

Corrigé DS 8

Exercice : voir corrigé

DS8* (après ce corrigé)

PROBLEME

3°) $u_n(x) \sim \frac{-x^2}{n^2} \leq 0$, par TC, $(\sum u_n(x))$ converge par tout $x \in [0, 1[$ (ds ce cas $1 - \frac{x^2}{n} > 1 - \frac{1}{n} > 0$ et donc u_n existe)

¶ $(\sum u_n)$ converge simplement sur $[0, 1[$

$$\forall x \in [0, a] \quad u'_n(x) = \frac{-2x}{n^2 - x^2} \quad \text{donc } |u'_n(x)| = \frac{2x}{n^2 - x^2} \leq \underbrace{\frac{2a}{n^2 - a^2}}_{= a_n}$$

comme $a_n \sim \frac{1}{n^2} > 0$, par TC, $(\sum a_n)$ cvg d'où

$(\sum u'_n)$ converge normalement sur $[0, 1]$

③

Le th. de dérivation $(u_n \in C^1, (\sum u_n) \text{ c.s.}, (\sum u'_n) \text{ c.n.} / [0, 1])$ dit:

$$F: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \in C^1 \text{ sur } [0, 1[\text{ et } F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2x}{n^2 - x^2}$$

Grâce au 2), $\forall x \in]0, 1[\quad F'(x) = \frac{\pi \cot(\pi x)}{x - \pi x} - \frac{1}{x}$

on en déduit donc qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in]0, 1[\quad F(x) = \ln(\sin(\pi x)) - \ln x + C$$

qd $x \xrightarrow{+} 0$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin(\pi x)}{x} + C = \ln \pi + C = F(0) = 0$

d $\forall x \in]0, 1[\quad F(x) = \ln \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right) \text{ et } F(0) = 0$

41) Tout d'abord $s_n(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ par récurrence et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad s_n(x) = \left[\prod_{p=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{p^2} \right) \right] \times x$

$\forall x \in \mathbb{R}$, fixé $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \quad \left| \frac{x^2}{n^2} \right| = \frac{x^2}{n^2} < 1$

on peut donc passer au log: $\forall n \geq n_0$

$$\ln \prod_{p=n_0}^n \left(1 - \frac{n^2}{p^2}\right) = \sum_{p=n_0}^n \ln \left(1 - \frac{n^2}{p^2}\right) \quad \text{ceci est la}$$

somme partielle de la série $\left(\sum \ln \left(1 - \frac{n^2}{p^2}\right)\right)_{n \geq n_0}$ qui

est convergente car $\ln \left(1 - \frac{n^2}{p^2}\right) \sim \frac{-n^2}{p^2} \leq 0$ et T.C

d'où on note $L(n) = \sum_{p=n_0}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{n^2}{p^2}\right)$, on a alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(n) = n \times \prod_{p=1}^{n_0-1} \left(1 - \frac{n^2}{p^2}\right) \times e^{L(n)} \in \mathbb{R}$$

d (s_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.

↓ récurrence: voir à la fin du corrigé évident par récurrence.

$$4.2) \forall n \in \mathbb{N} \quad s_n(n) = n \prod_{p=1}^n \left(1 - \frac{n^2}{p^2}\right) = n \prod_{p=1}^n \frac{(p-n)(p+n)}{p^2}$$

$$\forall n \in \mathbb{R} \setminus \underline{n \neq 0} : s_n(n+1) = (n+1) \prod_{p=1}^n \left(1 - \frac{(n+1)^2}{p^2}\right)$$

$$= (n+1) \prod_{p=1}^n \frac{p^2 - (n+1)^2}{p^2} = (n+1) \prod_{p=1}^n \frac{(p+n+1)(p-n-1)}{p^2}$$

$$= (n+1) \prod_{p=1}^n \frac{1}{p^2} \prod_{p=2}^{n+1} (p+n) \times \prod_{p=0}^{n-1} (p-n)$$

$\nwarrow \text{cdv } p=p+1 \quad \nearrow \text{cdv } p=p-1$

$$= \prod_{p=1}^n \frac{1}{p^2} \prod_{p=1}^{n+1} (p+n) \times \prod_{p=1}^{n-1} (p-n) \times (-n) \quad (5)$$

$$= \underbrace{\prod_{p=1}^n \frac{1}{p^2}}_{\delta_n(n)} \times (n+n+1) \times \underbrace{\prod_{p=1}^n (p+n) \times \prod_{p=1}^{n-1} (p-n)}_{\frac{n+n+1}{n-n}} \times \underbrace{1 \times (-n)}_{\delta_n(n)}$$

$$= \delta_n(n) \times \frac{n+n+1}{n-n}$$

d

$$\forall n \neq n : \delta_n(n+1) = \frac{n+n+1}{n-n} \delta_n(n)$$

on pourrait avoir le même par récurrence

D'où :

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n_0 = E(x) + 1 \setminus \forall n \geq n_0 : x \neq n$ et donc :

$$\forall n \geq n_0 : \delta_n(n+1) = \frac{n+n+1}{-n+n} \delta_n(x) \sim -\delta_n(x)$$

Passons à la limite qd $n \rightarrow +\infty, (x \text{ fixé})$: il vient,

par cvg simple de (δ_n) vers δ sur $\mathbb{R}$: $\delta(n+1) = -\delta(n)$

14.3. On a si $x \in]0, 1[: \forall n \in \mathbb{N}^* 1 - \frac{x^2}{n^2} > 0$ d'où :

$$\ln \delta_n(x) = \ln x + \sum_{p=1}^n \ln \left(1 - \frac{x^2}{p^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln x + \ln \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right) \quad \text{d'après I.3.}$$

Par critère séquentiel : $\ln \delta(x) = \ln \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi} \right)$ donc $\delta(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$

Comme $\delta_n(0) = 0, \delta(0) = 0$ d'où $\forall x \in [0, 1[: \delta(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$

$\forall x_0 \in \mathbb{R} \exists ! n = E(x_0) \in \mathbb{Z} \setminus 0 \leq x_0 - n < 1$

or $\delta(n+2) = -\delta(n+1) = (-1)^2 \delta(n)$ et par récurrence: ⑥

$$\forall h \in \mathbb{N} \quad \delta(n+h) = (-1)^h \delta(n), \text{ Puis } \delta(n-h) = \frac{1}{(-1)^h} \delta(n-h+h)$$

$$\text{donc } \forall h \in \mathbb{Z} : \delta(n+h) = (-1)^h \delta(n)$$

$$\text{csg } \delta(x_0 - n) = (-1)^n \delta(x_0) \text{ donc } \delta(x_0) = (-1)^n \delta(x_0 - n)$$

$$\text{or } \hat{=} x_0 - n \in [0, 1[\text{ pour } n : \delta(x_0) = (-1)^n \frac{\delta \ln \pi (x_0 - n)}{\pi}$$

$$\underline{d} \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \delta(x) = \frac{\delta \ln \pi x}{\pi}}$$

