer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(r_\lambda)'(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda r'(\lambda x)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |r'(u)|\, du$$

pour conclure que

$$\boxed{\|f'\|_\infty \leqslant \lambda\|f\|_\infty\|r'\|_1}$$