CCP - MP$_2$ - 2015 : exercice 2

DS10: Corrigé

2) $\underline{(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'}$

3) $\mathcal{C} = \text{vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}_{\text{c'est une base OTN}}\Big)$

Comme $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \in \mathcal{C}^\perp$ et $\dim \mathcal{C}^\perp = 4-3 = 1$, $\boxed{\mathcal{C}^\perp = \text{vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}_{\text{base OTN}}\Big)}$

4) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix}}_{\mathcal{C}} + \underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\3&0\end{pmatrix}}_{\mathcal{C}^\perp}$ donc $\boxed{p_{\mathcal{C}}(A) = \begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix}}$

et donc $d(A, \mathcal{C}) = \left\|\begin{pmatrix}0&0\\3&0\end{pmatrix}\right\| = 3$ d $\boxed{d(A, \mathcal{C}) = 3}$

1) $*\ (B|A) = \text{Tr}({}^tBA) = \text{Tr}({}^t({}^tBA)) = \text{Tr}({}^tAB) = (A|B)$

donc $(\cdot|\cdot)$ symétrique

$*\ (\lambda A + A'|B) = \lambda(A|B) + (A'|B)$ par linéarité de la trace et de la transposée.

$*\ (A|A) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}^2 \geqslant 0$ et nul ssi $\forall i,j : a_{ij} = 0$

d $\boxed{(\cdot|\cdot)\ \text{P.S}}$

CCP - MP$_1$ - 2011 : exercice 2

1. éq. homogène $y = \lambda e^{+\int \frac{3}{2x} dx} = \lambda e^{\frac{3}{2}\ln x} = \lambda x^{3/2}$

V.d.C. $y_0 = x^{3/2}$ et $y = \lambda y_0$ sol. de $(E) \Leftrightarrow 2x\lambda' y_0 = \sqrt{x}$

donc $\lambda' = \dfrac{\sqrt{x}}{2x\, x^{3/2}} = \dfrac{1}{2x^2}$ $\quad \lambda = \dfrac{-1}{2x}$

d'où $y_1 = \dfrac{-1}{2}\sqrt{x}$ solution particulière

cl : $\boxed{\mathcal{S}_{(E), \mathbb{R}_+^*} = \left\{ x \longmapsto \frac{-1}{2}\sqrt{x} + \lambda x^{3/2}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$

2. $f : x \longmapsto x^{3/2}$ est $\begin{cases} C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*, \ \forall x > 0 \ f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \\ C^0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \end{cases}$

par T.P.D., f est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(0) = 0$

donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto \lambda x^{3/2}$ C^1 sur $\mathbb{R}^+$

comme $x \longmapsto \sqrt{x}$ non C^1 sur $\mathbb{R}^+$, $\forall \lambda$, $\lim\limits_{x \to 0} y'(x) = +\infty$ ← y sol. de (E)

cl : $\boxed{\mathcal{S}_{(E), \mathbb{R}^+} = \emptyset}$

exercice 3

1) $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)(x-3)+1 = x^2-4x+4$

d'o $\boxed{\chi_A(x) = (x-2)^2}$

Avec Cayley-Hamilton, $(A-2I_2)^2 = (0)$

d'o $\boxed{B \text{ nilpotente}}$

$$e^{tA} = e^{2t}e^{tB} = e^{2t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tB)^n}{n!} = e^{2t}(I_2 + tB + 0)$$

$$= e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

d'o $\boxed{e^{tA} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}}$

2) le cours assure que la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} (S) \\ x(0)=1,\ y(0)=2 \end{cases}$ est $X(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d'o $\boxed{X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(1-3t) \\ e^{2t}(2+3t) \end{pmatrix}}$

3) $x'' = x' - y' = x' - (x+3y)$ or $y = x - x'$

donc $x'' = x' - x - 3(x-x') = 4x' - 4x$

d'o $\boxed{x'' - 4x' + 4x = 0}$

b) $x'(0) = x(0) - y(0) = -7$ d'o $\boxed{x'(0) = -7}$

c) le cours assure qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ /

$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = \lambda e^{2t} + \mu t e^{2t}$ car l'équation

caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$

Calcul de λ et μ

$x(0) = \lambda = -3$

$x'(t) = 2\lambda e^{2t} + \mu e^{2t} + 2\mu t e^{2t}$

donc $x'(0) = 2\lambda + \mu = -6 + \mu = -7$ (avec b))

soit $\mu = -1$ d'o $\boxed{x(t) = (-3-t)e^{2t}}$

d) $y = x - x' = (-3-t)e^{2t} + e^{2t} + (6+2t)e^{2t}$

d'o $\boxed{y(t) = (4+t)e^{2t}}$

CCP - MP$_2$ - 2011 : problème

1. c'est du cours chap. produit scalaire après Th. spectral.

2. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n val. propres de S (positives vu le r)) ↳ elles existent par le Th. spectral.

d'où $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{1/n}$

comme S est scindé, cl : $\boxed{\sqrt[n]{\det S} \leqslant \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(S)}$

3. (a) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $X^T M^T M X = (MX)^T MX = \|MX\|_2^2 \geqslant 0$

norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

cl : $\boxed{M^T M \in S_n^+}$

(b) $\sqrt[n]{\det M^T M} = \sqrt[n]{(\det M)^2} \leqslant \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(M^T M) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}^2$

comme tout est positif ($t \mapsto t^n$ ↗) $\boxed{(\det M)^2 \leqslant \left(\frac{1}{n}\right)^n \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}^2\right)^n}$

II

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, de matrice X ds $\mathcal{B}$ et X' ds $\mathcal{B}'$

idem pour $y \in \mathbb{R}^n$. On a $X = RX'$ et $Y = RY'$

$\varphi(x,y) = X^T A Y = (X')^T Y'$
$= X'^T(R^T A R)Y' = (X')^T I_n Y'$ et ceci $\forall (x', y') \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$

d'où $\boxed{R^T A R = I_n}$

(b) $C^T = R^T B^T R = R^T B R = C$ car $B \in S_n$ et C réelle.

Par le th. spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale

tel que $C = PDP^{-1}$ et $P^{-1} = P^T$. Si on pose $Q = P$

on a $\boxed{D = Q^T C Q}$

(c) On a $A = (R^{-1})^T R^{-1}$ et $B = (R^{-1})^T C R^{-1} = (R^{-1})^T (Q^{-1})^T D Q^{-1} R^{-1}$
$= (Q^{-1}R^{-1})^T D (Q^{-1}R^{-1})$

Or $(Q^{-1}R^{-1})^T Q^{-1}R^{-1} = (R^{-1})^T \underbrace{(Q^{-1})^T Q^{-1}}_{= I_n \text{ car } Q^{-1} \in O_n(\mathbb{R})} R^{-1} = (R^{-1})^T R^{-1} = A$

d $\boxed{\text{avec } P = Q^{-1}R^{-1} \in GL_n(\mathbb{R}),\ A = P^T P \text{ et } B = P^T D P}$

(d) $rg\, B = 1$ donc $\dim E_0 = 1$, $B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ d'où

$E_2(B) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ et comme (théorème spectral)

$E_2 \perp E_0$, $E_0 = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$

Si on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} P^T$ ③

d'où $B = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} P^T$

$$= P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^T$$

Posons $Q = (P^{-1})^T$, on a

$$\boxed{\begin{array}{l} Q^T B Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ : diagonale} \\ \text{et } \det Q = \frac{1}{\det P} = 2 \neq \pm 1 \text{ donc } Q \notin O_2(\mathbb{R}) \end{array}}$$

(ou bien $Q^T Q = P^{-1} P^T = 2 I_2 \neq I_2$)

5a) $n = 1$ $\quad 1 + \lambda_1 \geqslant 1 + \lambda_1$! donc $\underline{H_1 \text{ vraie}}$

si $\underline{H_n \text{ est vraie}}$

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+\lambda_i) \geqslant \left(1 + \prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)(1 + \lambda_{n+1}) \quad \text{car tout est positif}$$

$$\geqslant 1 + \prod_{i=1}^{n}\lambda_i + \underbrace{\lambda_{n+1} + \prod_{i=1}^{n+1}\lambda_i}_{\geqslant 0}$$

$$\geqslant 1 + \prod_{i=1}^{n+1}\lambda_i \quad \text{donc } \underline{H_{n+1} \text{ vraie}}$$

D'après le 4(a), $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ tel que :

$A = P^T P$ et $B = P^T D P$ d'où $\det A = (\det P)^2$ et

$\det B = (\det P)^2 \det D$ et $A + B = P^T (I_n + D) P^T$ d'où

$\det(A+B) = (\det P)^2 \det(I_n + D)$,

On $\det(I_n + D) = \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i) \geq 1 + \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det I_n + \det D$

d'où en multipliant par $(\det P)^2 > 0$, on a :

$$\boxed{\det(A+B) \geq \det A + \det B}$$

(b) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $X^T(A+B)X = X^T A X + X^T B X \geq 0$ donc $\underline{A+B \in S_n^+}$

Si $A \in S_n^{++}$ ou $B \in S_n^{++}$, on a le résultat par le (a).