II

$$\begin{aligned} \text{II 1.1} \quad \int_n(-p) &= \frac{n^p}{(n-1)!} (-p)(-p+1) \dots (-p+n-1) \\ &= \frac{n^p}{(n-1)!} (-1)^n p(p-1) \dots (p-n+1) \end{aligned}$$

$$\text{donc si } p \in [0, n-1] \quad p(p-1) \dots (p-(n-1)) = 0 \quad d'au$$

$$\forall n \geq p+1, p \leq n-1 \text{ donc } \int_n(-p) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad d. \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n(-p) = 0}$$

II 1.2 Soit $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_n(x) \neq 0$ et

$$\frac{\int_{n+1}(x)}{\int_n(x)} = \frac{(n+1)^{-x}}{n!} \times \frac{(n-1)!}{n^{-x}} (x+n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x} \frac{n+x}{n}$$

ce quotient est strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}^* \mid n+x > 0$

Posons $\forall n \geq \underbrace{\max(1, -x)}_{=N_x}$: $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x} \cdot \frac{n+x}{n} > 0$.

et posons $v_n = \ln u_n = -x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$

$$= -x \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et } \frac{1}{n^2} > 0 \quad \text{et } \left(\sum \frac{1}{n^2}\right) \text{ converge.}$$

Par TC, la série $(\sum v_n)$ converge. Posons $l = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

On a $S_n = \sum_{p=1}^n v_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$. On $S_n = \sum_{p=1}^n \ln u_p = \ln \prod_{p=1}^n u_p$

d'où $S_n = \ln \prod_{p=1}^n \frac{f_{p+1}(n)}{f_p(n)}$ soit $\prod_{p=1}^n \frac{f_{p+1}(n)}{f_p(n)} = e^{S_n}$.

On en déduit que $\frac{f_{n+1}(n)}{f_1(n)} = e^{S_n}$ (produit télescopique)

D'où $f_n(n) = f_1(n) e^{S_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_1(n) e^l \in \mathbb{R}^*$

d. $\boxed{(f_n(n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente vers un réel non nul}}$

II.2 $\forall x \in \mathbb{R} : x f_n(x+1) = \frac{n^{-x-1}}{(n-1)!} x(x+1) \cdots (x+n)$

ou : $f_n(x+1) = \frac{1}{n} \frac{x+n}{x} f_n(x) = \frac{n^{-x-1}}{(n-1)!} f_{n+1}(x) \times \frac{n!}{(n+1)^{-x}}$

et puis $n \rightarrow \infty$: idem $= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-x} f_{n+1}(x)$

Tout converge d'où qd $n \rightarrow +\infty$, il vient $\boxed{x f(x+1) = 1^{-x} f(x) = f(x)}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n(1) = \frac{n^{-1}}{(n-1)!} \cdot 1 \times 2 \times \dots \times n = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad (8)$$

Donc $\boxed{f(1) = 1}$

Avec la relation fonctionnelle ; $f(1) = 1 \times f(2)$ soit $f(2) = 1$

d'où $f(3) = \frac{f(2)}{2} = \frac{1}{2}$, $f(4) = \frac{f(3)}{3} = \frac{1}{3!}$

Supposons que $f(n) = \frac{1}{(n-1)!}$ ($n \geq 1$) . $f(n+1) = \frac{f(n)}{n} = \frac{1}{n!}$

Comme $f(1) = 1 = \frac{1}{0!}$ on conclut par récurrence : $\boxed{f(n) = \frac{1}{(n-1)!}}$

II 3. Si $x \in \mathbb{Z}$ alors on a soit $x \leq 0$ et donc $f(x) = 0$

(d'après II 1.1) soit $x \geq 1$ et donc $1-x \leq 0$ d'où $f(1-x) = 0$

Comme $\sin \pi x = 0$ (si $x \in \mathbb{Z}$) on a l'égalité demandée lorsque $x \in \mathbb{Z}$.

Soit maintenant $x \notin \mathbb{Z}$, d'après la relation qui définit f_n et la relation trouvée au II 1.2, on a :

a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$$x_{n+1} = \frac{f_{n+1}(x) f_{n+1}(1-x)}{f_{n+1}(x)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right) f_n(x) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-(1-x)} \left(1 + \frac{1-x}{n}\right) f_n(1-x)}{\left(1 - \frac{x^2}{(n+1)^2}\right) f_n(x)}$$

$$\text{d'où } r_{n+1} = r_n \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \frac{\left(1 + \frac{n}{n}\right)\left(1 + \frac{1-n}{n}\right)}{1 - \frac{n^2}{(n+1)^2}}$$

(9)

$$= r_n \times \frac{(n+n)(n+1)}{n(n+n+1)}$$

$$\text{et donc } r_n = \frac{n}{n-1} \times \frac{n-1}{n+n} \times \frac{n-1}{n-2} \times \frac{n+n-2}{n+n-1} \times \dots \times \frac{2}{1} \times \frac{n+1}{n+2} \times r_1$$

$$= \frac{n}{n+n} \times (n+1) \times r_1, \text{ et } r_1 = \frac{1-n}{1-n^2} = \frac{1}{1+n}$$

$$\text{CSq } \forall n \in \mathbb{N}^* : r_n = \frac{n}{n+n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \text{ et comme par}$$

$$\text{TG, } r_n \rightarrow \frac{f(n)f(1-n)}{\Delta(n)} \text{ on conclut : } \boxed{\forall n \in \mathbb{R} \quad f(n)f(1-n) = \frac{\sin \pi x}{x}}$$

Remarque : on pourrait aussi trouver r_n directement avec l'expression de $\Delta(n)$ trouvée au I k. 2 (page 9)

II 4.1 Si $pn \in \mathbb{Z}^-$, $f(pn) = 0$. D'autre part $\exists k_0 \in \mathbb{N} \setminus$

$pn = -k_0$. La division de k_0 par p donne $k_0 = pq + r$

$$\text{avec } r \in [0, p-1] \text{ d'où } x + \frac{k}{p} = \frac{-pq - r + k}{p} = -q + \frac{k-r}{p}$$

$$\text{et par } k_1 = r \uparrow \text{ on a } x + \frac{k_1}{p} = -q \in \mathbb{Z}^- \text{ d'où } f\left(x + \frac{k_1}{p}\right) = 0$$

$$\underline{\text{cl}} \quad \boxed{\text{l'égalité est vraie par } x \in \mathbb{Z}^-}$$

$\uparrow$ car f nulle
sur $\mathbb{Z}^-$

$$\text{III 4.2} * p^{pn-1} \int_{pn} (px) = p^{pn-1} \frac{(pn)^{-px}}{(pn-1)!} \prod_{k=0}^{pn-1} (px+k)$$

$$= \frac{1}{p} \frac{n^{-px}}{(pn-1)!} p^{pn} \prod_{k=0}^{pn-1} \left(x + \frac{k}{p}\right)$$

$$* \prod_{k=0}^{p-1} \int_n \left(x + \frac{k}{p}\right) = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{n^{-x-k/p}}{(n-1)!} \prod_{i=0}^{n-1} \left(x + \frac{k}{p} + i\right)$$

$$= \frac{n^{-px}}{((n-1)!)^p} \prod_{k=0}^{p-1} n^{-k/p} \prod_{k=0}^{p-1} \prod_{i=0}^{n-1} \underbrace{\left(x + \frac{k}{p} + i\right)}_{= x + \frac{k+pi}{p}}$$

