Q1 Montrons que ℓ^∞ sev de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$;

* La suite nulle $\theta = (0) \in \ell^\infty$
* $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u,v) \in (\ell^\infty)^2$

$\forall n \in \mathbb{N} : |\lambda u_n + v_n| \leq \lambda \|u\| + \|v\| = M$

donc $\lambda u + v \in \ell^\infty$ (ind. de n)

d'où : $\boxed{\ell^\infty \ \mathbb{R}\text{-ev.}}$

* $\| \| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$
* $\|u\| = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq |u_n| \leq 0 = \|u\|$

$\Rightarrow$ ——— $: u_n = 0$

$\Rightarrow u = (0)$

* $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E$:

$\forall n \in \mathbb{N} : |\lambda u_n| \leq |\lambda| \, |u_n| \leq |\lambda| \, \|u\|$

donc $\|\lambda u\| \leq |\lambda| \cdot \|u\|$.

Si $\lambda = 0$ $\|\lambda u\| = 0 = |\lambda| \, \|u\|$

Si $\lambda \neq 0$ $\quad \|\frac{1}{\lambda}(\lambda u)\| \leq |\frac{1}{\lambda}| \, \|\lambda u\|$

donc $|\lambda| \|u\| \leq \|\lambda u\|$ d'où $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$

* $\forall (u, v) \in (l^\infty)^2$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \|u\| + \|v\|$

donc $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

d'_2 $\boxed{\| \text{ est une norme sur } l^\infty}$

Q_2 * $\forall u \in l^\infty$, $\frac{u_n}{3^n} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{3^n}\right)$ car u bornée.

Comme $\frac{1}{3^n} \geq 0$ et $\left(\sum \frac{1}{3^n}\right)$, par T.C. $\boxed{\left(\sum \frac{u_n}{3^n}\right) \text{ cvg}}$

Absolument

Q_3 * Par linéarité de la somme d'une série,

σ est linéaire de l^∞ dans $\mathbb{R}$,

* $\forall u \in l^\infty$, $|\sigma(u)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|u\|}{3^n}$ (tout cvg)

$\leq \frac{\|u\|}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \|u\|$

d'où $\boxed{\sigma \text{ linéaire et } C^0 \text{ sur } \ell^\infty}$

rem : c'est la "5ème case"

Q4 $\forall t \in T$, $0 \leq t_n \leq 2$, donc

$$0 \leq \sigma(t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 1 \quad (\hat{m} \text{ calcul qu'à } Q_3)$$

d'où $\boxed{\forall t \in T : \sigma(t) \in [0,1]}$

Q5 $$\sigma(\tau) = \frac{1}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{0}{3^n} = \underline{\frac{1}{3}}$$

$$\sigma(\tau') = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{9} \frac{1}{1-1/3} = \underline{\frac{1}{3}}$$

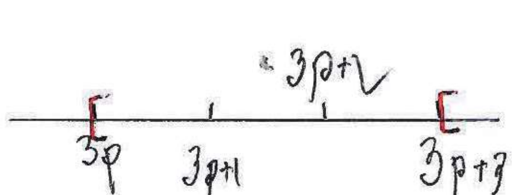
d'où $\boxed{\sigma \text{ non injective}}$

__Remarque__ : en base 3 : $\frac{1}{3} = \underset{\tau}{\overline{0,1}^3} = \underset{\tau'}{\overline{0,0222\cdots}^3}$

Q6 Posons $p = \lfloor 3^{n-1} x \rfloor \in \mathbb{N}$, on a :

$$p \leq 3^{n-1} x < p+1$$

$$\Rightarrow 3p \leq 3^n x < 3p+3$$



$$\Rightarrow \lfloor 3^n x \rfloor \in \{3p, 3p+1, 3p+2\}$$

donc $3p \leq \lfloor 3^n x \rfloor \leq 3p+2 \Rightarrow t_n(x) \in [\![0, 2]\!]$

d'où $\boxed{t(x) \in T}$

Q7 * $y_n - x_n = \dfrac{1}{3^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

* Posons $p = \lfloor 3^n x \rfloor$, on a :

$p \leq 3^n x < p+1$

$\Rightarrow 3p \leq 3^{n+1} x < 3p+3$

$\Rightarrow 3p \leq \lfloor 3^{n+1} x \rfloor \leq 3p+2$

$\Rightarrow \dfrac{3p}{3^{n+1}} \leq \dfrac{\lfloor 3^{n+1} x \rfloor}{3^{n+1}} \leq \dfrac{3p+2}{3^{n+1}} \quad (I)$

$\Rightarrow \underline{x_n \leq x_{n+1}}$

* $y_n - y_{n+1} = x_n - x_{n+1} + \dfrac{2}{3^{n+1}}$, avec (I),

on a $x_n - x_{n+1} + \dfrac{2}{3^{n+1}} \geq 0$, donc $\underline{y_{n+1} \leq y_n}$

d'où $\boxed{(x_n) \text{ et } (y_n) \text{ sont adjacents}}$

* Notons l la limite commune de (x_n) et (y_n)

$\lfloor 3^n x \rfloor \leq 3^n x < \lfloor 3^n x \rfloor + 1$

$\Rightarrow \quad x_n \leq x < x_n + \frac{1}{3^n} = y_n$, tout cvg 19

donc $\quad l \leq x \leq l \quad$ d' $\boxed{\lim x_n = \lim y_n = x}$

$* \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{t_n(x)}{3^n} = \sum_{n=2}^{N} x_n - x_{n-1} = x_N - x_1$ (télescopage)

Or $\dfrac{t_1(x)}{3} = x_1 - 3 \times 0 = x_1$, donc :

$\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{t_n(x)}{3^n} = x_N \xrightarrow[+\infty]{} x \quad$ d' $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n(x)}{3^n} = x}$

Cqs : Tout elt de $[0, 1[$ admet un antécédant par σ. Comme $u = (2, 2, 2, \ldots)$ vérifie

$\sigma(u) = 1$ (d'après Q_4), d' : $\boxed{\sigma \text{ surjective et non injective de } T \text{ ds } [0,1]}$

$Q_8 - Q_9 - Q_{10}$: voir à la fin de ce corrigé. page (18) - (19)

Q11 Posons $u_n(x) = \dfrac{1+\sin nx}{3^n}$

* u_n $C^1/\mathbb{R}$ par TG et $\forall x \in \mathbb{R}$ $u_n'(x) = \dfrac{n\cos nx}{3^n}$

* $\forall x \in \mathbb{R}$ $u_n(x) \underset{n\to\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$ donc par TC, $(\sum u_n)$ cvg simplement sur $\mathbb{R}$.

* $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant 1$; $|u_n'(x)| \leqslant \dfrac{n}{3^n} = \alpha_n$

Par CC, $n^2 \alpha_n = \dfrac{n^3}{3^n} \longrightarrow 0$, donc $\alpha_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Comme $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$ et $\left(\sum \dfrac{1}{n^2}\right)$ cvg, par TC, $(\sum \alpha_n)$ cvg

cqs $(\sum u_n')$ cvg normalement sur $\mathbb{R}$,

Par Th C^1 ; $\boxed{\varphi \text{ définie et } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

Q12 Comme $\begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \\ z \longmapsto \operatorname{Im} z \end{array}$ continue sur $\mathbb{C}$ (linéaire en dim. finie)

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(e^{inx})}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n}$$

↳ $\sum$ cvg car géo, de raison $|q| = 1/3$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$, $\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{2} + \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right)}$

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{3^n} = \frac{e^{ix}}{3} \frac{1}{1-\frac{e^{ix}}{3}} = \frac{e^{ix}}{3-e^{ix}}$

$$= \frac{e^{ix}(3-e^{-ix})}{9-6\cos x+1} = \frac{3e^{ix}-1}{10-6\cos x}$$

d'où $\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{3\sin x}{10-6\cos x}}$

Q_{13} $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos nx}{3^n} = \varphi'(x)$ (avec Q_{11})

Or $\varphi'(x) = \frac{3\cos x}{10-6\cos x} - \frac{18\sin^2 x}{(10-6\cos x)^2}$

$$= \frac{30\cos x - 18\cos^2 x - 18\sin^2 x}{(10-6\cos x)^2}$$

d'où $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos nx}{3^n} = \frac{30\cos x - 18}{(10-6\cos x)^2}}$

Q_{14} Avec les notations de Q_{11}, u_n $C^0/[0,\pi]$ par TG,

Méthode 1

$\forall x \in [0,\pi]$ $|u_n(x)| \leq \frac{2}{3^n} = \alpha_n$ et $(\sum \alpha_n)$ cvg

d'où $(\sum u_n)$ CN$/[0,\pi]$.