Si $A \notin S_n^{++}$ et $B \notin S_n^{++}$ donc 0 est vp de A & B

d'où $\det A + \det B = 0 + 0 = 0 \leq \det(A+B)$ grâce au 1. et $A+B \in S_n^+$

d' : $\boxed{\forall (A,B) \in (S_n^+)^2 \quad \det(A+B) \geq \det A + \det B}$

6. (a) $\det(tA + (1-t)B) = (\det P)^2 \det(tI_n + (1-t)D)$

donc $\boxed{\det(tA+(1-t)B) = (\det P)^2 \prod_{i=1}^{n} (t+(1-t)\lambda_i)}$

(b) La fonction $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\ln''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$

d'où $\forall \lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$ $\ln(1 \times t + (1-t)\lambda_i) \geqslant t \ln 1 + (1-t)\ln \lambda_i$

d'où ($\exp \nearrow$) : $t+(1-t)\lambda_i \geqslant e^{(1-t)\ln \lambda_i} = \lambda_i^{1-t}$

cl $\boxed{\forall \lambda_i > 0 \quad t+(1-t)\lambda_i \geqslant \lambda_i^{1-t}}$

rem : Les λ_i, val. propres de B, sont st positif car $B \in S_n^{++}$.

(c)

On a donc $\det(tA+(1-t)B) \geqslant (\det P)^2 \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{1-t}$ car tout est > 0

$$\geqslant \left[(\det P)^2\right]^{t+1-t} \times 1^t \times \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1-t}$$

$$\geqslant \left[(\det P^2)\det I_n\right]^t \left[(\det P^2)\det D\right]^{1-t}$$

$$\geqslant (\det A)^t (\det B)^{1-t}$$

cl : $\boxed{\det(tA+(1-t)B) \geqslant (\det A)^t (\det B)^{1-t}}$

⑥

7.1(a) Soit $A \in S_n^+$ $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\exists D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

tel que $A = PDP^T$ (th. spectral) $\quad \lambda_i \geq 0$

Notons $A_p = P \begin{pmatrix} \lambda_1 + 1/p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n + 1/p \end{pmatrix} P^T$

On a $A_p \in S_n$ et ses vp sont les $\lambda_i + \frac{1}{p} \geq \frac{1}{p} > 0$

donc $A_p \in S_n^{++}$ et par TG, $\lim_{p \to \infty} A_p = PDP^T = A$

d'où $\boxed{S_n^{++} \text{ dense dans } S_n^+}$

1(b) Avec les notations ci-dessus : $\forall p \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(\det(A_p + B)\right)^{1/n} \geq (\det A_p)^{1/n} + (\det B)^{1/n} \quad (\text{c'est le } 7°))$$

d'où par TG, qd $p \to \infty$, il vient $\boxed{\det(A+B)^{1/n} \geq (\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n}}$

III

8.1(a) Si $T_1^T T_1 = T_2^T T_2$ alors $T_1 T_2^{-1} = (T_1^{-1})^T T_2^T$

On a donc $T_1 T_2^{-1} \in \mathcal{T}$ (matrice triangulaire sup. inversible)

or $(T^{-1})^T T_2^T$ est triangulaire inferieure donc

$T_1 T_2^{-1}$ est diagonale. $T_1 T_2^{-1} = D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ d'où

$$T_1 = D T_2 \quad \text{d'où} \quad \underbrace{T_1^T T_1}_{L} = T_2^T D^T D T_2 = T_2^T D^2 T_2$$

$$L = T_2^T T_2$$

comme T_2 et T_2^T inversibles, on peut simplifier d'où

$D^2 = I_n$ soit $\begin{pmatrix} d_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^2 \end{pmatrix} = I_n \Rightarrow \forall i \; d_i = \pm 1$

or T_1 et T_2 et donc T_2^{-1} sont à diagonales positives

$T_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$ et $T_2^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix}$ d'où $T_1 T_2^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}$

et $\alpha_i \beta_i = d_i \geq 0$ donc $\forall i \; d_i = 1$: $D = I_n$

csq $T_1 T_2^{-1} = I_n$ d'où $\boxed{T_1 = T_2}$

(b) $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & 3 \cdots & 3 \\ 1 & 2 & \vdots \; \ddots & \\ & & 3 & n \end{pmatrix}$

pour $n=2$ $\quad \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}}_{{}^tT_2} \underbrace{\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}}_{T_2} = \begin{pmatrix} a^2 & ac \\ ac & c^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A_2$

$a \geq 0 \Rightarrow a = 1$ d'où $c = 1$ et $b^2 = 1$, comme $b \geq 0$ $b = 1$

d'où $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ & $\hat{m}$ on montre $T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (8)

généralisons : posons $M_n = \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$M_n^T M_n = (c_{ij}) \quad c_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} m_{\alpha,i} m_{\alpha,j}$

si $i < j$, $c_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{i} m_{\alpha,j} = i = \min(i,j)$

si $i > j$ $c_{ij} = c_{j,i} = j = \min(i,j)$ car $M_n^T M_n \in S_n$

si $i = j$ $c_{i,i} = \sum_{\alpha=1}^{i} m_{\alpha,i} = i = \min(i,j)$

$\underline{\text{cl}^{\circ}}$: $\boxed{T_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}}$ $\quad$ rem. On a donc $A_n = T_n^T T_n \in \underline{S_n^{++}}$.

9. $T^T T = A \iff \begin{pmatrix} t_{1,1}^2 & t_{1,1}t_{1,2} & t_{1,1}t_{1,3} \\ t_{1,2}t_{1,1} & t_{1,2}^2 + t_{2,2}^2 & t_{1,2}t_{1,3} + t_{2,2}t_{2,3} \\ t_{1,3}t_{1,1} & t_{1,2}t_{1,3} + t_{2,2}t_{2,3} & t_{1,3}^2 + t_{2,3}^2 + t_{3,3}^2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

donc $\to$ $t_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$ / $t_{1,2} = \dfrac{a_{1,2}}{t_{1,1}}$ / $t_{1,3} = \dfrac{a_{1,3}}{t_{1,1}}$

$\to$ $t_{2,2} = \sqrt{a_{2,2} - t_{1,2}^2}$ / $t_{2,3} = \dfrac{a_{2,3} - t_{1,2}\, t_{1,3}}{t_{2,2}}$

$\to$ $t_{3,3} = \sqrt{a_{3,3} - t_{1,3}^2 - t_{2,3}^2}$

Voir fin de corrigé

10. (a) $\exists T \mid S = T^T T$ (choleski) donc $\det S = \det T^2$

Or $S = T^T T \Rightarrow s_{i,i} = \sum_{d=1}^{i} t_{d,i}^2 \Rightarrow s_{i,i} \geq t_{i,i}^2 > 0$

Comme T est triangulaire, $\det T = \prod_{i=1}^{n} t_{i,i}$ donc

$$\boxed{\det S = (\det T)^2 = \prod_{i=1}^{n} t_{i,i}^2 \leq \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}}$$

(b) On a $M^T M \in S_n^{++}$ (c'est le I 3(a) et 0 non val. pr. de $M^T M$)

$|\det M|^2 = \det M^T M \leq c_{i,i}$ avec $M^T M = (c_{i,j})$.