Considérons $\varphi: \llbracket 0, p-1 \rrbracket \times \llbracket 0, n-1 \rrbracket \longrightarrow \llbracket 0, pn-1 \rrbracket$

$$(k, i) \longmapsto k + pi$$

$\rightarrow \varphi$ bien définie car $0 \leq k + pi \leq p-1 + p(n-1) = pn-1$

$\rightarrow \varphi$ est bijective car $\forall N \in \llbracket 0, pn-1 \rrbracket \exists ! (k, i) \in \mathbb{N}^2 \setminus$

$N = k + pi$ et $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ et si $i \geq n$ alors $N \geq pn$:

Absurde, car $\exists ! (k, i) \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \times \llbracket 0, n-1 \rrbracket \setminus N = \varphi(k, i)$

Où on déduit donc que $\prod_{k=0}^{pn-1} \left(x + \frac{k}{p}\right) = \prod_{k=0}^{p-1} \prod_{i=0}^{n-1} \left(x + \frac{k}{p} + i\right)$

et donc

$$\frac{p^{pn-1} \int_{pn} (px)}{\prod_{k=0}^{p-1} \int_n \left(x + \frac{k}{p}\right)} = \frac{(n-1)!^p \times p^{pn}}{p (pn-1)! \prod_{k=0}^{p-1} n^{-k/p}} ; \text{indépendant de } n$$

par TG, $\frac{p^{pn-1} f_{p_n}(pn)}{\prod_{k=0}^{p-1} f_n(n + \frac{k}{p})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{p^{pn-1} f(pn)}{\prod_{k=0}^{p-1} f(n + \frac{k}{p})}$ (11)

Notons A_p cette limite. Comme $A_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^p p^{pn}}{p!(pn-1)! \prod_{k=0}^{p-1} n^{-k/p}}$,
on a :

$$A_p \text{ indépendant de } n \text{ et } A_p \geq 0$$

II.4.3. $f(\frac{p}{p}) = f(1) = 1 = A_p p^{-1+1} \prod_{k=0}^{p-1} f(-\frac{1}{p} + \frac{k}{p}) = A_p \prod_{k=0}^{p-1} f(\frac{k+1}{p})$
 $= A_p \prod_{k=1}^p f(\frac{k}{p})$ or $f(\frac{p}{p}) = f(1) = 1$ donc :

$$1 = A_p \prod_{k=1}^{p-1} f(\frac{k}{p})$$

D'autre part en effectuant le c.d.V : $i = p - k$ dans le produit,
il vient $1 = A_p \prod_{i=p-1}^1 f(\frac{p-i}{p})$ d'où

$$1 = A_p \prod_{i=1}^{p-1} f(1 - \frac{i}{p})$$

Effectuons le produit de ces 2 égalités :

$$1^2 = A_p^2 \prod_{k=1}^{p-1} f(\frac{k}{p}) f(1 - \frac{k}{p}) = A_p^2 \prod_{k=1}^{p-1} \frac{\sin(\frac{k\pi}{p})}{\pi} \quad \text{d'après II.3}$$

$$\text{d.} \quad A_p^2 = \frac{\pi^{p-1}}{\prod_{k=1}^{p-1} \sin(\frac{k\pi}{p})}$$

II.4.4 classique! $x^p - 1 = (x-1)(x^{p-1} + \dots + x + 1) = \prod_{k=0}^{p-1} (x - \omega_k)$
avec $\omega_k = e^{2ik\pi/p}$

$$d'au \quad (n^{p-1} + \dots + n + 1)^2 = \prod_{k=1}^{p-1} (n - w_k) \times \prod_{k=1}^{p-1} (n - \bar{w}_k) \quad (12)$$

effectivement dans le 2^{ème} produit, le Cdv : $k' = p - k$, on a

$$\prod_{k=1}^{p-1} (n - w_k) = \prod_{k'=1}^{p-1} (n - w_{p-k'}) \quad \text{Or } w_{p-k'} w_{k'} = 1 = w_{k'} \bar{w}_{k'}$$

$$d'au \quad \prod_{k=1}^{p-1} (n - w_k) = \prod_{k'=1}^{p-1} (n - \bar{w}_{k'}) \quad \text{On en déduit :}$$

$$(x^{p-1} + \dots + 1)^2 = \prod_{k=1}^{p-1} (x - w_k) (x - \bar{w}_k) = \prod_{k=1}^{p-1} (x^2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{p} x + 1)$$

Par $x=1$, on obtient $p^2 = \prod_{k=1}^{p-1} (2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{p}) = 2^{p-1} \prod_{k=1}^{p-1} (1 - \cos \frac{2k\pi}{p})$

Or $1 - \cos 2\theta = 1 - (1 - 2 \sin^2 \theta) = 2 \sin^2 \theta$ donc

$$p^2 = 2^{p-1} \prod_{k=1}^{p-1} 2 \sin^2 \frac{k\pi}{p} = 2^{2(p-1)} \left[\prod_{k=1}^{p-1} \sin \frac{k\pi}{p} \right]^2$$

Comme $0 < \frac{k\pi}{p} \leq \frac{p-1}{p} \pi < \pi$, $\sin \frac{k\pi}{p} > 0 \quad \forall k \in [1, p-1]$

$$d'au \quad \prod_{k=1}^{p-1} \sin \frac{k\pi}{p} = \frac{p}{2^{p-1}} \quad \text{et} \quad A_p = \sqrt{\frac{(2\pi)^{p-1}}{p}} \quad (\text{car } A_p \geq 0)$$

III.1 Fait en cours $\mathbb{D} =]0, +\infty[$

III.2.1 Existence de $g_n(x)$:

$$p > 0 \quad (1-x)^n x^{n-1} \sim \frac{1}{x^{1-n}}$$

comme $n > 0$, $1-x < 1$ et donc

$$u \mapsto (1-u)^n u^{n-1} \text{ int. }]0, 1]$$

Effectuons une Ipp: $\forall a > 0$;

(13)

$$\int_a^1 \underbrace{(1-u)^n}_g \underbrace{u^{n-1}}_{g'} du = \underbrace{\left[(1-u)^n \frac{u^n}{n} \right]_a^1}_{a \xrightarrow{0} 0} - \int_a^1 \underbrace{(1-u)^{n-1} \frac{u^n}{n}}_{\text{int. } [J_0, 1]} du$$

quand $a \xrightarrow{0}$, il vient: $\boxed{g_n(x) = \frac{n}{x} g_{n-1}(x+1)}$ $\forall n \geq 1$
 $\forall n > 0$

On en déduit que $g_n(x) = \frac{n}{x} \times \frac{n-1}{n+1} \times g_{n-2}(x+2)$ et par récurrence:
 $g_n(x) = \frac{n}{x} \times \frac{n-1}{n+1} \times \frac{n-2}{n+2} \times \dots \times \frac{1}{x+n-1} \times g_0(x+n)$