Par th d'intégration sur un segment,

$$\int_0^{\pi} \varphi(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\sin nx}{3^n}\right) dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{3^n} + \frac{1}{3^n}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+1}{n\,3^n}$$

Or $\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(x)\,dx = \frac{\pi}{2} + 3\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{10-6\cos x}\,dx$

d'où $$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{10-6\cos x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}+1}{n\,3^{n+1}}}$$

Méthode 2 : voir page 17

On reconnaît la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \ln(1+x)$

d'où $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,3^{n+1}} = \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(\ln 4 - \ln 3)$$

et $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,3^{n+1}} = -\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}(\ln 2 - \ln 3)$$

d'où $$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{10-6\cos x}\,dx = \frac{1}{3}(\ln 4 - \ln 2) = \frac{\ln 2}{3}}$$

9

Q_{15} On effectue le CdV C^1 sur $[0,\pi]$: $\underline{u = \cos x}$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{10 - 6\cos x} = \int_1^{-1} \frac{-du}{10-6u} = \int_{-1}^{1} \frac{du}{10-6u}$$

$$= \left[-\frac{1}{6} \ln(10-6u) \right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{6}(\ln 4 - \ln 16)$$

$$= -\frac{1}{6}(2\ln 2 - 4\ln 2) = \underline{\frac{\ln 2}{3}}$$

Q_{16} $T_{n,N}(\Omega)$ étant fini, $T_{n,N}$ admet une espérance et une variance finies et comme sommes finies, $\underline{X_N \text{ aussi.}}$

Par linéarité (E) et indépendance des $\frac{T_{n,N}}{3^n}$,

$$E(X_N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{E(T_{n,N})}{3^n} \quad \text{et} \quad V(X_N) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V(T_{n,N})}{9^n}.$$

Or $E(T_{n,N}) = 0 \times \frac{1}{N} + 1 \times \frac{1}{N} + 2\left(1 - \frac{2}{N}\right)$

$$= 2 - \frac{3}{N}$$

10

$$E(T_{n,N}^2) = 1^2 \times \frac{1}{N} + 4\left(1 - \frac{2}{N}\right)$$ par for. de transfert

$$= 4 - \frac{7}{N} \quad \text{donc}$$

$$V(T_{n,N}) = 4 - \frac{7}{N} - \left(2 - \frac{3}{N}\right)^2 \qquad (\text{K.H.})$$

$$= \frac{5}{N} - \frac{9}{N^2}$$

cqs

$$\boxed{E(X_N) = \left(2 - \frac{3}{N}\right)\frac{1}{3}\,\frac{1-(1/3)^N}{1-1/3} = \left(1 - \frac{3}{2N}\right)\left(1 - \frac{1}{3^N}\right)}$$

$$\boxed{V(X_N) = \left(\frac{5}{N} - \frac{9}{N^2}\right)\frac{1}{9}\,\frac{1-1/9^N}{1-1/9} = \left(\frac{5}{8N} - \frac{9}{8N^2}\right)\left(1 - \frac{1}{9^N}\right)}$$

Q17 C'est la loi faible des grands nombres déduite de B.T. :

$$0 \leq \mathbb{P}(|X_N - E(X_N)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X_N)}{\varepsilon^2}$$

$$\xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

Par thi d'encadrement, d'où

$$\boxed{\lim_{N \to \infty} \mathbb{P}(|X_N - E(X_N)| \geq \varepsilon) = 0}$$

Q18 Si X_N loin à ε de 1 alors $X_N - E(X_N)$ ou $E(X_n) - 1$ loin de $\varepsilon/2$;

Montrons ;

$$(|X_N - 1| \geq \varepsilon) \subset \underbrace{(|X_N - E(X_N)| \geq \varepsilon/2)}_{B} \cup \underbrace{(|E(X_N) - 1| \geq \varepsilon/2)}_{C}$$ 17

Soit $w \in \Omega \setminus |X_N(w) - 1| \geq \varepsilon$

Si $w \notin B \cup C$, alors $\begin{cases} |X_N(w) - E(X_N)| < \varepsilon/2 \\ \text{et} \\ |E(X_N) - 1| < \varepsilon/2 \end{cases}$ d'où

$$|X_N(w) - 1| \leq |X_N(w) - E(X_N)| + |E(X_N) - 1|$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad ; \text{ absurde}$$

Comme $\mathbb{P}\nearrow$ et $\mathbb{P}(B \cup C) \leq \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$ (I. de Boole)

d'où $$\boxed{\mathbb{P}(|X_N - 1| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_N - E(X_N)| \geq \varepsilon/2) + \mathbb{P}(|E(X_N) - 1| \geq \varepsilon/2)}$$

* Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim\limits_{N \to \infty} E(X_N) = (1-0)(1-0) = 1$,

$\exists N_0 \in \mathbb{N} \setminus \forall N \geq N_0 \; |E(X_N) - 1| \leq \varepsilon/4 < \varepsilon/2$, donc

$\forall N \geq N_0 \; (|E(X_N) - 1| \geq \varepsilon/2) = \emptyset$, d'où

$$\mathbb{P}(|E(X_N) - 1| \geq \varepsilon/2) = 0.$$

Avec Q_{17}, $\exists N_1 \in \mathbb{N} \setminus \forall N \geq N_1 : \mathbb{P}(|X_N - E(X_N)| \geq \varepsilon/2) \leq \varepsilon$,