Or $c_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2$ d'où $\boxed{|\det M| \leq \left(\prod_{i=1}^{n} \left(\sum a_{k,i}^2\right)\right)^{1/2}}$

```
> # algorithme de CCP MP_2 2011
>
> restart:with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> cho:=proc(A,n)
  local T;
   T:=matrix(n,n);
   T[1,1]:=sqrt(A[1,1]);
   T[1,2]:=A[1,2]/T[1,1];
   T[1,3]:=A[1,3]/T[1,1];
   T[2,2]:=sqrt(A[2,2]-T[1,2]^2);
   T[2,3]:=(A[2,3]-T[1,2]*T[1,3])/T[2,2];
   T[3,3]:=sqrt(A[3,3]-T[1,3]^2-T[2,3]^2);
   T[2,1]:=0;
   T[3,1]:=0;
   T[3,2]:=0;
   evalm(T);
  end:
>
> A1:=matrix(3,3,[49,14,-14,14,20,-8,-14,-8,21]):
  evalm(A1),cho(A1,3),evalm(transpose(cho(A1,3))&*cho(A1,3));
```

$$\begin{bmatrix} 49 & 14 & -14 \\ 14 & 20 & -8 \\ -14 & -8 & 21 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 49 & 14 & -14 \\ 14 & 20 & -8 \\ -14 & -8 & 21 \end{bmatrix}$$

```
> A2:=matrix(3,3,[1,0,1/2,0,1/2,0,1/2,0,3/4]):
  evalm(A2),cho(A2,3),evalm(transpose(cho(A2,3))&*cho(A2,3));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

```
> A3:=matrix(3,3,[1,0,-2,0,1,-1,-2,-1,6]):
  evalm(A3),cho(A3,3),evalm(transpose(cho(A3,3))&*cho(A3,3));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> A4:=matrix(3,3,[1,2,3,2,20,26,3,26,70]):
  evalm(A4),cho(A4,3),evalm(transpose(cho(A4,3))&*cho(A4,3));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 26 \\ 3 & 26 & 70 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 26 \\ 3 & 26 & 70 \end{bmatrix}$$

```
>
>
```

```
# CholeskiPourDs10_2425.py
```

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg


A=np.array([[1,0,-2],[0,1,-1],[-2,-1,6]])


def cho(A):
    T=np.zeros((3,3))
    T[0,0]=np.sqrt(A[0,0])
    T[0,1]=A[0,1]/T[0,0]
    T[0,2]=A[0,2]/T[0,0]
    T[1,1]=np.sqrt(A[1,1]-T[0,1]**2)
    T[1,2]=(A[1,2]-T[0,1]*T[0,2])/T[1,1]
    T[2,2]=np.sqrt(A[2,2]-T[0,2]**2-T[1,2]**2)
    return T

>>> cho(A)
array([[ 1.,  0., -2.],
       [ 0.,  1., -1.],
       [ 0.,  0.,  1.]])


>>> np.transpose(t)
array([[ 1.,  0.,  0.],
       [ 0.,  1.,  0.],
       [-2., -1.,  1.]])