On $g_0(x) = \int_0^1 u^{x-1} du = \frac{1}{x}$, d'où: $\boxed{g_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}}$

Effectuons le Cdv C'-bijection $u = \frac{t}{n}$ dans $G_n(x)$:

$$G_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n du = n^{x-1} g_n(x)$$

d'où $\boxed{\forall n > 0 \quad G_n(x) = \frac{n}{(n+x)g_n(x)}}$

III 2.2) on a $e^{-t} \geq (1-\frac{t}{n})^n \iff -t \geq n \ln(1-\frac{t}{n}) \iff \ln(1-\frac{t}{n}) \leq -\frac{t}{n}$ si $t \in [0, n[$

Posons $\varphi(u) = \ln(1-u) + u$, $\varphi'(u) = \frac{-1}{1-u} + 1 = \frac{-u}{1-u}$ d'où

$\begin{array}{c|c} u & 0 & 1 \\ \hline \varphi & 0 & \end{array}$ donc $\forall u \in [0, 1[\quad \ln(1-u) \leq -u$

Pour $t \in [0, n[$: $\frac{t}{n} \in [0, 1[$ d'où $\ln(1-\frac{t}{n}) \leq -\frac{t}{n}$

admet $e^{-t} \geq (1 - \frac{t}{n})^n$, par $t=n$ $e^{-n} \geq 0$

(14)

d1 $\boxed{\forall t \in [0, n] \quad e^{-t} \geq (1 - \frac{t}{n})^n}$

On fait de m $e^t \geq (1 + \frac{t}{n})^n \Leftrightarrow t \geq n \ln(1 + \frac{t}{n}) \Leftrightarrow \ln(1 + \frac{t}{n}) \leq \frac{t}{n}$

On par concavité $\forall u \geq 0 \quad \ln(1+u) \leq u$



d2 $\boxed{\forall t \in [0, n] \quad e^t \geq (1 + \frac{t}{n})^n}$

On a d'admet $0 \leq e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n = e^{-t} \left[1 - e^{\frac{t}{n}} (1 - \frac{t}{n})^n \right]$
 $\leq e^{-t} \left[1 - (1 + \frac{t}{n})^n (1 - \frac{t}{n})^n \right]$

d. $\boxed{0 \leq e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n \leq e^{-t} \left[1 - (1 - \frac{t^2}{n^2})^n \right]} \quad \forall t \in [0, n]$

III 2.3) $n=1$: oui !, si c'est vrai par n , alors :

$(1-a)^{n+1} = (1-a)^n (1-a) \geq (1-na)(1-a) \geq 1 - (n+1)a + na^2$
 $\geq 1 - (n+1)a$

d $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall a \in [0, 1] \quad (1-a)^n \geq 1 - na}$

On a donc $(1 - \frac{t^2}{n^2})^n \geq 1 - \frac{t^2}{n}$ d'où $1 - (1 - \frac{t^2}{n^2})^n \leq \frac{t^2}{n}$

d. $\boxed{0 \leq e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}}$

III 2.4) On a donc $0 \leq \int_0^n e^{-t} t^{n-1} dt - G_n(x) \leq \int_0^n \frac{t^2 e^{-t}}{n} t^{n-1} dt$

Par caractérisation fondamentale : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-t} t^{n-1} dt = \Gamma(n)$

et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{t^2 e^{-t}}{n} t^{n-1} dt = \frac{\Gamma(n+2)}{\infty} = 0$. Par

H. d'encadrement on conclut : $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x) = \Gamma(x)$

Comme $f_n(x) = \frac{n+x}{n} \times \frac{1}{G_n(n)}$ (d'après le III.2.1) on

en déduit que $\forall n > 0 : f(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}$

III.3) Comme Γ est C^∞ sur $\mathbb{D} =]0, +\infty[$, par TG, f C^∞ sur $\mathbb{D} =]0, +\infty[$. Grâce à la formule de II.2. on a :

$\forall x > -1$ $f(x) = x f(x+1)$; d'où par composition et produit (TG!) f C^∞ sur $]-1, +\infty[$ et par récurrence f est C^∞ sur $]-n, +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

d. $\boxed{f \text{ } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$

A

1) Ψ est C^0/I par TC

* en 0 : $\Psi(u) \sim \frac{1}{u^{1/2}} \geq 0$ et $u \mapsto \frac{1}{u^{1/2}}$ intégrable $/]0,1]$

par T.C., Ψ intégrable $/]0,1]$

* en $+\infty$ $\Psi(u) \sim 0/e^{-u}$ $u \mapsto e^{-u} \geq 0$ int $/ [1, +\infty[$

d'o Ψ intégrable $/ I$

2) posons $f(u) = \frac{e^{-u}}{\Gamma_n(u+n)}$

si $n < 0$, $-n \in I$ et $f(u) \sim \frac{e^{-u}}{\Gamma_n(u+n)} \frac{1}{-n} \geq 0$ et

est intégrable $/]-n, -n+1]$, comme $f \geq 0$ sur $]-n, -n+1]$,

$F(n)$ n'existe pas

si $n = 0$ $f(u) \sim \frac{1}{u^{1/2}} \geq 0$ et est int $/]0,1]$

donc $F(0)$ n'existe pas

si $n > 0$, $f \in C^0/I$ par TC et $0 \leq f(u) \leq \frac{1}{n} \Psi(u)$

par TC, f int $/ I$

d

$$\mathcal{D}_F =]0, +\infty[$$

②

3) Posons $g(x, u) = \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(x+u)}$ définie sur $\mathbb{I}^2$

Par TS, $g(x, \cdot) \in C^0/\mathbb{I}$ et intégrable / $\mathbb{I}$ (int h 2'))

$$g(\cdot, u) \in C^1/\mathbb{I} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial x}(x, u) = \frac{-e^{-u}}{\sqrt{u}(x+u)^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, \cdot) \in C^0/\mathbb{I}$$

$$\forall x \in [a, b] \subset \mathbb{I}, \forall u \in \mathbb{I} : \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, u) \right| \leq \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(x+u)^2} = \varphi(u)$$

$$\varphi \in C^0/\mathbb{I}, \varphi(u) \underset{0}{\sim} \frac{e^{-u}}{u^2 \sqrt{u}} \text{ et } \varphi(u) = o\left(e^{-u}\right)_{+\infty}$$

donc (idem 2')) φ int. / $\mathbb{I}$

$$d^0 \quad F \in C^1 \text{ sur } \mathbb{I} \text{ et } \forall x \in \mathbb{I} : F'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(x+u)^2} du$$