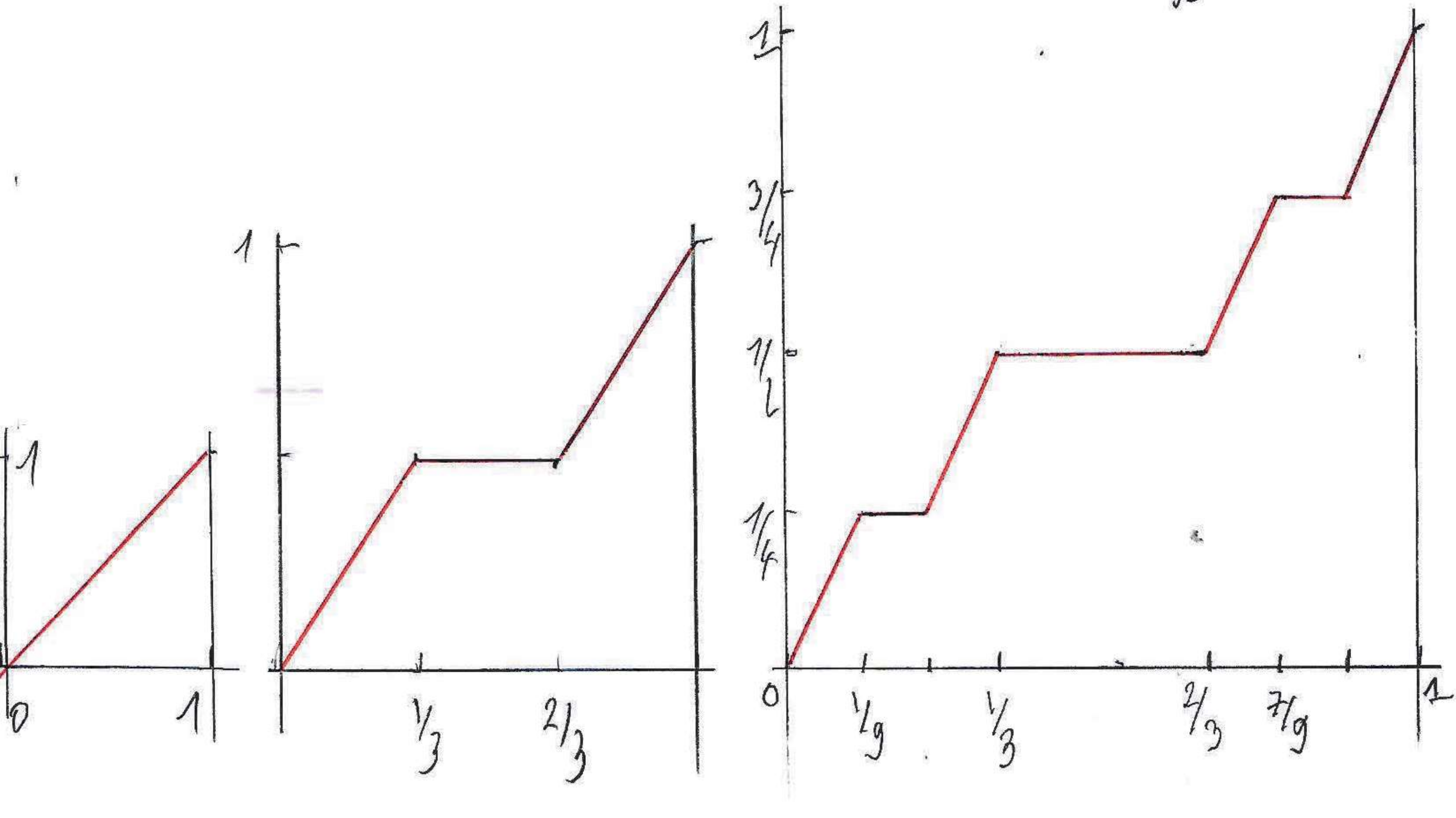
d'où $\forall n \geq \max(N_0, N_1) : \mathbb{P}(|X_N - 1| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon + 0$

d° $\boxed{\lim \mathbb{P}(|X_N - 1| \geq \varepsilon) = 0}$

Rem. On dit que la suite de VAR $(X_N)_N$ converge en proba. vers la VAR $X = 1$.

Q 19 $f_0(x) = x$, $f_1(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2} & \text{si } x \in [0, 1/3] \\ 1/2 & \text{si } x \in]1/3, 2/3[\\ \frac{3x}{2} - \frac{1}{2} & \text{si } x \in [2/3, 1] \end{cases}$

x	0 — 1/9	1/9 — 2/9	2/9 — 1/3	1/3 — 4/9 — 5/9 — 2/3	2/3 — 7/9	7/9 — 8/9	8/9 — 1
$f_2(x)$	$\frac{9x}{4}$	$1/4$	$\frac{9x}{4} - \frac{1}{4}$	$1/2$	$\frac{9x}{4} - 1$	$3/4$	$\frac{9x}{4} - \frac{5}{4}$
	$3x \in [0, \frac{1}{3}]$		$3x \in [2/3, 1]$		$3x - 2 \in [0, 1/3]$	id	id



* <u>Récurrence sur n</u> : si $x \in [0, 1/3]$, $3x \in [0,1]$ idem pour $3x-2$

$n=0$ $\forall x \in [0,1]$ $f_0(x) \in [0,1]$ donc H_0 vraie

si $f_n([0,1]) \subset [0,1]$, soit $x \in [0,1]$

* Si $x \in [0, 1/3]$ $f_{n+1}(x) = \dfrac{f_n(3x)}{2} \in [0, \frac{1}{2}] \subset [0,1]$

* Si $x \in [1/3, 2/3]$ $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2} \in [0,1]$

* Si $x \in [\frac{2}{3}, 1]$ $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{f_n(3x-2)}{2}$

$\in [\frac{1}{2}, 1] \subset [0,1]$

$1°$ $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n([0,1]) \subset [0,1]}$

Q_{20} voir à la fin.

Q_{21} Réc/n : $n=0$ $\underline{|f_1(x) - f_0(x)|} = \begin{cases} \frac{3x}{2} - x & \text{si } x \in [0, 1/3] \\ |x - 1/2| & \text{si } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \frac{1-x}{2} & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$

$\leqslant \begin{cases} 1/6 \\ |\frac{1}{3} - 1/2| \\ \frac{1 - 2/3}{2} \end{cases} \leqslant \underline{\dfrac{1}{2^1 \times 3}}$

donc H_0 vraie

Si c'est vraie pour $n-1$ avec $n \geq 1$

$$\left| f_{n+1}(x) - f_n(x) \right| = \begin{cases} \dfrac{|f_n(3x) - f_{n-1}(3x)|}{2} & \text{si } x \in [0, 1/3] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ \dfrac{|f_n(3x-2) - f_{n-1}(3x-2)|}{2} & \text{si } x \in [2/3, 1] \end{cases}$$

$$\leq \max\left(\frac{1}{3 \times 2^{n+1}}, 0, \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}\right) \quad \text{par hyp. de réc. et 3(a)}$$

$$\leq \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}$$

d'où $\boxed{\forall x \in [0,1] \quad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}}$

Q22 Par CBSG et TC, la suite $(f_n(x))$ cvg pour tout $x \in [0,1]$. Notons $f(x)$ sa limite.

$\forall x \in [0,1] \ \forall N \geq n \geq 0$:

$$\left| \sum_{k=n}^{N} f_{k+1}(x) - f_k(x) \right| \leq \frac{1}{3} \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{3 \cdot 2^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

donc $|f_{N+1}(x) - f_n(x)| \leq \dfrac{1}{3 \cdot 2^n}$

puis $N \to \infty$: $|f(x) - f_n(x)| \leq \dfrac{1}{3 \cdot 2^n}$

cqs $0 \leq \|f_n - f\|_{\infty,[0,1]} \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

d'où $\boxed{(f_n) \text{ c.u. sur } [0,1]}$

Q2.3 * $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq f_n(x) \leq 1$

$n \to \infty : 0 \leq f(x) \leq 1$

d'où $\boxed{f([0,1]) \subset [0,1]}$

* Avec 3 cas et par récurrence (comme à $Q_{2.1}$),

on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \nearrow$ et par cvg simple ;

d $\boxed{f \text{ croissante sur } [0,1]}$

* Par récurrence, f_n est C^0 sur $[0,1]$: oui pour $n=0$ et si f_n $C^0/[0,1]$, alors par TG f_{n+1} C^0 sur $[0,1]-\{1/3, 2/3\}$.

$\lim_{x \to 1/3^-} f_{n+1}(x) = \frac{f_n(1)}{2} = \frac{1}{2} = \lim_{x\to 1/3^+} f_{n+1}(x)$ idem en $\frac{2}{3}$

(16)

cqs : $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n $C^0/[0,1]$ et par c.u. sur $[0,1]$ (Q_{22}), $\boxed{f \ C^0 \text{ sur } [0,1].}$

* $\forall n \in \mathbb{N}$ $\underset{(\text{réc.})}{f_n(0) = 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc $f(0) = 0$

idem $\underset{(\text{réc})}{f_n(1) = 1}$ donc $f(1) = 1$.

Par T.V.I. $[0,1] = [f(0), f(1)] \subset f([0,1])$.