>>> np.dot(np.transpose(t),t)
array([[ 1.,  0., -2.],
       [ 0.,  1., -1.],
       [-2., -1.,  6.]])

```

D'après un corrigé de M. Lucas (UPS)

Exemples de contraintes symplectiques linéaires

Pour $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on noterai $\mathrm{M}_{i,j}$ le coefficient en position $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$.
Comme c'est l'usage, on identifiera les espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.

I Préliminaires

Q 1. On note $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit $i,j \in [\![1,n]\!]$. Comme $\mathrm{A}e_j$ est la $j-$ème colonne de $\mathrm{A}=(a_{i,j})$, on a

$$a_{i,j} = e_i^\top \mathrm{A} e_j = e_i^\top \mathrm{B} e_j = b_{i,j}$$

Ce qui permet de conclure que $\boxed{\mathrm{A}=\mathrm{B}}$

Q 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $\mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé.
On a $\mathrm{M}x \neq 0$ car $x \neq 0$ et $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Ainsi

$$0 < \|\mathrm{M}x\|^2 = \langle \mathrm{M}x, \mathrm{M}x\rangle = x^\top \mathrm{M}^\top \mathrm{M}x = \lambda x^\top x = \lambda \|x\|^2$$

or $\|x\|^2 > 0$ donc $\lambda > 0$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } \mathrm{M}^\top\mathrm{M} \text{ sont toutes strictement positives}}$$

On a $\mathrm{M}^\top\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ car $\left(\mathrm{M}^\top\mathrm{M}\right)^\top = \mathrm{M}^\top\left(\mathrm{M}^\top\right)^\top = \mathrm{M}^\top\mathrm{M}$.
Le **théorème spectral** nous fournit $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ diagonale réelle telles que

$$\mathrm{M}^\top\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1} \text{ et } \mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}^\top$$

où $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont les valeurs propres de $\mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ comptées avec leur multiplicité.
On vient de voir que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i > 0$.
On note alors $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})$ et $\mathrm{S} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^\top$.
De sorte que : $\Delta^2 = \mathrm{D}$, $\mathrm{S}^\top = \mathrm{S}$ et $\mathrm{S}^2 = \mathrm{PDP}^\top$; d'où S est symétrique et S est semblable Δ.
Conclusion : $\boxed{\text{il existe une matrice S symétrique à valeurs propres strictement positives telle que } \mathrm{S}^2 = \mathrm{M}^\top\mathrm{M}}$

II Objets symplectiques

II.A - Structure d'espace vectoriel symplectique réel

Q 3. Comme ω est une forme symplectique, alors ω est antisymétrique
donc $\forall x \in \mathrm{E},\ \omega(x,x) = -\omega(x,x)$.
donc $\boxed{\forall x \in \mathrm{E},\ \omega(x,x) = 0}$

Q 4. **Remarque**: F^ω joue le rôle de $\mathrm{F}^\perp$ pour un produit scalaire.
Soit $y \in \mathrm{E}$. Comme ω est une forme symplectique, alors ω est bilinéaire
donc l'application $\varphi_y : x \in \mathrm{E} \longmapsto \omega(x,y) \in \mathbb{R}$ est linéaire sur E.
On remarque que $\mathrm{F}^\omega = \bigcap_{y \in \mathrm{F}} \mathrm{Ker}\,(\varphi_y)$

Par intersection $\boxed{\mathrm{F}^\omega \text{ est un sous-espace vectoriel de E}}$
Remarque: On pouvait aussi montrer que F^ω est non vide, stable par + et $\cdot$.

Q 5. **Remarque**: Si $x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{F}^{\omega}$, alors $\omega(x,x)=0$ qui est valable pour tout x.
Soit $e \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$. On pose $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e)$.
On a $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \omega(e, \lambda e) = \lambda \omega(e,e) = 0$ selon **Q3**
donc $\forall y \in \mathrm{F},\ \omega(e,y) = 0$ d'où $e \in \mathrm{F}^{\omega}$.
Ainsi $\mathrm{F} \subset \mathrm{F}^{\omega}$ donc $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^{\omega} = \mathrm{F} \neq \{0_{\mathrm{E}}\}$.
$\boxed{\text{Le sous-espace } \mathrm{F}^{\omega} \text{ n'est pas nécessairement en somme directe avec F}}$

Q 6. **Remarque**: C'est la même démonstration que pour le théorème de Riez.
Soit x_1 et $x_2 \in \mathrm{E}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\forall y \in \mathrm{E},\ d_{\omega}(\lambda x_1 + x_2)(y) = \omega(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda \omega(x_1, y) + \omega(x_2, y) = (\lambda d_{\omega}(x_1) + d_{\omega}(x_2))(y)$$

d'où $d_{\omega}(\lambda x_1 + x_2) = \lambda d_{\omega}(x_1) + d_{\omega}(x_2)$
On a donc $d_{\omega} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R}))$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(d_{\omega})$. On a donc $d_{\omega}(x) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathbb{R})}$.
Ainsi $\forall y \in \mathrm{E},\ 0 = d_{\omega}(x)(y) = \omega(x,y)$.
donc $x = 0_{\mathrm{E}}$ car ω est non dégénéré.
L'autre inclusion étant évidente, on a $\mathrm{Ker}(d_{\omega}) = \{0_{\mathrm{E}}\}$.
Donc d_{ω} est une application linéaire injective de E vers $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$
or $\dim(\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})) = \dim(\mathrm{E}) \times \dim(\mathbb{R}) = \dim(\mathrm{E})$.
Par théorème de cours, $\boxed{d_{\omega} \text{ est un isomorphisme}}$

Q 7. Soit $m \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathbb{R})$.
Comme E est de dimension finie, T.B.I. nous fournit G un sous-espace vectoriel tel que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$
Comme $(x \in \mathrm{G} \mapsto 0 \in \mathbb{R})$ est une forme linéaire sur G, alors par théorème de cours, on peut définir

$$\ell \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R}) \text{ tel que } \begin{cases} \forall x \in \mathrm{F},\ \ell(x) = m(x) \\ \forall x \in \mathrm{G},\ \ell(x) = 0 \end{cases}$$

On a alors $r_{\mathrm{F}}(\ell) = m$ d'où $\boxed{\text{l'application de restriction } r_{\mathrm{F}} \text{ est surjective}}$

Q 8. Soit $x \in \mathrm{E}$. On a

$$x \in \mathrm{Ker}(r_{\mathrm{F}} \circ d_{\omega}) \iff r_{\mathrm{F}}(d_{\omega}(x)) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathbb{R})} \iff \forall y \in \mathrm{F},\ d_{\omega}(x)(y) = 0 \iff \forall y \in \mathrm{F},\ \omega(x,y) = 0$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(r_{\mathrm{F}} \circ d_{\omega}) = \mathrm{F}^{\omega}}$
De plus par composition d'applications surjectives (**Q7 et Q6**), l'application $r_{\mathrm{F}} \circ d_{\omega} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathbb{R}))$ est surjective. En utilisant le théorème du rang ; on a alors

$$\dim(\mathrm{E}) - \dim(\mathrm{F}^{\omega}) = \mathrm{rg}(r_{\mathrm{F}} \circ d_{\omega}) = \dim(\mathrm{Im}(r_{\mathrm{F}} \circ d_{\omega})) = \dim(\mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathbb{R})) = \dim(\mathrm{F})$$

On en déduit que $\boxed{\dim \mathrm{F}^{\omega} = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F}}$

Q 9. $\Rightarrow]$ On suppose que la restriction ω_{F} de ω à F^2 définit une forme symplectique sur F.
Soit $x \in \mathrm{F} \bigcap \mathrm{F}^{\omega}$. On a $\forall y \in \mathrm{F},\ 0 = \omega(x,y)$
donc $\forall y \in \mathrm{F},\ 0 = \omega_{\mathrm{F}}(x,y)$
Ainsi $x = 0_{\mathrm{F}} = 0_{\mathrm{E}}$ car ω_{F} est une forme symplectique sur F et donc **non dégénérée**.
On a établit que $\mathrm{F} \bigcap \mathrm{F}^{\omega} = \{0_{\mathrm{E}}\}$ (l'autre inclusion étant évidente).
De plus on a $\dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{F}^{\omega}) = \dim(\mathrm{E})$ selon **Q8**.
Ainsi $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\omega} = \mathrm{E}$, par caractérisation en dimension finie.

$\Leftarrow]$ On suppose que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\omega} = \mathrm{E}$.
La restriction ω_{F} de ω à F^2 est clairement bilinéaire et antisymétrique car ω l'est (QPLPPLM !).
Soit $x \in \mathrm{F}$ tel que $\forall y \in \mathrm{F},\ \omega_{\mathrm{F}}(x,y) = 0$.