4) Effectuons une i.p.p. sur $F(x)$ pour $f(u)$ apparaît

$$\frac{1}{(x+u)^2} :$$

$$F(x) = \underbrace{\left[\frac{2\sqrt{u} e^{-u}}{x+u} \right]_0^{+\infty}}_{\text{ce produit existe et vaut 0 donc}} - \int_0^{+\infty} 2\sqrt{u} \left[\frac{-e^{-u}}{x+u} - \frac{e^{-u}}{(x+u)^2} \right] du$$

ce produit existe et vaut 0 donc par la règle des 2/3, cette i.p.p. est légitime et donc :

$$\forall n > 0 : F(n) = 2 \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{u} e^{-u}}{x+u} + \frac{\sqrt{u} e^{-u}}{(n+u)^2} \right) du \quad (3)$$

$$* \quad \frac{\sqrt{u} e^{-u}}{n+u} \underset{+\infty}{=} o(e^{-u}) \quad \text{donc intég. / I} \quad \text{idem avec } \frac{\sqrt{u} e^{-u}}{(n+u)^2}$$

$$* \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u} e^{-u}}{n+u} du = \int_0^{+\infty} \frac{u e^{-u}}{\sqrt{u}(n+u)} du \quad \text{par se "approcher" à } F \text{ et } F'$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left(1 - \frac{n}{n+u} \right) du \quad (\text{D.E.S.})$$

$$\frac{u}{x+u} = \frac{u+n-n}{x+u}$$

$$= K - n F(n)$$

$$* \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u} e^{-u}}{(n+u)^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{u e^{-u}}{\sqrt{u}(n+u)^2} du \quad \text{idem}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left(\frac{1}{x+u} - \frac{n}{(n+u)^2} \right) du \quad (\text{D.E.S.})$$

$$= F(n) - n F'(n)$$

$$\text{cqs } F(n) = 2 \left(K - n F(n) + F(n) - n F'(n) \right)$$

$$\Leftrightarrow 2K - 2n F(n) + F(n) - 2n F'(n) = 0 \quad \text{d'où}$$

$$\text{d'où } \boxed{\forall n > 0 : n F'(n) - \left(n - \frac{1}{2} \right) F(n) = -K}$$

5) Pour $\Gamma \in \mathcal{G}$ et $u \in \mathbb{R}$, σ est c' en I et l'on a:

$$\forall n > 0 : G'(n) = \frac{1}{2\sqrt{n}} e^{-n} F(n) - \sqrt{n} e^{-n} F(n) + \sqrt{n} e^{-n} F'(n) \quad (+)$$

$$= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2} F(n) - n F(n) + n F'(n) \right)$$

$$= -K \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \quad \text{avec le 4)}$$

On a donc $\left| \begin{array}{l} G(n) - G(1) = -K \int_1^n \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \\ \forall n > 0 \end{array} \right.$ (grâce au 1)

$$= -K \left(\int_1^0 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt + \int_0^n \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \right)$$

d'où $\boxed{\exists C = G(1) + K \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \mid \forall n > 0 : G(n) = C - K \int_0^n \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt}$

6') $\lim_{n \rightarrow 0} G(n) = C - K \times 0 = C$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} G(n) = C - K^2$

On $\forall n > 0 : 0 \leq G(n) \leq \sqrt{n} e^{-n} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u} \times n} du = \frac{K e^{-n}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

d'où $\underline{C = K^2}$

Calculons $G(n) \sim \sqrt{n} F(n)$

$\forall n > 0 \quad \sqrt{n} F(n) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{u}} \frac{e^{-u}}{u+n} du$ (dV $v = \sqrt{u}$ c'-b'ij / $\pm$)

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\cancel{v}} \frac{e^{-v^2}}{v^2+n} 2v dv$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} \sqrt{n} \frac{e^{-nt^2}}{x(t^2+1)} \sqrt{n} dt \quad t = \frac{v}{\sqrt{n}} \quad \text{c'-b'ij}$$

5

q1 $\forall n > 0 : \sqrt{n} F(n) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt^2}}{1+t^2} dt$

utilisons le théorème de cvg dom. compl. avec le critère séquentiel : soit $n_n \xrightarrow{>} 0$,

posons $u_n = \int_0^{+\infty} f_n$ avec $f_n(t) = \frac{e^{-n_n t}}{1+t^2}$

* (f_n) c.s. vers $g : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ sur I

* f_n et $g \in C^0/I$ par TG.

* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I : |f_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = g(t)$

et $g(t) \sim \frac{1}{t^2} > 0$, int. I (TC) d'où :

$$\lim_{n \rightarrow 0} \sqrt{n} F(n) = \lim_{n \rightarrow 0} \sqrt{n} F(n) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2 \left[\text{Arctant} \right]_0^{+\infty} = \pi$$

comme $K \geq 0$ (S d'aj. positive), d'où : $K = \sqrt{\pi}$

B

7) Posons $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $v_n(x) = \sqrt{n} e^{-nx}$

* Par T.G., u_n et v_n sont C^0 sur I .

* $\forall x \in [a, b] \subset I \quad \forall n \geq 1 :$

$$|u_n(x)| \leq \frac{e^{-na}}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad |v_n(x)| \leq \frac{\sqrt{n} e^{-na}}{\int \beta_n} \quad (6)$$

$\alpha_n = o(e^{-na})$, $\sum (e^{-a})^n$ cvg et $\alpha_n > 0$, d'nc par TC, $(\sum \alpha_n)$ cvg

$$\beta_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{car} \quad n^2 \beta_n = n^{5/2} (e^{-a})^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.c.} 0$$

comme $\frac{1}{n^2} > 0$, par TC, $(\sum \beta_n)$ cvg

d'où $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ cvg normalement sur $[a, b]$

d' f et g existent et sont continues sur I

8) Utilisons la comparaison Σ - $\int$:

posons $\varphi(u) = \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}$ définie sur I ($x > 0$ fixé)

$$\varphi'(u) = \frac{-x e^{-ux}}{\sqrt{u}} - \frac{1}{2} \frac{e^{-ux}}{u^{3/2}} = \frac{-e^{-ux}}{u^{3/2}} (ux + 1) < 0$$

cq's φ st $\searrow$ sur I, c' est positive sur I,

d'où $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in]n, n+1[$

$$\varphi(n+1) \leq \varphi(u) \leq \varphi(n)$$

$$\text{d'nc} \quad \int_n^{n+1} \varphi(n+1) du \leq \int_n^{n+1} \varphi(u) du \leq \int_n^{n+1} \varphi(n) du$$

valable aussi pour $n=0$ car φ intégrable sur I (idem 1))

on a donc $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(u) du \leq f(n)$ ⑦

d'où $\forall n \geq 1, \int_n^{n+1} f(u) du \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(u) du$

on somme de 1 à l'infini : tout est bon et l'on a :

d'où : $\int_1^{\infty} \frac{e^{-u} n}{\sqrt{u}} du \leq f(n) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} n}{\sqrt{u}} du$

on effectue le c.v. c'-bijection : $u n = t$ dans les 2

intégrales : $\forall n > 0, \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t/n}} \frac{dt}{n} \leq f(n) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t/n}} \frac{dt}{n}$

soit $\frac{1}{\sqrt{n}} \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \leq f(n) \leq \frac{K}{\sqrt{n}}$

d'où $\int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \leq \sqrt{n} f(n) \leq K$
 $\downarrow$
 $K \leftarrow n \rightarrow 0$ (T.E.)