Avec le 1er pt de cette Q_{23} :

cl $\boxed{f \text{ surjective de } [0,1] \text{ vers } [0,1]}$

<u>Remarques</u>:

$f_1(x) = \frac{1}{2}$ ssi $x = \overline{0,1**\ldots}^3$

$f_2(x) = \frac{1}{4}$ ssi $x = \overline{0,01*\ldots}^3$

$= \frac{1}{2}$ ssi $x = \overline{0,1*\ldots}^3$

$= 3/4$ — $x = \overline{0,11*}^3$ réc. ……

Si on note $K = \{x \in [0,1] \setminus x$ possède un 1 ds son écriture propre en base 3 $\}$

ensemble de Cantor

On peut montrer que :

* f dérivable sur $[0,1]-K$ de dérivée nulle

* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ si $a \in K$

Fin

Méthode 2 de Q_{14} ($\hat{m}$ notations que Méthode 1)

* $(\sum u_n)$ cvg simplement vers φ sur $I=[0,\pi]$
(fait en Q_{11})

* u_n est $C^0/_I$ par TG et φ $C^0/_I$ par Q_{11}.

* $\forall n \geq 1,\ 0 \leq \int_0^\pi |u_n(x)|dx \leq \int_0^\pi \frac{2}{3^n}dx = \frac{6\pi}{3^n}$

Comme $(\sum \frac{1}{3^n})$ cvg, par TC, $\left(\sum \int_0^\pi |u_n(x)|dx\right)$ cvg

cqs par th. d'intégration T. à T. de Lebesgue :

$$\int_0^\pi \varphi(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{1+\sin nx}{3^n}dx$$

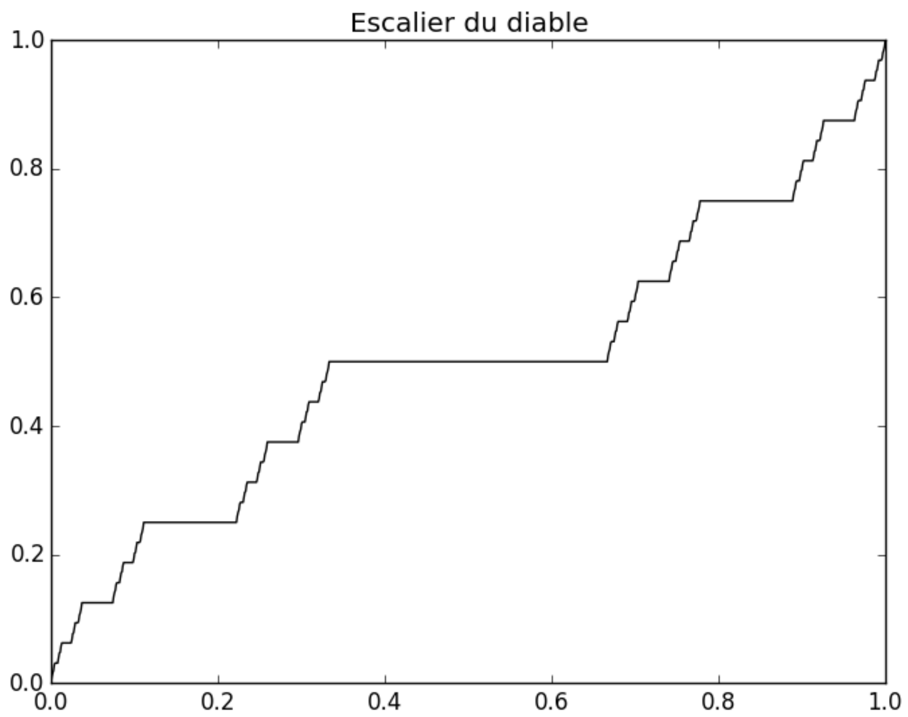
On conclut alors comme la méthode 1.

18

```
from math import *
from random import *
import matplotlib.pyplot as pp
import numpy as np


def flotVersTern(n,x):
    L=[floor(3**n*x)-3*floor(3**(n-1)*x) for n in range(1,n+1)]
    return(L)

def ternVersFlot(L):
    n=len(L)
    s=sum(L[k]/3**(k+1) for k in range(n))
    return s

def ajout(L):
M=L[:] # pour ne pas modifier la liste L
    n=len(L)
    s=sum(L[k] for k in range(n))
    if s%2==0:
        M.append(-1)
    else:
        M.append(-2)
    return M

def verif(L):
    n=len(L)
    s=sum(L[k] for k in range(n-1))
    if (s%2==0 and L[n-1]==-1) or(s%2==1 and L[n-1]==-2):
        return True
    else:
        return False

def T(n,N):
    tirage=randint(1,N)
    if tirage==1:
        return 0
    elif tirage==2:
        return 1
    else:
        return 2

def X(N):
    s=0
    for n in range(1,N+1):
        s=s+T(n,N)/3**n
    return s

def espX(N,nb):
    s=0
    for i in range(nb):
        s=s+X(N)
```

Saisissez du

```
    return [s/nb,(1-3/2/N)*(1-1/3**N)]

#In [1]: espX(11,1000001)
#Out[1]: [0.8634447418230926, 0.8636314883838128]

def varX(N,nb):
    s=0
    for i in range(nb):
        s=s+X(N)**2
    v=s/nb-espX(N,nb)[0]**2
    return [v,(5/8/N-9/8/N**2)*(1-1/9**N)]

#In [2]: varX(8,1000001)
#Out[2]: [0.060362076610352866, 0.06054687359346139]

def cantor(n,x):
    if n==0:
        return x
    else:
        if x<1/3:
            return cantor(n-1,3*x)/2
        elif x<2/3:
            return 1/2
        else:
            return 1/2+cantor(n-1,3*x-2)/2

clf()
X=np.linspace(0,1,1000)
Y=[cantor(10,x) for x in X]
pp.plot(X,Y,'black',linewidth=1) # tracé de la courbe
pp.title('Escalier du diable')   # donner un titre
```



Mines MP 2017 $\qquad X^TX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ et $X^TDX = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ $\qquad$ CB* $\qquad$ (1)

(un peu modifié)

1) $\Rightarrow$] Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq (0)$ |

$$SX = \lambda X$$

donc $\quad X^TSX = \lambda X^TX > 0$

Or si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\quad X^TX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0 \quad$ car $\exists i \mid x_i \neq 0$

d'où $\lambda > 0 \qquad$ et donc $\quad \underline{sp(S) \subset \mathbb{R}^{+*}}$

$\Leftarrow$] Le théorème spectral assure que S est diagonalisable et que de + : $S = PDP^T$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Comme $sp(S) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $\forall i : \lambda_i > 0$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $X^TSX = X^TPDP^TX = Y^TDY$ avec

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P^TX$. Donc $X^TSX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geqslant 0$ et de + :

$X^TSX = 0 \Rightarrow \forall i : \lambda_i y_i^2 = 0 \Rightarrow \forall i : y_i = 0 \quad (\lambda_i > 0)$

$$\Rightarrow Y = P^TX = (0) \Rightarrow P^{-1}Y = X = (0).$$

Donc $\underline{X \neq (0) \Rightarrow X^TSX > 0}$

d'où $\boxed{S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow sp(S) \subset \mathbb{R}^{+*}}$

2) Comme S est symétrique réelle, elle est diagonalisable (2)

et $S = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = P^T$.

D'après la 1), $\forall i\ \lambda_i > 0$, donc $D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}^2$

Posons $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$, $S = P\Delta^2 P^{-1}$
$= (P\Delta P^{-1})^2$

<u>cqs</u>: Posons $\underline{R = P\Delta P^{-1} = P\Delta P^T}$, on a :

* $\det R = \det \Delta > 0$ donc $\underline{R \in GL_n(\mathbb{R})}$.

* $S = R^2$ et $R^T = R$ donc $\underline{S = R^T R}$

<u>Réciproquement</u> : si $S = R^T R$, $S^T = S$, donc $S \in S_n(\mathbb{R})$.