On a alors $\forall y \in \mathrm{F},\ \omega(x,y) = 0$ donc $x \in \mathrm{F}^{\omega}$ ainsi $x = 0_{\mathrm{E}}$ car $\mathrm{F} \bigcap \mathrm{F}^{\omega} = \{0_{\mathrm{E}}\}$.
On vient de montrer que

$$\{x \in \mathrm{F} \mid \forall y \in \mathrm{F},\ \omega_{\mathrm{F}}(x,y) = 0\} = \{0_{\mathrm{E}}\} = \{0_{\mathrm{F}}\}$$

l'autre inclusion est vraie car $\forall y \in \mathrm{F},\ \omega_{\mathrm{F}}(0_{\mathrm{E}}, y) = \omega(0_{\mathrm{E}}, y) = 0$ car ω est bilinéaire

Ainsi ω_{F} est non dégénérée et il s'agit bien d'une forme symplectique sur F.

On peut alors conclure :

$$\boxed{\text{La restriction } \omega_{\mathrm{F}} \text{ de } \omega \text{ à } \mathrm{F}^2 \text{ définit une forme symplectique sur F si et seulement si } \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\omega} = \mathrm{E}}$$

II.B - Structure symplectique standard sur $\mathbb{R}^n$

Q 10. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ avec les x_i et $y_j \in \mathbb{R}$.

On a alors par bilinéarité de ω :

$$\omega(x,y) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_j \omega(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} \omega(e_i, e_j) y_j = (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \omega(e_1, e_j) y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \omega(e_n, e_j) y_j \end{pmatrix}$$

Comme on a $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on peut alors conclure que : $\boxed{\omega(x,y) = \mathrm{X}^{\top} \Omega \mathrm{Y}}$

Q 11. • **antysymétrique :** Soit X et $\mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On considère x et $y \in \mathbb{R}^n$ ayant X et Y comme colonnes de coordonnées.

On a : $\omega(x,y) = -\omega(y,x)$.

donc $\mathrm{X}^{\top} \Omega \mathrm{Y} = -\mathrm{Y}^{\top} \Omega \mathrm{X}$ d'après **Q10**.

En remarquant que pour tout $z \in \mathbb{R}$, (identifié à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$), on a $z^{\top} z$.

Ainsi $\mathrm{X}^{\top} \Omega \mathrm{Y} = \mathrm{X}^{\top} \left(-\Omega^{\top}\right) \mathrm{Y}$.

Comme c'est vrai pour tout $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\Omega = -\Omega^{\top}$, en utilisant **Q1**.

• **inversible :** On suppose par l'absurde que Ω n'est pas inversible ce qui nous fournit $\mathrm{Y} \in \operatorname{Ker}(\Omega) \setminus \{0\}$.

Prenons $y \in \mathbb{R}^n$ tel que Y est la colonne des coordonnées de y dans la base canonique.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ ayant X comme colonne de coordonnées. On a

$$\omega(x,y) = \mathrm{X}^{\top} \Omega \mathrm{Y} = \mathrm{X}^{\top} 0 = 0$$

Donc $y \in \{y \in \mathrm{E} \mid \forall x \in \mathrm{E},\ \omega(x,y) = 0\} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$ (x et y jouent des rôles symétriques).

Ce qui est absurde car ω est non dégénérée. Donc $\Omega \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

• On peut alors déduire que $\boxed{\Omega \text{ est antisymétrique et inversible}}$

Q 12. On utilise la question précédente :

$$\det(\Omega) = \det\left(-\Omega^{\top}\right) = (-1)^n \det(\Omega)$$

Comme $\det(\Omega) \neq 0$, on a alors $(-1)^n = 1$.

Ce qui permet de conclure que $\boxed{\text{l'entier } n \text{ est pair}}$

Q 13. Bilinéarité : La bilinéarité de b_s est conséquence de celle du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la linéarité de j.

Antisymétrie : Soit x et $y \in \mathbb{R}^n$ de coordonnées respectives X et Y.

La colonne de coordonnées de $j(y)$ dans la base canonique est JY.

Comme cette base est orthonormée, on a $b_s(x,y) = \langle x, j(y) \rangle = \mathrm{X}^{\top} \mathrm{JY}$ d'où

$$b_s(y,x) = \mathrm{Y}^{\top} \mathrm{JX} = \left(\mathrm{Y}^{\top} \mathrm{JX}\right)^{\top} = \mathrm{X}^{\top} \mathrm{J}^{\top} \mathrm{Y} = -\mathrm{X}^{\top} \mathrm{JY} = -b_s(x,y)$$

b_s est bien antisymétrique.

Non dégénérescence : Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}^n,\ b_s(x,y) = \langle x, j(y)\rangle = 0$.
On remarque que $\mathrm{rg(J)} = 2m = n$ d'où $\mathrm{J} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $j \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$.
On a donc $\mathrm{Im}\, j = \mathbb{R}^n$ et donc $\{j(y), y \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^n$. On en déduit que $\forall y' \in \mathbb{R}^n,\ \langle x, y'\rangle = 0$. D'où $x \in \mathrm{E}^\perp = \{0\}$.
La réciproque étant évidente, on a $\{x \in \mathrm{E} \mid \forall y \in \mathrm{E},\ b_s(x,y) = 0\} = \{0\}$

Conclusion : $\boxed{\text{l'application } b_s \text{ est bien une forme symplectique sur } \mathbb{R}^n}$

II.C - Endomorphismes et matrices symplectiques réels

Q 14. On suppose que $\lambda\mu \neq 1$. Soit $x \in \mathrm{E}_\lambda(u)$ et $y \in \mathrm{E}_\mu(u)$.
On a $\omega(u(x), v(y)) = \lambda\mu\omega(x,y)$
donc $(1-\lambda\mu)\,\omega(x,y) = 0$
Comme $1 - \lambda\mu \neq 0$, alors $\omega(x,y) = 0$
On conclut $\boxed{\text{les sous-espaces } \mathrm{E}_\lambda(u) \text{ et } \mathrm{E}_\mu(u) \text{ sont } \omega\text{-orthogonaux}}$

Q 15. **$\Rightarrow$:** On suppose que u est un endomorphisme symplectique.
Soit X et $\mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère x et $y \in \mathbb{R}^n$ de coordonnées X et Y.
On a $b_s(u(x), u(y)) = b_s(x,y))$.
Par des calculs analogues à ci-dessus, on obtient : $\mathrm{X}^\top \mathrm{M}^\top \mathrm{JMY} = \mathrm{X}^\top \mathrm{JY}$
En utilisant **Q1**, on obtient $\mathrm{M}^\top \mathrm{JM} = \mathrm{J}$.
$\Leftarrow$: On suppose que $\mathrm{M}^\top \mathrm{JM} = \mathrm{J}$.
Soit x et $y \in \mathbb{R}^n$ de coordonnées X et Y. On a

$$b_s(u(x), u(y)) = \langle u(x), j(u(y))\rangle = (\mathrm{MX})^\top \mathrm{JMY} = \mathrm{X}^\top \mathrm{M}^\top \mathrm{JMY} = \mathrm{X}^\top \mathrm{JY} = \langle x, j(y)\rangle = b_s(x,y)$$

Ainsi u est un endomorphisme symplectique.

Conclusion : $\boxed{u \text{ est un endomorphisme symplectique de l'espace symplectique standard si et seulement si } \mathrm{M}^\top \mathrm{JM} = \mathrm{J}}$

Q 16. $\underline{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$ **:** Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.
On a $\mathrm{M}^\top \mathrm{JM} = \mathrm{J}$ donc $\det(\mathrm{J}) = \det\left(\mathrm{M}^\top\right)\det(\mathrm{J})\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{J})\det(\mathrm{M})^2$
On a déjà vu en **Q13** que $\mathrm{J} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ donc $\det(\mathrm{J}) \neq 0$
d'où $\det(\mathrm{M}) \neq 0$. Ainsi on a bien $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Ce qui prouve $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ **(i)**.
$\underline{\mathrm{J} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})}$ **:** On remarque que $\mathrm{J}^\top = -\mathrm{J}$ et par calcul par blocs $\mathrm{J}^2 = -\mathrm{I}_n$.
On a donc $\mathrm{J}^\top \mathrm{J} \cdot \mathrm{J} = -\mathrm{J}(-\mathrm{I}_n) = \mathrm{J}$ donc on a bien $\mathrm{J} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.
Ceci prouve $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ **(ii)**
Stabilités : Soit M et $\mathrm{N} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.
On a $\mathrm{MN}^\top \mathrm{JMN} = \mathrm{M}^\top \mathrm{N}^\top \mathrm{JNM} = \mathrm{M}^\top \mathrm{JM} = \mathrm{J}$ donc $\mathrm{MN} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. **(iii)**
On a $\left(\mathrm{M}^{-1}\right)^\top \mathrm{JM}^{-1} = \left(\mathrm{M}^\top\right)^{-1}\left(\mathrm{M}^\top \mathrm{JM}\right)\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{J}$ donc $\mathrm{M}^{-1} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ **(iv)**
On a donc $\left(\left(\mathrm{M}^{-1}\right)^\top \mathrm{JM}^{-1}\right)^{-1} = \mathrm{J}^{-1}$
d'où $\mathrm{M}(-\mathrm{J})\mathrm{M}^\top = -\mathrm{J}$ puis $\left(\mathrm{M}^\top\right)^\top \mathrm{JM}^\top = \mathrm{J}$ et ainsi $\mathrm{M}^\top \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$