d'où : $f(n) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$

g) utilisant la C.B.S.S. : on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}$

$$\text{donc } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/2} - 2\sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} + 2\sqrt{n} \quad (8)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2\sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + 2\sqrt{n}$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \quad \left(\sum \frac{1}{n^{3/2}}\right) \text{ cvg et } \frac{1}{n^{3/2}} \geq 0, \text{ par TC :}$$

$$\left(\sum u_{n+1} - u_n\right) \text{ cvg} \quad \text{d'où} \quad \boxed{(u_n) \text{ cvg}}$$

$$10) * \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n} \quad \text{car} \quad \frac{\sum \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{u_n}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\text{d'où} \quad \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right) e^{-nn} \sim 2\sqrt{n} e^{-nn} \quad \text{tg de la série associée}$$

$$\text{à } g(n), \text{ avec la 7), on conclut : } \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-nn}\right)_n \text{ cvg}$$

1^{re} méthode
On "voit" un produit de Cauchy de préliminaire

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_n = \frac{e^{-nn}}{\sqrt{n}} & \text{et } v_n = \frac{e^{-nn}}{1} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \times 1 \times e^{-kn} \times e^{-(n-k)n} \\ = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right) e^{-nn}$$

Comme $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ cvg absolument, $(\sum w_n)$ cvg aussi et l'on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = h(n) = f(n) \times \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} = \frac{f(n)}{1 - e^{-n}} \quad (2)$$

2ⁿ méthode

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-kn} &= \sum_{k=1}^N \sum_{n=k}^N \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-kn} \quad \text{échange de } \Sigma \text{ finis} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{n=k}^N e^{-kn} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-kn} \frac{1 - e^{-(N-k+1)}}{1 - e^{-n}} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-n}} \sum_{k=1}^N \frac{e^{-kn}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{1 - e^{-n}} \underbrace{\sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-(N+1)n}}_{\alpha_N} \end{aligned}$$

$$\alpha_N \sim 2\sqrt{N} e^{-(N+1)n} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{c.c.}} 0 \quad \text{d'où même formule}$$

(car début 10)

d'où : $\forall n > 0 : h(n) = \frac{f(n)}{1 - e^{-n}}$

11) On a $\forall n > 0 : h(n) = \sum_{n=1}^{\infty} (2\sqrt{n} + u_n) e^{-n}$

↑ notation de g)

tout va et donc :

$$h(n) = 2g(n) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{-n}$$

$$h(n) \sim \frac{\sqrt{\frac{\pi}{n}}}{1 - (1 - \frac{1}{n}) + o(1/n)} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{n^{3/2}}$$

$$\exists \eta \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}^* \mid u_n \mid \leq \eta \text{ donc}$$

$$\forall n > 0 \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{-n\eta} \right| \leq \eta \frac{e^{-\eta}}{1 - e^{-\eta}} \sim \frac{\eta}{\eta}$$

$$\text{donc} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{-n\eta} = o(h(n)) \text{ d'où}$$

$$2g(n) = h(n) + o(h(n)) \underset{o}{\sim} h(n) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{n^{3/2}}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{g(n) \underset{o}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2n^{3/2}}}$$

C

12) * si A fini, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid A \subset \llbracket 0, n_0 \rrbracket$ et donc

$$\forall n \geq n_0 \quad \sum_{k=0}^n a_k e^{-kn} = \sum_{k=0}^{n_0} a_k e^{-kn} : \text{ suite stationnaire}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\text{si } A \text{ fini, } \mathcal{I}_A = \mathbb{R}^+}$$

* si A infini, $A \neq \emptyset : \exists n_0 \in A$ posons $\varphi(0) = n_0$

$A \not\subset \llbracket 0, n_0 \rrbracket$ donc $\exists n_1 > n_0 \mid n_1 \in A$, posons $\varphi(1) = n_1$

on construit par récurrence $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(n) < \dots$

$\forall k \in \mathbb{N} \quad \varphi(k) \in A$. on pose $b_n = a_{\varphi(n)}$

qqs : (b_n) extraite de (a_n) et $\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = 1$

si $n \leq 0$ ($a_n e^{-n}$) ne tend pas vers 0 car (11)

elle possède une suite extraite $b_n e^{-\varphi(n)/n} \rightarrow 0$

cgs $(\sum a_n e^{-n})$ div. grossierement

si $n > 0$: $0 \leq a_n e^{-n} = O(e^{-n})$ avec TC $(\sum a_n e^{-n})$ cvg

d si A infini : $I_A =]0, +\infty[$

13) $0 \leq \text{card}(A(n)) \leq n+1$ donc $\text{card}(A(n)) e^{-n} = O(n e^{-n})$
 $= O(\frac{1}{n!})$ c.c

cgs avec TC, $\forall n > 0$ $(\sum \text{card}(A(n)) e^{-n})$ cvg

* $\text{card} A(n) = \sum_{p=0}^n a_p = \sum_{p=0}^n a_p \times 1$: on peut appliquer

le préliminaire car tout cvg absolument $\forall n > 0$,
 $\sum_{n=0}^{\infty} \text{card} A(n) e^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^n a_p \times 1 \right) e^{-n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} 1 e^{-n} \right)$

d : $\forall n > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \text{card}(A(n)) e^{-n} = \frac{I_A(n)}{1 - e^{-1}}$

14) $k \in A_1(n) \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N}^* \setminus k = i^2$ et $k \leq n$
 $\Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N}^* \setminus k = i^2$ et $i \leq \sqrt{n}$

qqs $A_1(n) = \{ i^2, i \in [1, L\sqrt{n}] \} : |A_1(n)| = L\sqrt{n}$ (12)

on continue avec le 13) :

$$\forall n > 0 : \frac{f_{A_1}(n)}{1 - e^{-n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} L\sqrt{n} e^{-n}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq \sqrt{n} - L\sqrt{n} \leq 1$, on multiplie par e^{-n} et on somme de 0 à l'infini on tout $\text{cvg}(f_{A_1}, \text{et } g)$:

$$\forall n > 0 : 0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n} - L\sqrt{n}) e^{-n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} = \frac{1}{1 - e^{-1}}$$

$$\text{on a donc } \forall n > 0 : 0 \leq g(n) - \frac{f_{A_1}(n)}{1 - e^{-n}} \leq \frac{1}{1 - e^{-1}}$$

$$\text{donc } 0 \leq (1 - e^{-n}) g(n) - f_{A_1}(n) \leq 1,$$

$$\text{or } (1 - e^{-n}) g(n) \underset{0}{\sim} a \frac{\sqrt{n}}{2n^3 n} \quad (11')$$

$$\underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}$$

$$\text{d'où } \forall n > 0 : 0 \leq \frac{(1 - e^{-n}) g(n)}{\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}} - \frac{f_{A_1}(n)}{\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}} \leq \frac{1}{\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}}$$

T.E.

$$\text{d. } f_{A_1}(n) \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}$$

(13)