$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), X \neq (0) : X^T S X = X^T R^T R X = Y^T Y$ avec

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = RX$. Comme $X \neq (0)$ et $R \in GL_n(\mathbb{R})$, $Y \neq (0)$

d'où $X^T S X = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 > 0$ donc $\underline{S \in S_n^{++}(\mathbb{R})}$

d' $\boxed{S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \exists R \in GL_n(\mathbb{R}) \setminus S = R^T R}$

3) $\forall (S, T) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in [0, 1]$:

* $(\lambda S + (1-\lambda)T)^T = \lambda S + (1-\lambda)T \in S_n(\mathbb{R})$

* $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq (0)$:

$$\alpha = X^T[\lambda S + (1-\lambda)T]X = \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \underbrace{X^T S X}_{> 0} + \underbrace{(1-\lambda)}_{\geq 0} \underbrace{X^T T X}_{> 0} \geq 0$$

et $\alpha = 0 \Rightarrow \lambda = 1-\lambda = 0$: impossible

donc $\lambda S + (1-\lambda)T \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. d'où $\boxed{S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ convexe}}$

4) $$\phi : \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} \longrightarrow E$$
$$((\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}), (x_1, \dots, x_{n+1})) \longmapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$$

D'après le préambule, $\underline{\mathrm{conv}(K) = \phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})}$

* ϕ est continue par TG (et $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ $C^0/\mathbb{R}\times E$).

* $\mathcal{H}$ est fermé, car si on pose $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \longmapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i$

on a $\mathcal{H} = \varphi^{-1}(\{1\}) \cap (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ et comme φ est C^0,

$\{1\}$ fermé et $(\mathbb{R}^+)^{n+1}$ fermé, $\mathcal{H}$ est $\underline{\text{fermé}}$

* $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathcal{H} \Rightarrow \forall i : 0 \leq \lambda_i \leq 1$

donc $\underline{\mathcal{H} \text{ borné}}$

* $\mathcal{H}$ est donc compact, K compact et un produit de compacts est compact donc $\underline{\mathcal{H} \times K^{n+1} \text{ compact}}$

Par image continue d'1 cpt : cl° $\boxed{\text{conv}(K) \text{ compact}}$

5) $\langle e_1 + e_i | e_1 - e_i \rangle = \langle e_1 | e_1 \rangle - \langle e_i | e_i \rangle = 1 - 1 = 0.$

donc $\langle g(e_1 + e_i) | g(e_1 - e_i) \rangle = 0$

soit $\langle g(e_1) | g(e_1) \rangle - \langle g(e_i) | g(e_i) \rangle = 0$ (g linéaire)

d'où $\underline{\|g(e_1)\| = \|g(e_i)\|}$, $\forall i \in [\![2, n]\!]$

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, $g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i g(e_i)$ et comme

$\langle e_i | e_j \rangle = 0$, pour $i \neq j$, $\langle g(e_i) | g(e_j) \rangle = 0$.

donc $\|g(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \|g(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \|g(e_1)\|^2$

$= \|g(e_1)\|^2 \|x\|^2$

cl° : $\boxed{\text{avec } k = \|g(e_1)\|, \forall x \in E : \|g(x)\| = k\|x\|}$

* Si $k = 0$, $g = 0 = \underbrace{0 \cdot Id_E}_{\text{homothétie}} \circ \underbrace{Id_E}_{\text{endo. } \perp}$

* Si $k \neq 0$, posons $f = \frac{1}{k} g$, $\forall x \in E$ $\|f(x)\| = \|x\|$

cqd f est un endo. orthogonal et si l'on pose : ⑤

$h = \frac{1}{k} Id_E$, h est une homothétie et $\underline{g = h \circ f}$

d'où $\boxed{g \text{ est la composée d'1 homothétie et d'1 endo. } \perp}$

* voir feuille ⑤ bis

6) * $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \longmapsto M^T M$, φ composée de $(M,N) \longmapsto MN^T$

bilinéaire donc C^0 et de $M \longmapsto (M,M)$ linéaire donc C^0.

D'où φ C^0 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$, soit

$\underline{O_n(\mathbb{R}) \text{ fermé}}$.

* Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, $A^T A = I_n$, donc $\|A\|^2 = Tr(A^T A) = n$,

donc $O_n(\mathbb{R}) \subset B_F((0), \sqrt{n})$ pour la norme de l'énoncé,

$\underline{O_n(\mathbb{R}) \text{ bornée}}$

car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dim. finie

* $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ d'où $\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ compact de } GL_n(\mathbb{R})}$

7) S'il existait $y \in E$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ st↗ \

$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} y$, alors $x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{TG} y - y = 0$

Or $\varphi(n+1) \neq \varphi(n)$ donc $\| x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)} \| \geq \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$

* $A \longmapsto \mathrm{Tr}(A^T B)$ est linéaire car la trace et la transposée le sont. ⑤ b))

* $\langle B | A \rangle = \mathrm{Tr}(B^T A)$

$$= \mathrm{Tr}((B^T A)^T)$$

$$= \mathrm{Tr}(A^T B) = \langle A | B \rangle$$

donc $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire symétrique

* $$A^T A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i,1}^2 & & * \\ & \sum_{i=1}^{n} a_{i,2}^2 & \\ & & \ddots \\ * & & \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} \end{pmatrix}$$

donc $\langle A | A \rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 \geqslant 0$

et $\langle A | A \rangle = 0 \Rightarrow \forall i,j \quad a_{ij} = 0$

$$\Rightarrow A = (0)$$

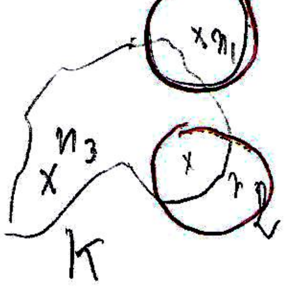
cl : $\boxed{\langle \cdot | \cdot \rangle \text{ produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

Absurd d° $\boxed{val(x) = \emptyset}$

8) Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0 \mid \forall p \in \mathbb{N}^*$ et $\forall (x_1, \dots, x_p) \in K^p$

$$K \not\subset \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon)$$

* Pour $p=1$ et $x_1 \in K$, $K \not\subset B(0, \varepsilon)$: $\exists x_2 \in K \mid$ $x_2 \notin B(x_1, \varepsilon)$ donc $\underline{\|x_2 - x_1\| \geqslant \varepsilon}$



* Pour $p=2$: $K \not\subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$

donc $\exists x_3 \in K \setminus B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$

d'où $\underline{\|x_3 - x_1\| \geqslant \varepsilon \text{ et } \|x_3 - x_2\| \geqslant \varepsilon}$

* Supposons construit $(x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$: $\|x_i - x_j\| \geqslant \varepsilon$. Pour $p = n$; $K \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$, donc $\exists x_{n+1} \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$, d'où $\|x_{n+1} - x_i\| \geqslant \varepsilon$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$

<u>Cqs</u> On a construit une suite de K : $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 : n \neq p \Rightarrow \|x_n - x_p\| \geqslant \varepsilon$.
Absurde avec le 7) car (x_n) possède une suite extraite convergente dans K (compacité).

d° $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N}^* \text{ et } \exists (x_1, \dots, x_p) \in K^p \mid K \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon)}$

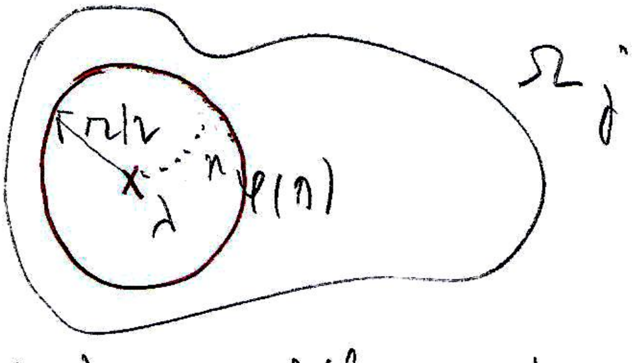
9) supposons $\forall \alpha > 0,\ \exists x \in K \mid \forall i \in I \quad B(x, \alpha) \not\subset \Omega_i$

* $\forall n \in \mathbb{N}$, pour $\alpha = \frac{1}{2^n} > 0$, $\exists x_n \in K \mid \forall i \in I \ B(x_n, \frac{1}{2^n}) \not\subset \Omega_i$

* Comme K compact, il existe $\lambda \in K$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ st $\nearrow$ | $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} \lambda$. Comme $\lambda \in K \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$: $\exists j \in I \mid \lambda \in \Omega_j$.