Sous-groupe : Avec **(i), (ii), (iii) et (iv)** : $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-groupe de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{, stable par transposition et contenant la matrice J}}$

Q 17. Par calcul par blocs : $\mathrm{M}^\top \mathrm{JM} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}^\top & \mathrm{C}^\top \\ \mathrm{B}^\top & \mathrm{D}^\top \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathrm{C} & -\mathrm{D} \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{C}^\top \mathrm{A} - \mathrm{A}^\top \mathrm{C} & \mathrm{C}^\top \mathrm{B} - \mathrm{A}^\top \mathrm{D} \\ \mathrm{D}^\top \mathrm{A} - \mathrm{B}^\top \mathrm{C} & \mathrm{D}^\top \mathrm{B} - \mathrm{B}^\top \mathrm{D} \end{pmatrix}$. Puis

$$\mathrm{M}^\top \mathrm{JM} = \mathrm{J} \iff \begin{cases} \mathrm{C}^\top \mathrm{A} - \mathrm{A}^\top \mathrm{C} = 0 \\ \mathrm{C}^\top \mathrm{B} - \mathrm{A}^\top \mathrm{D} = -\mathrm{I}_m \\ \mathrm{D}^\top \mathrm{A} - \mathrm{B}^\top \mathrm{C} = \mathrm{I}_m \\ \mathrm{D}^\top \mathrm{B} - \mathrm{B}^\top \mathrm{D} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{A}^\top \mathrm{C} = \left(\mathrm{A}^\top \mathrm{C}\right)^\top \\ \mathrm{A}^\top \mathrm{D} - \mathrm{C}^\top \mathrm{B} = \mathrm{I}_m \\ \left(\mathrm{A}^\top \mathrm{D} - \mathrm{C}^\top \mathrm{B}\right)^\top = \mathrm{I}_m^\top \\ \mathrm{B}^\top \mathrm{D} = \left(\mathrm{B}^\top \mathrm{D}\right)^\top \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{M} \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \mathrm{A}^\top \mathrm{C} \text{ et } \mathrm{B}^\top \mathrm{D} \text{ sont symétriques et } \mathrm{A}^\top \mathrm{D} - \mathrm{C}^\top \mathrm{B} = \mathrm{I}_m.}$

III Déterminant d'une matrice symplectique réelle

III.A - Le cas de la dimension 2

Q 18. Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Comme $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D} \in \mathbb{R}$ (identifié à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$), alors on a $\mathrm{A}^\top \mathrm{C}$ et $\mathrm{B}^\top \mathrm{D}$ sont symétriques.
On a alors $\mathrm{M} \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\mathrm{A}^\top \mathrm{D} - \mathrm{C}^\top \mathrm{B} = \mathrm{I}_m$ si et seulement si $\mathrm{AD} - \mathrm{CB} = \mathrm{I}$
ceci équivaut à $\det(\mathrm{M}) = 1$.
On a montré que $\boxed{\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$

III.B - Commutant de J

Q 19. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\, (= \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}))$.

On écrit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{U} & \mathrm{V}' \\ \mathrm{V} & \mathrm{U}' \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{U}, \mathrm{U}', \mathrm{V}, \mathrm{V}' \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

On a $\mathrm{JM} = \begin{pmatrix} -\mathrm{V} & -\mathrm{U}' \\ \mathrm{U} & \mathrm{V}' \end{pmatrix}$ et $\mathrm{MJ} = \begin{pmatrix} \mathrm{V}' & -\mathrm{U} \\ \mathrm{U}' & -\mathrm{V} \end{pmatrix}$. On a

$$\mathrm{M} \in \mathcal{C}_\mathrm{J} \iff \begin{cases} -\mathrm{V} = \mathrm{V}' \\ -\mathrm{U}' = -\mathrm{U} \\ \mathrm{U} = \mathrm{U}' \\ \mathrm{V}' = -\mathrm{V} \end{cases} \iff \mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{U} & -\mathrm{V} \\ \mathrm{V} & \mathrm{U} \end{pmatrix}$$

On conclut que : $\boxed{\mathrm{M} \in \mathcal{C}_\mathrm{J} \iff \exists (\mathrm{U}, \mathrm{V}) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), \quad \mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{U} & -\mathrm{V} \\ \mathrm{V} & \mathrm{U} \end{pmatrix}}$

Q 20. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{C}_\mathrm{J}$. On écrit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{U} & -\mathrm{V} \\ \mathrm{V} & \mathrm{U} \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_m & 0 \\ \mathrm{iI}_m & \mathrm{I}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{U} & -\mathrm{V} \\ \mathrm{V} & \mathrm{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_m & 0 \\ -\mathrm{iI}_m & \mathrm{I}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{U} & -\mathrm{V} \\ \mathrm{V} + \mathrm{iU} & \mathrm{U} - \mathrm{iV} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_m & 0 \\ -\mathrm{iI}_m & \mathrm{I}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{U} + \mathrm{iV} & -\mathrm{V} \\ 0 & \mathrm{U} - \mathrm{iV} \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\det \begin{pmatrix} \mathrm{I}_m & 0 \\ \mathrm{iI}_m & \mathrm{I}_m \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} \mathrm{U} & -\mathrm{V} \\ \mathrm{V} & \mathrm{U} \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} \mathrm{I}_m & 0 \\ -\mathrm{iI}_m & \mathrm{I}_m \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathrm{U} + \mathrm{iV} & -\mathrm{V} \\ 0 & \mathrm{U} - \mathrm{iV} \end{pmatrix}$$

Par calcul par blocs, on a : $\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{I}_m)^4 \det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{U} + \mathrm{iV}) \det(\mathrm{U} - \mathrm{iV})$
Les coefficients de la matrice $\mathrm{U} - \mathrm{iV}$ sont conjugués de ceux de $\mathrm{U} + \mathrm{iV}$.
Comme la conjugaison est un automorphisme du corps $\mathbb{C}$, alors $\det(\mathrm{U} - \mathrm{iV}) = \overline{\det(\mathrm{U} + \mathrm{iV})}$.
Ainsi $\boxed{\det(\mathrm{M}) = |\det(\mathrm{U} + \mathrm{iV})|^2 \geqslant 0}$

III.C - Décomposition polaire d'une matrice symplectique réelle

Q 21. Comme on est en dimension finie, il suffit de montrer que l'ensemble est fermé et borné.

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a $\forall j \in [\![1, n]\!],\ \sum_{i=1}^n \mathrm{M}_{i,j}^2 = 1$ donc $\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ |\mathrm{M}_{i,j}| \leqslant 1$.
Ceci prouve que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est borné. Comme $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est aussi **borné**.
Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, le produit matriciel est bilinéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et la transposition est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ces applications sont donc continues.
Ainsi $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M}^\top \mathrm{M}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\{\mathrm{I}_n\}$ est fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
D'où $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{ \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, \mathrm{M}^\top \mathrm{M} = \mathrm{I}_n \right\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.
On montre de manière analogue $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec l'application $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{JM} - \mathrm{MJ}$.

Ainsi $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est un intersection de fermé donc **fermé** et borné donc **compact**.
On sait que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ et c'est le cas pour $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ selon **Q16**.
donc $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$, par intersection.
Comme $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, alors $\boxed{\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-groupe compact du groupe symplectique } \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})}$

Q 22. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$. On a $\mathrm{M}^\top \mathrm{JM} = \mathrm{J}$ et $\mathrm{MM}^\top = \mathrm{I}_n$ donc $\mathrm{MJ} = \mathrm{MM}^\top \mathrm{JM} = \mathrm{JM}$.
Ainsi $\boxed{\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_\mathrm{J}}$

Q 23. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$. On a $\det(\mathrm{M}) \geqslant 0$ selon **Q20** et $\det(\mathrm{M}) \in \{-1, 1\}$. Ainsi $\boxed{\det(\mathrm{M}) = 1}$