θ_n a dit $n \int_{A_1} |n| \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

d'où $A_1 \in \mathcal{S}$ et $\phi(A_1) = 0$

15) Notons (α_n) la suite associée à A_1

$\forall n: \sum_{\substack{k=0 \\ n-k=q^2}}^n \alpha_k \alpha_{n-k} = \sum_{k=p^2} 1 \times 1 = r(n)$

Avec la préliminaire, on a :

$\forall n > 0 \quad \int_{A_1} |n|^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{-n} \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \alpha_k \alpha_{n-k} e^{-n} n$

d'où : $\forall n > 0: \sum_{n=0}^{\infty} r(n) e^{-n} = \int_{A_1} |n|^2$

Comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n \leq r(n)$ ((α_n) suite associée à A_1)
 (si $\alpha_n = 0$ ou si, si $\alpha_n = 1$, $\exists p, q \geq 1 \mid n = p^2 + q^2$
 donc $r(n) \geq 1$)

comme tout va, $\forall n > 0 \quad \int_{A_2} |n| \leq \int_{A_1} |n|^2$

θ_n a déduit que $\forall n > 0: n \int_{A_2} |n| \leq n \int_{A_1} |n|^2 \sim \frac{\pi}{4}$

d'où quand $n \rightarrow \infty$: $\phi(A_2) \leq \frac{\pi}{4}$

D
16.) Soit $\varphi \in E$ et soit $n > 0$, $e^{-nn} \in [0, 1]$

$|\alpha_n e^{-nn} \varphi(e^{-nn})| \leq \|\varphi\|_\infty \alpha_n e^{-nn}$: c'est le
terme général d'une série cg, par TC,
 $(L(\varphi))|n|$ existe pour tout $n \in]0, +\infty[$

Remarque : $L(\varphi)(0)$ n'est pas défini dans leur
énoncé (erreur d'énoncé ?)

Par TG sur les séries, il est clair que si $(\varphi_1, \varphi_2) \in E^2$,
 $\lambda \in \mathbb{R}$, $L(\lambda \varphi_1 + \varphi_2)(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{-nn} (\lambda \varphi_1 + \varphi_2)(e^{-nn})$
 $= (\lambda L(\varphi_1) + L(\varphi_2))|n|$

d'où L est linéaire

de $\hat{m}$ avec limite et aide des sommes partielles, on a

$\varphi_1 \leq \varphi_2 \Rightarrow \forall n > 0, (L(\varphi_1))|n| \leq (L(\varphi_2))|n|$ ($\alpha_n e^{-nn} \geq 0$)

d'où : $\varphi_1 \leq \varphi_2 \Rightarrow L(\varphi_1) \leq L(\varphi_2)$

17) Par TG (et comme la fonction nulle appartient à E_1) :
d'où E_1 sev de E

$$\forall \psi \in E, \forall n > 0 : |\alpha L(\psi)(n)| \leq n \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{n\lambda} \|\psi\|_{\infty}$$

$$\text{quib } n \rightarrow \infty : |\Delta(\psi)| \leq l \|\psi\|_{\infty}$$

Avec la caractérisation de la continuité des applications linéaires

$$\text{continues : d'où } \Delta \text{ continue sur } (E, \|\cdot\|_{\infty})$$

$$\begin{aligned} 18) e_p \in E \text{ et } \forall n > 0 \quad L(e_p)(n) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{-n\lambda} e^{-n p \lambda} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{-n(p+1)\lambda} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } n L(e_p)(n) = \frac{1}{p+1} (p+1)n \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{-n(p+1)\lambda}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p+1} l$$

$$\text{d'où } \Delta(e_p) = \frac{l}{p+1}$$

Par C.L. toute fonction polynomiale est dans E_1 . Or le théorème de Stone-Weierstrass donne :

$\forall \psi \in E_0, \exists (\psi_n)$ suite de fonctions polynomiales telle que :

$$\|\psi - \psi_n\|_{\infty, [0,1]} \rightarrow 0$$

$$\text{on a donc } \forall n \in [0,1] : |n(L(\psi_n))(n) - n(L(\psi))(n)| \leq l \|\psi_n - \psi\|_{\infty} \rightarrow 0$$

cgs la suite de fct $g_n : n \mapsto n(L(\psi_n))/n$ c.v. vers

(16)

$$g : n \mapsto n(L(\psi))/n \text{ sur } [0, 1]$$

$$(g(0) = g(1) = 0)$$

par le th. de double limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} n(L(\psi_n))/n = \lim_{h \rightarrow 0} n(L(\psi))/n$$

$$\text{donc } \Delta(\psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(\psi_n).$$

Ecrivons $\Delta(\psi)$ uniquement à l'aide de ψ :

$$\text{si } \psi_n = \sum_{h=0}^N a_h x^h, \quad \Delta(\psi_n) = \sum_{h=0}^N a_h \frac{l}{h+1} = l \int_0^1 \psi_n(t) dt$$

Avec les inégalités ci-dessus :

$$| \int_0^1 \psi_n - \int_0^1 \psi | \leq \| \psi_n - \psi \|_{\infty}$$

$$\text{d'où } \boxed{\Delta(\psi) = l \int_0^1 \psi(t) dt}$$

19) g_- (g_+) est continue sur $[0, 1] - \{a - \varepsilon, a\}$

(sur $[0, 1] - \{a, a + \varepsilon\}$) par T.G.

$$\lim_{n \rightarrow a-\varepsilon} g_-(n) = \lim_{n \rightarrow a+\varepsilon} g_+(n) = 1, \text{ idem pour les 3 autres points.}$$

d° g_+ et g_- sont dans E_0

on applique le 15' :

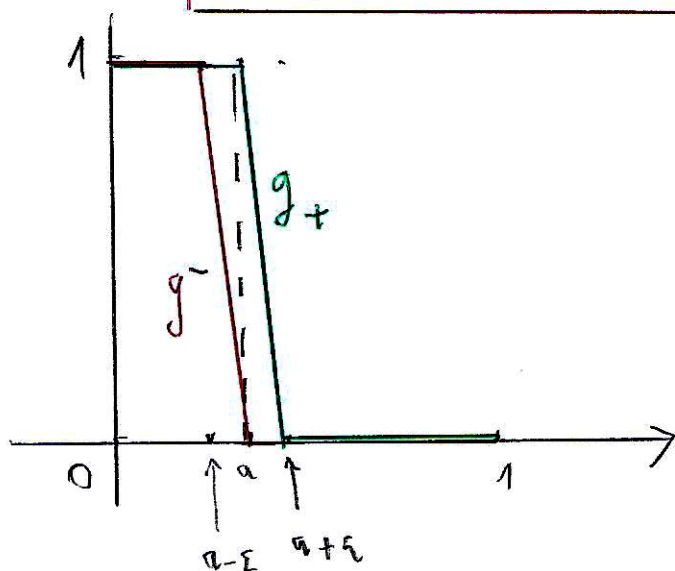
$$\Delta(g_-) = l \int_0^1 g_- = l \left(\int_0^{a-\varepsilon} 1 dt + \int_{a-\varepsilon}^a \frac{a-t}{\varepsilon} dt + \int_a^1 0 \right)$$