Comme Ω_j ouvert, $\exists r > 0 \mid B(\lambda, r) \subset \Omega_j$

Pour $\frac{r}{2} > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N \quad x_{\varphi(n)} \in B(\lambda, r/2)$
(déf de cvg)



Montrons qu'il existe $n \in \mathbb{N} \mid B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{2^{\varphi(n)}}) \subset B(\lambda, r)$

analyse soit $y \in B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{2^{\varphi(n)}})$

$$\|y - \lambda\| \leq \|y - x_{\varphi(n)}\| + \|x_{\varphi(n)} - \lambda\|$$
$$\leq \frac{1}{2^{\varphi(n)}} + \underset{\text{si } n \geq N}{r/2}$$

il suffit donc que $\frac{1}{2^{\varphi(n)}} \leq \frac{r}{2}$

8

$\exists N' \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N' : \frac{1}{2^{\varphi(n)}} \leq \frac{r}{2}$

posons $n_0 = \max(N, N')$; $\underbrace{B\left(x_{\varphi(n_0)}, \frac{1}{2^{\varphi(n_0)}}\right) \subset B(\lambda, r) \subset \Omega_j}_{\text{absurde}}$

d'o $\boxed{\exists \alpha > 0 \mid \forall x \in K, \exists i \in I \mid B(x, \alpha) \subset \Omega_i}$

Avec le 8) $\exists p > 0, \exists (x_1, \dots, x_p) \in K^p \mid$

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{p} B(x_k, r) \quad (\text{avec } \varepsilon = r > 0 \text{ du } 9^\circ)$$

Avec le 9), $\forall k \in [\![1, p]\!]\ \exists i_k \in I \mid B(x_{i_k}, \alpha) \subset \Omega_{i_k}$

d' $\boxed{K \subset \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}}$

10) Posons $\Omega_i = E - F_i$: Ω_i ouvert de E

$$\bigcup_{i \in I} \Omega_i = \bigcup_{i \in I} E - F_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{loi de Morgan}}}{=} E - \bigcap_{i \in I} F_i = E$$

donc $K \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ d'où avec le 9), $\exists (i_1, \dots, i_p) \in I^p \mid$

$K \subset \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}$ donc $\underbrace{E - \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}}_{= \bigcap_{i=1}^{p} F_{i_k}} \subset E - K$

donc $\bigcap_{k=1}^{p} F_{i_k} \subset K \cap E-K = \phi$

d'où $\boxed{\bigcap_{k=1}^{p} F_{i_k} = \phi}$

11) : voir p 23

12 a) * l'application nulle $\theta \in I_a$

* Soit $(f,g) \in I_a^2$ et $\varphi \in \mathcal{A}$

$(f-g)(a) = 0$ et $f\varphi(a) = f(a) \times \varphi(a) = 0$

d'où $\boxed{I_a \text{ idéal de } \mathcal{A}}$

Supposons I_a principal, donc $\exists f \in I_a \setminus I_a = f\mathcal{A}$.

Comme $f(a) = 0$, la fonction $g = \sqrt{|f|}$ est définie et C^0 sur $[0,1]$ et $g(a) = \sqrt{0} = 0$, donc :

$\exists \varphi \in \mathcal{A} \setminus g = f\varphi$ donc $g^2 = |f| = f^2\varphi^2$.

<u>Problème pour simplifier</u> si $f(x) = 0$. Or $h : x \mapsto x-a$ vérifie $h \in I_a$ donc $h = f\psi$ et donc $\forall x \neq a$:

$f(x) \neq 0$.

D'où $|f| = f^2\varphi^2 \Rightarrow \forall x \neq a,\ |f(x)| = |f(x)|^2 \varphi(x)^2$

donc $1 = |f(x)| \varphi(x)^2$ et en faisant $x \xrightarrow[\neq]{} a$:

On a $1=0$: absurde d'où $\boxed{I_a \text{ non principal}}$ (16)
$(f(a)=0)$

b) Si $I = \mathcal{A}$, la fonction $1_{\mathcal{A}} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\in I$ et
$x \longmapsto 1$

est inversible.

Réciproquement si $\exists f \in I$, inversible donc $\exists g \in \mathcal{A} \mid$
$f \times g = g \times f = 1_{\mathcal{A}}$, par superstabilité, $1_{\mathcal{A}} \in I$ puis
$\forall \varphi \in \mathcal{A} \quad \varphi = \varphi \times 1_{\mathcal{A}} \in I$.

d' $\boxed{I = \mathcal{A} \iff I \cap \mathcal{A}^* \neq \emptyset}$

c) Soit I un idéal $\mid$ $I_a \subset I \subset \mathcal{A}$ et supposons
$I_a \neq I$. Montrons $I = \mathcal{A}$

$I_a \subset I$ et $I_a \neq I \implies \exists f \in I \setminus I_a$, donc $f(a) \neq 0$.

Montrons que $I \cap \mathcal{A}^* \neq \emptyset$. Or $\mathcal{A}^* = \{\varphi \in \mathcal{A} \mid \forall x \in [0,1] :$
$\varphi(x) \neq 0\}$

Soit $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x)^2 + |x-a|$

$\varphi \in \mathcal{A}$ (TG) et $\varphi = f \times f + h$ avec $h : x \longmapsto |x-a|$

Comme $h \in I_a \subset I$ et I superstable, $\varphi \in I$

Or $\forall x \in [0,1]$ $\psi(x) > 0$ (m̂ si a) donc

$\psi \in I \cap \mathcal{A}^*$, avec la b), $I = \mathcal{A}$

d'$\boxed{I_a \text{ idéal maximal}}$

d) Soit J un idéal maximal et supposons que :

$\forall a \in [0,1]$ $J \subset I_a$

Posons $\forall \varphi \in \mathcal{A}$: $F_\varphi = \{x \in [0,1] \mid \varphi(x) = 0\}$, comme

φ est C^0 sur $[0,1]$, F_φ est un fermé relatif de $[0,1]$:

$\exists F'_\varphi$ fermé de $\mathbb{R} \mid F_\varphi = F'_\varphi \cap [0,1]$ donc

F_φ est un fermé de $\mathbb{R}$ et comme $J = I_a$, $\forall a$,

$\bigcap_{\varphi \in J} F_\varphi = \emptyset$ (sinon $\exists a \in \bigcap_{\varphi \in J} F_\varphi$ et $J \subset I_a$)

On applique la 10) avec $\underline{E = \mathbb{R}^1}$ (espace euclidien !) et

$\underline{K = [0,1]}$: $\exists (\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in J^p \mid \bigcap_{i=1}^{p} F_{\varphi_i} = \emptyset$

Considérons $\psi = \varphi_1^2 + \dots + \varphi_p^2$, on a $\psi \in J$ (idéal)

et $\forall x \in [0,1]$ $\psi(x) \geq 0$ et si $\psi(x) = 0$, $x \in \bigcap_{i=1}^{p} F_{\varphi_i} = \emptyset$

$\rightarrow\!\leftarrow$

donc $\varphi \in J \cap \mathcal{A}^*$ d'où $J = \mathcal{A}$ absurde (déf de idéal max.)

Cqs $\exists a \in [0,1] \mid J \subset I_a$ de plus $J \subset I_a \subsetneq \mathcal{A}$

par maximalité, d'o $\boxed{J = I_a}$

13) * Soit $x \in E$, étudions $\varphi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$
$u \longmapsto \|u(x)\|$

$(u,x) \longmapsto u(x)$ est bilinéaire en dim finie donc continue sur $\mathcal{L}(E) \times E$ et $y \longmapsto \|y\|$ aussi C^0 / E

donc par composée, φ continue $/ \mathcal{L}(E)$.