Q 24. Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à S. Comme la base canonique est orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, le théorème spectral nous fournit $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ base orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs propres de s.
On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées qui sont toutes dans $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$. On cherche à établir que

$$b_s\left(s(\varepsilon_i), s(\varepsilon_j)\right) = b_s\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right)$$

Premier cas : On suppose que $i = j$.
Comme $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un groupe stable par transposition, on a $\mathrm{S}^2 = \mathrm{M}^\top \mathrm{M} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.
Ainsi s^2 est un endomorphisme symplectique de l'espace standard $(\mathbb{R}^n, b_s)$.
On a donc $b_s(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = b_s\left(s^2(\varepsilon_i), s^2(\varepsilon_i)\right)$. Comme $s^2(\varepsilon_i) = \lambda_i^2 \varepsilon_i$, $b_s(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = b_s\left(s^2(\varepsilon_i), s^2(\varepsilon_i)\right) = \lambda_i^4 b_s(\varepsilon_i, \varepsilon_i)$
donc $b_s(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = 0$ ou $\lambda_i^4 = 1$ ainsi $b_s(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = 0$ ou $\lambda_i^2 = 1$ d'où

$$b_s\left(s(\varepsilon_i), s(\varepsilon_i)\right) = \lambda_i^2 b_s(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = b_s(\varepsilon_i, \varepsilon_i)$$

Deuxième cas : On suppose que $i \neq j$ et $\lambda_i \lambda_j = 1$. Ainsi

$$b_s\left(s(\varepsilon_i), s(\varepsilon_j)\right) = \lambda_i \lambda_j b_s(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = b_s(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$$

Troisième cas : On suppose que $i \neq j$ et $\lambda_i \lambda_j \neq 1$.
On a : $s^2(\varepsilon_i) = \lambda_i^2 \varepsilon_i$ et $s^2(\varepsilon_j) = \lambda_j^2 \varepsilon_j$ et $\lambda_i^2 \lambda_j^2 \neq 1$ car $\lambda_i \lambda_j > 0$
Selon **Q14**, les sous-espace $\mathrm{E}_{\lambda_i^2}\left(s^2\right)$ et $\mathrm{E}_{\lambda_j^2}\left(s^2\right)$ sont b_s-orthogonaux car s^2 est symplectique donc

$$b_s(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 = \lambda_i \lambda_j b_s(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = b_s\left(s(\varepsilon_i), s(\varepsilon_j)\right)$$

En décomposant les vecteurs sur $\mathcal{B}'$ en utilisant la bilinéarité de b_s et la linéarité de s, par des calculs analogues à **Q10** que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ b_s\left(s(x), s(y)\right) = b_s(x, y)$$

Ainsi s est un endomorphisme symplectique de l'espace standard $(\mathbb{R}^n, b_s)$.
En utilisant **Q15**, on peut conclure que $\boxed{\mathrm{S} \text{ est symplectique}}$

Q 25. On a $\mathrm{S} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ donc $\boxed{\mathrm{S} \text{ est inversible}}$ car $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Comme $\mathrm{M} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{O} = \mathrm{MS}^{-1} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. Par ailleurs comme S est symétrique :

$$\mathrm{O}^\top \mathrm{O} = \left(\mathrm{S}^{-1}\right)^\top \mathrm{M}^\top \mathrm{MS}^{-1} = \left(\mathrm{S}^\top\right)^{-1} \mathrm{S}^2 \mathrm{S}^{-1} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{S} = \mathrm{I}_n$$

Donc $\boxed{\mathrm{O} = \mathrm{MS}^{-1} \text{ appartient au groupe } \mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})}$

Q 26. On peut effectivement trouver une matrice S qui convient selon **Q2**.
On a alors $\mathrm{M} = \mathrm{OS}$. Comme $\mathrm{O} \in \mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(\mathrm{O}) = 1$ selon **Q23**.
S est diagonalisable à valeurs propres strictement positives or $\det(\mathrm{S})$ est le produit des valeurs propres de S comptées avec multiplicité, donc $\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{S}) > 0$.
Comme $\mathrm{M} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{M}^\top \mathrm{JM} = \mathrm{J}$ d'où $\det(\mathrm{M})^2 \det(\mathrm{J}) = \det(\mathrm{J})$ d'où $\det(\mathrm{M})^2 = 1$ car $\det(\mathrm{J}) \neq 0$.
On a donc $\det(\mathrm{M}) \in \{-1, 1\}$ On **conclut** $\boxed{\text{le déterminant de la matrice M est égal à 1}}$

III.D - Génération du groupe symplectique par les transvections symplectiques

III.D.1) Transvection symplectique

Q 27. On note $\ell : x \in \mathrm{E} \mapsto \lambda\omega(a, x) \in \mathbb{R}$. On vérifie facile que $\ell \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$ et $a \in \ker(\ell)$ car ω est alternée.

Ainsi $\boxed{\tau_a^\lambda \text{ est bien une transvection}}$

Soit x et $y \in \mathrm{E}$. Par bilinéarité de ω puis en utilisant le caractère antisymétrique et alternée, on a :
$\omega\left(\tau_a^\lambda(x), \tau_a^\lambda(y)\right) = \omega(x, y) + \lambda\omega(a, x)\omega(a, y) + \lambda\omega(a, y)\omega(x, a) + \lambda^2\omega(a, x)\omega(a, y)\omega(a, a)$
$= \omega(x, y) + \lambda\omega(a, x)\omega(a, y) - \lambda\omega(a, y)\omega(a, x) + 0 = \omega(x, y)$

Ainsi $\boxed{\tau_a^\lambda \text{ est un endomorphisme symplectique de } (\mathrm{E}, \omega)}$

Q 28. Soit $x \in \mathrm{E}$. On a $\tau_a^\mu(a) = a + \mu\omega(a, a)a = a + 0 = 0$ donc par linéarité :

$$\tau_a^\mu \circ \tau_a^\lambda(x) = \tau_a^\mu\,(x + \lambda\omega(a, x)a) = x + \mu\omega(a, x)a\ \ + \lambda\omega(a, x)a = \tau_a^{\lambda+\mu}(x)$$

On a bien montré que $\boxed{\tau_a^\mu \circ \tau_a^\lambda = \tau_a^{\lambda+\mu}}$

Q 29. Avec **Q28**, $\tau_a^\lambda = \tau_a^{\lambda/2} \circ \tau_a^{\lambda/2}$. On a donc $\det(\tau_a^\lambda) = [\det(\tau_a^{\lambda/2})]^2 \geqslant 0$.

Montrons enfin que τ_a^λ est inversible. Soit $x \in \ker \tau_a^\lambda$, on a donc $x + \ell(x)a = 0$ (avec $\ell = \lambda\omega(a, \cdot)$), donc $x = -\ell(x)a \in$vect(a).
On en déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha a$. On a donc $\tau_a^\lambda(x) = \alpha\tau_a^\lambda(a) = \alpha a = 0$. Comme $a \neq 0$, $\alpha = 0$ donc $x = 0$ et τ_a^λ est bijective (donc $\det(\tau_a^\lambda) \neq 0$).

<u>**Conclusion**</u>: $\boxed{\det\left(\tau_a^\lambda\right) > 0}$

Q 30. Selon **Q28**, on a $\tau_a^\lambda \circ \tau_a^{-\lambda} = \tau_a^0 = \mathrm{Id}_\mathrm{E} = \tau_a^{-\lambda} \circ \tau_a^\lambda$

<u>**Conclusion**</u>: $\boxed{\text{la réciproque } \left(\tau_a^\lambda\right)^{-1} = \tau_a^{-\lambda} \text{ est encore une transvection symplectique}}$

III.D.2) Un lemme

Q 31. <u>Analyse</u> : $\tau_{y-x}^\lambda(x) = y \iff x + \lambda\omega(y - x, x)(y - x) = y \iff x + \lambda\omega(y, x)(y - x) = y \iff x - \lambda\omega(x, y)(y - x) = y$
$\iff \lambda\omega(y, x)(y - x) = y - x$

<u>Synthèse</u> : On pose $\lambda = -\dfrac{1}{\omega(x, y)}$ et l'on a

$$\tau_{y-x}^\lambda(x) = x + \frac{\omega(y - x, x)}{\omega(x, y)}(y - x) = x + y - x$$

On a montré $\boxed{\text{l'existence de } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \tau_{y-x}^\lambda(x) = y}$

Q 32. On cherche $z \in \mathrm{E}$ tel que $\omega(x, z) \neq 0$ et $\omega(z, z) \neq 0$, soit $z \notin \mathrm{H}_1 \cup \mathrm{H}_2$ avec $\mathrm{H}_1 = \ker\omega(x, \cdot)$ et $\mathrm{H}_2 = \ker\omega(y, \cdot)$.
Comme ω est **non dégénérée**, H_1 et H_2 sont des hyperplans et donc $\mathrm{H}_1 \neq \mathrm{E}$ et $\mathrm{H}_2 \neq \mathrm{E}$.
Il est classique que $\mathrm{H}_1 \cup \mathrm{H}_2 \neq \mathrm{E}$ (si $x_1 \in \mathrm{H}_1 - \mathrm{H}_2$ et $x_2 \in \mathrm{H}_2 - \mathrm{H}_1$ alors $x_1 + x_2 \notin \mathrm{H}_1 \cup \mathrm{H}_2$)
En conséquence il existe $z \in \mathrm{E} - (\mathrm{H}_1 \cup \mathrm{H}_2)$.

<u>**Conclusion**</u>: $\boxed{\text{il existe un vecteur } z \in \mathrm{E} \text{ tel que } \omega(x, z) \neq 0 \text{ et } \omega(y, z) \neq 0}$

Q 33. Premier cas : si $\omega(x, y) \neq 0$, il existe une transvection symplectique tel $y = t(x)$ selon **Q31**.