$$= l \left(a - \varepsilon + \varepsilon \left(\frac{a}{\varepsilon} \right) - \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{a-\varepsilon}^a \right)$$

$$= l \left(a - \varepsilon + a - \frac{1}{2\varepsilon} (a^2 - (a-\varepsilon)^2) \right)$$

$$= l(a - \varepsilon/2) \quad \text{et} \quad \hat{m} \quad \Delta(g_+) = l(a + \varepsilon/2)$$

d° $\Delta(g_-) = l(a - \varepsilon/2)$ et $\Delta(g_+) = l(a + \varepsilon/2)$



poson $f = 1_{[0, a]}$

on a $\forall \varepsilon > 0$ $g_- \leq f \leq g_+$ et avec 16), on a :

$$\forall n > 0 \quad n(L(g_-))(n) \leq x(L(f))(n) \leq n(L(g_+))(n)$$

avec les limites $\Delta(g_-)$ et $\Delta(g_+)$, $\exists (\alpha_1, \alpha_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$ (18)

$$\forall n \in]0, \alpha_1] \quad |n(L(g_-))(n) - \ell(a - \varepsilon/2)| \leq \varepsilon$$

$$\forall n \in]0, \alpha_2] \quad |n(L(g_+))(n) - \ell(a + \varepsilon/2)| \leq \varepsilon$$

d'où $\forall n \in]0, \alpha]$ avec $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2) > 0$:

$$\underline{\ell(a - \varepsilon/2) - \varepsilon \leq n(L(g_-))(n) \leq n(L(f))(n) \leq n(L(g_+))(n) \leq \ell(a + \varepsilon/2) + \varepsilon}$$

$$\text{donc} \quad \left| n(L(f))(n) - \ell a \right| \leq \ell \varepsilon/2 + \varepsilon$$

$$\left| \forall n \in]0, \alpha] \right|$$

par définition de la limite, on a : $\Delta(f) = \ell a = \ell \int_0^a 1 dx$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\mathbb{1}_{[0, a]} \in E, \text{ et } \Delta(\mathbb{1}_{[0, a]}) = \ell \int_0^a \mathbb{1}_{[0, a]}}$$

* Si on considère la fonction $\mathbb{1}_{[0, a[}$ on a la même encadrement et donc la même limite :

$$\mathbb{1}_{[0, a[} \in E, \text{ et } \Delta(\mathbb{1}_{[0, a[}) = \ell \int_0^a \mathbb{1}_{[0, a[}$$

$$* \forall 0 < a < b \leq 1 \quad \mathbb{1}_{[a, b]} = \mathbb{1}_{[0, b]} - \mathbb{1}_{[0, a[} \in E, \text{ (sev)}$$

$$\mathbb{1}_{]a, b[} = \mathbb{1}_{[0, b[} - \mathbb{1}_{[0, a]} \in E$$

et donc par combinaisons linéaires, toute fonction φ

en escalier sur $[0, 1]$ vérifie :

(19)

$$\psi \in E, \text{ et } \Delta(\psi) = l \int_0^1 \psi$$

* Comme $\forall \varepsilon > 0, \exists \psi_1 \text{ et } \psi_2 \text{ en escalier}$ \

$$\psi - \varepsilon \leq \psi_1 \leq \psi \leq \psi_2 \leq \psi + \varepsilon$$

et comme page (18), avec les mêmes notations, on

conclut : d'où $E_1 = E$ et $\Delta(\psi) = l \int \psi$

$$20') \forall n > 0 : L(\psi)\left(\frac{1}{N}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{-n/N} \psi(e^{-n/N})$$

$$e^{-n/N} \geq \frac{1}{e} \Leftrightarrow -n/N \geq -1 \Leftrightarrow n \leq N$$

$$\text{donc } L(\psi)\left(\frac{1}{N}\right) = \sum_{n=0}^N \alpha_n e^{-n/N} e^{n/N} = \sum_{n=0}^N \alpha_n$$

$$\text{qsd } \frac{1}{N} L(\psi)\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \alpha_n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \Delta(\psi) \quad \text{car } \psi \in E, \text{ et critère séquentiel}$$

$$\text{or } \Delta(\psi) = l \int_{1/e}^1 \frac{1}{n} dn = l$$

$$\text{d'où } \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = l$$

2.1') x d'après le 1.3) $\frac{A}{n} \text{ card } A(n) = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^n a_p$

car $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^n a_p e^{-pn} = \phi(A)$ d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{card}(A(n)) = \phi(A)$

Toujours!

$$* n \sum_{k=0}^{\infty} j(k) e^{-kn} = n \int_{A_1} (n)^2 \longrightarrow \pi/4 \quad (15'')$$

Toujours! d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n j(k) = \frac{\pi}{4}$

Remarque: Ce résultat est cohérent avec la géométrie et la méthode de calcul d'aire (voir méthode de Monte-Carlo): $\sum_{k=0}^n j(k)$ représente le nombre de points à coordonnées entières sur le quart de cercle $\mathcal{C}^+(0, \sqrt{n})$ d'aire $\frac{\pi}{4} n$.

$$H_0: \forall n \in \mathbb{R} \setminus n \neq 0 \quad \delta_n(n+1) = \frac{n+n+1}{n-n} \delta_n(n)$$

$$\underline{n=1}: \forall n \in \mathbb{R} \setminus n \neq 1$$

$$\delta_1(n+1) = \left(1 - \frac{(n+1)^2}{1^2}\right) \delta_0(n+1) = -n^3 - 3n^2 - 2n$$

$$\text{et } \frac{n+2}{n-1} \delta_1(n) = \frac{n+2}{n-1} (1-n^2) \times n = -n^3 - 3n^2 - 2n$$

donc H_1 vraie

Si H_{n-1} est vraie, $\forall n \in \mathbb{R} \setminus n \neq n$

$$\begin{aligned} \delta_n(n+1) &= \left(1 - \frac{(n+1)^2}{n^2}\right) \delta_{n-1}(n+1) \\ &= \frac{n^2 - (n+1)^2}{n^2} \frac{n+n-1+1}{n-n+1} \delta_{n-1}(n) \quad \swarrow \text{valable si } n \neq n-1 \\ &= \frac{(\cancel{n} - n - 1)(n+n+1)}{n^2} \frac{n+n}{\cancel{n} - n + 1} \frac{\delta_n(n)}{1 - \frac{n^2}{n^2}} \\ &= \frac{n+n+1}{n-n} \delta_n(n) \end{aligned}$$

donc c'est vraie si $n \neq n$ et $n \neq n-1$; si $n = n-1$

$$\delta_n(n+1) = \delta_n(n) = \left(1 - \frac{n^2}{n^2}\right) \delta_{n-1}(n) = 0$$

$$\text{et } \delta_n(n-1) = \left(1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right) \underbrace{\delta_{n-1}(n-1)}_{=0} = 0$$

cqsd H_n vraie. On conclut à l'égalité demandée