Par T.B.A $\varphi(G)$ bornée donc

$N_G(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ d'o $\boxed{N_G \text{ bien définie}}$

* Soit $x \in E \mid N_G(x) = 0$, $Id_E \in G$ (sous-gpe)

donc $0 \leqslant \|id_E(x)\| = \|x\| \leqslant N_G(x) = 0$

donc $\|x\| = 0$ d'où $x = 0$.

* Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$\forall u \in G \quad \|\lambda u(x)\| = |\lambda| \cdot \|u(x)\| \leqslant |\lambda| N_G(x)$

donc $N_G(\lambda x) \leq |\lambda| N_G(x)$

si $\lambda = 0$, on a l'égalité,

si $\lambda \neq 0$, $N_G(\frac{1}{\lambda}\lambda x) = N_G(x) \leq |\frac{1}{\lambda}| N_G(\lambda x)$

donc $|\lambda| N_G(x) \leq N_G(\lambda x)$ cqs $\underline{N_G(\lambda x) = |\lambda| N_G(x)}$

* $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall u \in G$ $\|u(x+y)\| \leq \|u(x)\| + \|u(y)\|$ (u linéaire)

donc $\|u(x+y)\| \leq N_G(x) + N_G(y)$

cqs $\underline{N_G(x+y) \leq N_G(x) + N_G(y)}$

d'o $\boxed{N_G \text{ norme sur } E}$

12) • $N_G(u(x)) = \sup\limits_{w \in G} \|v(u(x))\| = \sup\limits_{w \in G} \|v \circ u(x)\|$

Considérons $\begin{array}{l} \phi : G \longrightarrow G \\ \quad v \longmapsto v \circ u \end{array}$, ϕ bien définie car

G sous-gpe et $\begin{array}{l} \psi : G \longrightarrow G \\ \quad v \longmapsto v \circ u^{-1} \end{array}$, on a $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi = Id_G$

donc ϕ bijective (et $\phi^{-1} = \psi$) d'où

$\{\|v \circ u(x)\|, v \in G\} = \{\|v(x)\|, v \in G$

d'o $\boxed{N_G(u(x)) = N_G(x)}$

- Si $y = \lambda x$, $\lambda \geq 0$, $\forall u \in G$

$$\underline{N_G(x+y)} = N_G((1+\lambda)x) = \underset{(\geq 0)}{(1+\lambda)} N_G(x)$$

$$= N_G(x) + \lambda N_G(x) = \underline{N_G(x) + N_G(y)}$$

Réciproquement, soit $(x,y) \in E^2 \setminus x \neq 0$ et $N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y)$

Par TBA vu au (1), $\exists u \in G \setminus$

$$N_G(x+y) = \|u(x+y)\| \leq \|u(x)\| + \|u(y)\|$$

or $\|u(x+y)\| = N_G(x) + N_G(y) \geq \|u(x)\| + \|u(y)\|$

$\uparrow$ $u \in G$ et $N_G = \sup\ldots$

donc $\|u(x)\| + \|u(y)\| \leq \|u(x+y)\| \leq \|u(x)\| + \|u(y)\|$

d'où $\|u(x+y)\| = \|u(x)\| + \|u(y)\|$

donc $\|u(x) + u(y)\|^2 = (\|u(x)\| + \|u(y)\|)^2$

donc $2(u(x)|u(y)) = 2\|u(x)\| \cdot \|u(y)\|$

cas d'égalité de Cauchy-Schwarz : $\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus u(y) = \lambda u(x)$ ($u(x) \neq 0$ car $x \neq 0$ et $u \in GL(E)$)

donc $2(u(x)|\lambda u(y)) = 2\|u(x)\| \cdot |\lambda| \|u(x)\|$

soit $\lambda = |\lambda|$ car $u(x) \neq 0$

donc $u(y) = \lambda u(x)$ et $\lambda \geq 0$.

d'où $u(y-\lambda x)=0$ et $u\in GL(E)$ donc $y-\lambda x=0$

d' $\boxed{N_G(x+y)=N_G(x)+N_G(y) \iff \exists \lambda\in\mathbb{R}^+ \mid y=\lambda x}$

15) $x_n = \dfrac{x+\dots+u^n(x)}{n}$. barycentre positif de points de K ($u(K)\subset K$) et K convexe : d' $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^* \; x_n\in K}$

Comme K compact, il existe $a\in K$ et $\varphi : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ st↗ |

$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

$u(x_n) = \dfrac{u(x)+\dots+u^n(x)}{n}$ (u linéaire)

donc $u(x_n)-x_n = \dfrac{u^n(x)-x}{n}$

soit $\boxed{\|u(x_n)-x_n\| \le \dfrac{\delta(K)}{n}}$

* u C^0 car linéaire en dim. finie
* $\dfrac{\delta(K)}{\varphi(n)} \to 0$

par critère séquentiel et théorème d'encadrement $\boxed{u(a)=a}$

16) $\forall x\in K$ $u(x) = \dfrac{u_1(x)+\dots+u_n(x)}{n} \in K$ car K convexe et $\forall i$ $u_i(x)\in K$). d' $\boxed{u(K)\subset K}$

d'où avec le 15)), $\boxed{\exists a\in K \mid u(a)=a}$

(16)

17) $N_G\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i(a)\right) = N_G(u(a)) = N_G(a) = N_G(u_j(a))$, $\forall j$

avec le 14)

donc $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} N_G(u_j(a)) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} N_G(a) = N_G(a) = N_G\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i(a)\right)$

d'où $\boxed{N_G\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i(a)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} N_G(u_i(a))}$

on multiplie par n et on isole le "j" :

$$N_G\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} u_i(a)\right) = N_G(u_j(a)) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} N_G(u_i(a)) \quad (*)$$

donc $N_G(u_j(a)) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} N_G(u_i(a)) \leq N_G(u_j(a)) + N_G\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} u_j(a)\right)$

$\leq$ —— $+ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} N_G(u_j(a))$

$=$

donc $\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} N_G(u_j(a)) = N_G\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} u_j(a)\right)$

d'où avec $(*)$; $\boxed{N_G\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} u_i(a)\right) = N_G(u_j(a)) + N_G\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} u_i(a)\right)}$

18) Si $u_j(a)=0$, $a=0$ ($u_j \in GL(E)$) et $\lambda_j=0$ convient

sinon $\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r} u_i(a)=\lambda_j u_j(a)$ avec $\lambda_j \geqslant 0$ et le 14)

donc $r u(a)-u_j(a) = \lambda_j u_j(a)$

d'où $\boxed{a=u(a)=\frac{(\lambda_j+1)}{r} u_j(a)}$

19) On a donc $\forall i \in [\![1,r]\!]$ $u_i(a)=\frac{r}{\lambda_j+1} a$ d'où

$$N_G(u_i(a)) \underset{\overset{\uparrow}{14)}}{=} N_G(a) = \frac{r}{\underbrace{\lambda_j+1}_{\geqslant 0}} N_G(a)$$

Si $a=0$, alors a point fixe de u_i (linéarité)

Si $a\neq 0$, alors $N_G(a)\neq 0$ donc $\frac{r}{\lambda_j+1}=1$

d'où $\boxed{\forall i \in [\![1,r]\!] \quad u_i(a)=a}$

20) Posons $F_u=\{x\in K \mid u(x)=x\}$ pour tout $u\in G$

F_u fermé relatif de K donc fermé de E (idem 12 d)

Supposons $\bigcap_{u\in G} F_u=\emptyset$ alors $\exists (u_1,\dots,u_r)\in G^r \mid$

$\bigcap_{i=1}^{n} F_{u_i} = \phi$: absurde avec le 19)

cqs $\bigcap_{u \in G} F_u \neq \phi$: soit $a \in \bigcap_{u \in G} F_u$,

d'où $\boxed{a \in K \text{ et } \forall u \in G \quad u(a) = a}$

21) * $\rho_A(\lambda M + M') = A^T(\lambda M + M')A$

$= \lambda A^T M A + A^T M' A = \lambda \rho_A(M) + \rho_A(M')$

donc $\underline{\rho_A \text{ linéaire}}$

* $\rho_A(M) = (0) \Rightarrow A^T M A = (0) \Rightarrow (A^{-1})^T A^T M A A^{-1} = (0)$

$\Rightarrow M = (0)$ car $A \in G \subset GL_n(\mathbb{R})$

donc ρ_A injective en dim finie d'où $\boxed{\rho_A \in GL_n(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$

* $H = F(G)$ et comme G compact et F C^0/G,

d'où $\boxed{H \text{ compact}}$

* → G sous-gpe de $GL_n(\mathbb{R})$, donc $I_n \in G$ et $\underline{\rho_{I_n} \in H}$

→ $\forall (\varphi, \psi) \in H$, $\exists (A, B) \in G^2 \mid \varphi = \rho_A$ et $\psi = \rho_B$

$\rho_A \circ \rho_B(M) = \rho_{BA}(M)$ donc $\varphi \circ \psi = \rho_{BA} \in H$ $(BA \in G)$

On a donc $\rho_A \circ \rho_{A^{-1}} = \rho_{I_n} = Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, d'où

$\underline{\varphi^{-1} = \rho_{A^{-1}} \in H}$ $(A^{-1} \in G)$

$\boxed{\text{d}^{\circ} \ H \text{ sous-gpe de } GL_n(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$

22) * Avec la réciproque de 2), $\boxed{\Delta \subset S_n^{++}(\mathbb{R})}$

* L'application $\Psi : A \longmapsto A^T A$ est C^0 par TG (ou mieux composée de $(A,B) \longmapsto AB$ et $A \longmapsto A^T$ resp. bilinéaire et linéaire en dim finie). Comme

$\Delta = \Psi(G)$, $\boxed{\Delta \text{ compact}}$

* Avec le 4), $\boxed{K \text{ compact}}$

* Comme $\Delta \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$ et que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe (3),

$\text{conv}(\Delta) \subset \text{conv}(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R})$

d° $\boxed{\text{conv}(\Delta) \subset S_n^{++}(\mathbb{R})}$

* Soit $M \in K$ et $A \in G$, Mq $\rho_A(M) \in K$

Avec l'introduction $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_{n^2+1}) \in \mathcal{H}$ $\exists (M_1, \dots, M_{n^2+1}) \in \Delta^{n^2+1}$

tel que $M = \sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i M_i$, on en déduit que

$\exists A_i \in G \mid M_i = A_i^T A_i$

$$\rho_A(M) = \sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i \rho_A(A_i^T A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i \underbrace{B_i^T B_i}_{\in \Delta} \quad \text{avec } B_i = A_i A \in G \text{ (groupe)}$$

Cqs $\rho_A(M) \in K$ et $\boxed{K \text{ stable par } \rho_A \ \forall A \in G}$

23) * On utilise le Th (Markov-Kakutani) avec G et K.

K est un compact convexe (22)) et non vide :

$I_n \in G$ et $I_n = I_n^T I_n \in \Delta \subset K$

et

G sous-gpe compact de $GL_n(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

On conclut avec le 20) : $\boxed{\exists M \in K \mid \forall A \in G \ \rho_A(M) = M}$

* Analyse : $(NAN^{-1})^T NAN^{-1} = I_n \Leftrightarrow N^{-1T} A^T N^T N A N^{-1} = I_n$

$\Leftrightarrow A^T N^T N A = N^T N$

Il suffit donc de pouvoir écrire $M = N^T N$

synthèse : Comme $M \in K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$, avec le 21)

$\exists N \in GL_n(\mathbb{R}) \mid M = N^T N$

Par équivalence (de l'analyse), on peut conclure :

$\boxed{\exists N \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \forall A \in G \quad NAN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})}$

* Posons $G_1 = \{NAN^{-1}, A \in G\}$,

on a, $\underline{G = N^{-1} G_1 N}$

- $\forall A \in G \; NAN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ donc $\underline{G_1 \subset O_n(\mathbb{R})}$
- $N I_n N^{-1} = I_n \in G_1$

si $NAN^{-1} \in G_1$ et $NBN^{-1} \in G_1$

$$(NAN^{-1})(NBN^{-1})^{-1} = NAN^{-1}NB^{-1}N^{-1} = N \underbrace{AB^{-1}}_{\in G} N^{-1}$$

donc G_1 sous-groupe.

d' $\boxed{G_1 \text{ sous-gpe de } O_n(\mathbb{R}) \text{ et } G = N^{-1} G_1 N}$

24) * $g \circ \sigma_p \circ g^{-1} \circ g \circ \sigma_p \circ g^{-1} = g \circ \underbrace{\sigma_p^2}_{id} \circ g^{-1} = id_{\mathbb{R}^n}$

* Avec les notations $\Pi_{b_0}(g \circ \sigma_p \circ g^{-1}) = NAN^{-1}$ où b_0 base canonique et $A = \Pi_{b_0}(\sigma_p) \in O_n(\mathbb{R}) \cap K$

donc $NAN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$

d' $\boxed{g \circ \sigma_p \circ g^{-1} \text{ symétrie orthogonale de } \mathbb{R}^n}$

Cherchons les vecteurs invariants :

$$g\circ\sigma_P\circ g^{-1}(x)=x \iff \sigma_P(g^{-1}(x))=g^{-1}(x)$$

$$\iff g^{-1}(x)\in \mathrm{Inv}(\sigma_P)=P$$

$$\iff x\in g(P)$$

d'où $\boxed{g\circ\sigma_P\circ g^{-1}=\sigma_{g(P)}}$

* $\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2 \setminus x\perp y$

si $x\neq 0$, posons $P=x^\perp$, on a $y\in P$

$\sigma_{g(P)}(g(x))=-g(x)$ et $\sigma_{g(P)}(g(y))=g(y)$

donc $g(x)\in g(P)^\perp$ et $g(y)\in g(P)$ (sym. $\perp$)

On a donc $g(x)\perp g(y)$ d'où $\boxed{g \text{ conserve l'orthog.}}$

* Le 5) dit qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ et $f\in O(\mathbb{R}^n)\setminus$

$g=\lambda f$ donc $N=\lambda\Pi$ où $\Pi\in O(\mathbb{R}^n)$

Donc $\lambda\Pi K(\lambda\Pi)^{-1}=\frac{\lambda}{\lambda}\Pi K\Pi^{-1}=\Pi K\Pi^{-1}\subset O_n(\mathbb{R})$

soit $K\subset\Pi^{-1}O_n(\mathbb{R})\Pi\subset O_n(\mathbb{R})$ car $\Pi\in O_n(\mathbb{R})$

d'où $\boxed{K=O_n(\mathbb{R})}$ (donc $O_n(\mathbb{R})$ sous-gpe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$)

11) $\lambda \in val(u) \iff \forall n \in \mathbb{N} : \forall \varepsilon > 0 \ \exists p \geq n \ / \ \|u_p - \lambda\| \leq \varepsilon$

$\iff \forall n \in \mathbb{N} : \forall \varepsilon \ B_F(\lambda, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$

$\iff \forall n \in \mathbb{N} : \lambda \in \bar{A}_n$

$\iff \lambda \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n$ d'où $\boxed{val(u) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n}$

Soit K ayant la propriété et supposons qu'il existe une suite u de K telle que $val(u) = \emptyset$.

On a donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n = \emptyset$ d'où avec le 10°)

$\exists n_1 < n_2 < \cdots < n_p \ / \ \bigcap_{i=1}^{p} \bar{A}_{n_i} = \emptyset$

Or $A_{n_p} \subset \cdots \subset A_{n_1}$ donc $\bar{A}_{n_p} = \emptyset$

absurde car $u_{n_p} \in A_{n_p} \subset \bar{A}_{n_p}$

d'où $\boxed{K \text{ est compact}}$