On prend alors $\gamma = t$ qui est la composée d'une seule transvection symplectique (au plus deux).

Deuxième cas : si $\omega(x, y) = 0$, alors **Q32** nous fournit $z \in \mathrm{E}$ tel que $\omega(x, z) \neq 0$ et $\omega(z, y) = -\omega(y, z) \neq 0$.
Alors $z \neq 0$ on peut appliquer **Q31** aux couples (x, z) et (z, y) ce qui nous fournit t_1 et t_2, transvections symplectiques telles que $z = t_1(x)$ et $y = t_2(z)$.
On pose alors $\gamma = t_2 \circ t_1$ composée de deux transvections symplectiques (au plus deux) telle que $\gamma(x) = y$.

<u>**Conclusion**</u>: $\boxed{\text{On a montré le lemme cité ci-dessus}}$

III.D.3) Le théorème

Q 34. Comme $e_1 \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, alors il existe $f \in \mathrm{E}$ tel que $\omega(e_1, f) \neq 0$ car ω est non dégénérée.
f est alors non colinéaire à e_1 car $e_1 \in \ker(\omega(e_1, \cdot))$.
On pose alors $f_1 = \dfrac{1}{\omega(e_1, f)} f$. Comme ω est non dégénérée, alors on a

$$\boxed{f_1 \in \mathrm{E}, \text{ non colinéaire à } e_1, \text{ tel que } \omega(e_1, f_1) = 1}$$

Q 35. Par l'absurde, si on avait $u(e_1) = 0_\mathrm{E}$ alors on aurait

$$1 = \omega(f_1, e_1) = \omega(u(f_1), u(e_1)) = \omega(u(f_1), 0_\mathrm{E}) = 0$$

Ce qui est absurde. Ainsi $u(e_1) \neq 0_\mathrm{E}$ or $e_1 \neq 0_\mathrm{E}$,
on peut donc appliquer le lemme du **III.D2**,

$$\boxed{\text{il existe une composée } \delta_1 \text{ d'au plus deux transvections symplectiques de E telle que } \delta_1(u(e_1)) = e_1}$$

Q 36. Premier cas : On suppose que $\omega\left(\tilde{f}_1, f_1\right) \neq 0$.

Alors on a $f_1 \neq 0_\mathrm{E}$ et $\tilde{f}_1 \neq 0_\mathrm{E}$, alors **Q31** nous fournit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\underline{\tau^\lambda_{f_1 - \tilde{f}_1}\left(\tilde{f}_1\right) = f_1}$.
Comme $\omega(f_1, e_1) = \omega(u(f_1), u(e_1)) = \omega(\delta_1(u(f_1)), \delta_1(u(e_1))) = \omega\left(\tilde{f}_1, e_1\right)$,
alors $\omega(f_1 - \tilde{f}_1, e_1) = 0$ et donc $\underline{\tau^\lambda_{f_1 - \tilde{f}_1}(e_1) = e_1}$.
On peut prendre dans ce cas : $\boxed{\delta_2 = \tau^\lambda_{f_1 - \tilde{f}_1}}$.

Deuxième cas : On suppose que $\omega\left(\tilde{f}_1, f_1\right) = 0$.

On pose $g = -e_1 + f_1$. En utilisant : $\omega(e_1, f_1) = \omega\left(e_1, \tilde{f}_1\right) = 1$ et ω est forme symplectique on a alors :

$$\omega(f_1, g) = -\omega(f_1, e_1) = 1 \;;\; \omega\left(\tilde{f}_1, g\right) = -\omega\left(\tilde{f}_1, e_1\right) + \omega\left(\tilde{f}_1, f_1\right) = 1 \;;\; \omega(e_1, g) = \omega(e_1, f_1) = 1$$

De façon analogue au premier cas, on construit deux transvections symplectiques t_1 et t_2 telles que :

$$\begin{cases} t_1(e_1) = e_1 \\ t_1(f_1) = z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} t_2(e_1) = e_1 \\ t_2\left(\tilde{f}_1\right) = z \end{cases}$$

On a vu que t_2^{-1} est encore une transvection symplectique, on peut alors prendre $\boxed{\delta = t_1^{-1} \circ t_2}$.

- Dans tous les cas, on peut conclure :

$$\boxed{\text{il existe une composée } \delta_2 \text{ d'au plus deux transvections symplectiques de E telle que } \begin{cases} \delta_2(e_1) = e_1 \\ \delta_2\left(\tilde{f}_1\right) = f_1 \end{cases}}$$

Q 37. Comme $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, alors

$$v(\mathrm{P}) = \mathrm{Vect}(v(e_1), v(f_1)) = \mathrm{Vect}(e_1, f_1) = \mathrm{P}$$

car $v(e_1) = \delta(u(e_1)) = e_1$ et $v(f_1) = \delta(u(f_1)) = f_1$ d'après (III.1)
Comme (e_1, f_1) est une base de P, v_P coïncide avec l'identité cette base.

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\text{P est stable par } v}$ et $\boxed{v_\mathrm{P} = \mathrm{Id}_\mathrm{P} \text{ (identité de P)}}$

Q 38. Soit u_1 et u_2 deux endomorphismes symplectiques de (E, ω). On a

$$\forall x, y \in \mathrm{E},\ \omega\left(u_1 \circ u_2(x), u_1 \circ u_2(y)\right) = \omega\left(u_2(x), u_2(y)\right) = \omega\left(x, y\right)$$

Ainsi la composée d'endomorphismes symplectiques est symplectique donc $v \in \mathrm{Symp}_\omega(\mathrm{E})$.
Soit $x \in \mathrm{P}^\omega$. On a :

$$\forall y \in \mathrm{P},\ 0 = \omega(x, y) = \omega(v(x), v(y)) = \omega\left(v(x), v_\mathrm{P}(y)\right) = \omega\left(v(x), y\right)$$

donc $v(x) \in \mathrm{P}^\omega$

On a montré que $\boxed{\mathrm{P}^\omega \text{ est stable par } v}$

Q 39. On a $\dim\left((\mathrm{P}^\omega)^\omega\right) = n - \dim\left(\mathrm{P}^\omega\right) = \dim(\mathrm{P})$ en utilisant **Q8**.
De plus : $\forall x \in \mathrm{P},\ \forall y \in \mathrm{P}^\omega,\ \omega(x, y) = -\omega(y, x) = 0$ donc $\forall x \in \mathrm{P},\ x \in (\mathrm{P}^\omega)^\omega$
d'où $\mathrm{P} \subset (\mathrm{P}^\omega)^\omega$

$$\text{et ainsi } \mathrm{P} = (\mathrm{P}^\omega)^\omega$$

Soit $x \in (\mathrm{P}^\omega)^\omega \bigcap \mathrm{P}^\omega$. On a alors $x \in \mathrm{P}$.
Cela nous fournit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $x = \alpha e_1 + \beta f_1$.
Comme $x \in \mathrm{Vect}\left(e_1, f_1\right)^\omega$, alors on a $\omega(x, e_1) = \omega(x, f_1) = 0$.
Or $\omega(e_1, f_1) = 1$, on a $\alpha = \beta = 0$.
D'où $(\mathrm{P}^\omega)^\omega \cap \mathrm{P}^\omega = \{0_\mathrm{E}\}$
Ainsi $\mathrm{E} = (\mathrm{P}^\omega)^\omega \bigoplus \mathrm{P}^\omega$ car en utilisant **Q8** : $\dim\left((\mathrm{P}^\omega)^\omega\right) + \dim\left(\mathrm{P}^\omega\right) = n$.
D'où selon **Q9**,

$$\boxed{\text{la restriction } \omega_{\mathrm{P}^\omega} \text{ de } \omega \text{ à } \mathrm{P}^\omega \times \mathrm{P}^\omega \text{ munit } \mathrm{P}^\omega \text{ d'une structure d'espace symplectique}}$$

De plus, on a

$$\forall x, y \in \mathrm{P}^\omega,\ \omega_{\mathrm{P}^\omega}\left(v_{\mathrm{P}^\omega}(x), v_{\mathrm{P}^\omega}(y)\right) = \omega\left(v_{\mathrm{P}^\omega}(x), v_{\mathrm{P}^\omega}(y)\right) = \omega\left(v(x), v(y)\right) = \omega\left(x, y\right)$$

Ainsi $\boxed{\text{l'endomorphisme } v_{\mathrm{P}^\omega} \text{ est un endomorphisme symplectique de } (\mathrm{P}^\omega, \omega_{\mathrm{P}^\omega})}$

Q 40. On va montrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$ que : « tout endomorphisme symplectique d'un espace symplectique de dimension $2m$ est la composée d'au plus $4m$ transvections symplectiques ».

I : On considère u un endomorphisme de l'espace symplectique (E, ω) de dimension 2.
Q34 à Q36, nous fournissent e_1 et f_1 non colinéaires dans E et δ composée d'au plus 4 transvections symplectiques tel que la condition (III.1) soit satisfaite.
On peut écrire $\delta = t_1 \circ \cdots t_p$ avec $p \in [\![1, 4]\!]$ où les t_i sont des transvections symplectiques
Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on note $t'_i = t_i^{-1}$ qui est aussi une transvection symplectique selon **Q30**.
La condition (III.1) donne $\delta \circ u = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ car (e_1, f_1) est une base de E
donc $u = t'_p \circ \cdots t'_1$ est la composée d'au plus 4 transvections symplectiques
Ce qui termine l'initialisation.

H : Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la propriété est vraie au rang m. On pose $n = 2m$ et on considère u un endomorphisme symplectique sur un espace symplectique (E, ω) de dimension $n + 2 = 2(m + 1)$.
Q34 à Q36, nous fournissent e_1 et f_1 non colinéaires dans E et δ composée d'au plus 4 transvections symplectiques tel que la condition (III.1) soit satisfaite.
On reprend également les notations pour P et v et on a $u = \delta \circ v$.
Il suffit de montrer que v est le produit d'au plus $4m$ transvections symplectiques de (E, ω) car δ est la composée d'au plus 4 transvections symplectiques et que $u = \delta^{-1} \circ v$.
On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à v_{P^ω} endomorphisme symplectique de $(\mathrm{P}^\omega, \omega_{\mathrm{P}^\omega})$ car
$\dim\left(\mathrm{P}^\omega\right) = n = 2m$ ($\mathrm{P} \oplus \mathrm{P}^\omega = \mathrm{E}$ vu en **Q39**).
Cela nous fournit $t_1, \ldots, t_p$ des transvections symplectiques de $(\mathrm{P}^\omega, \omega_{\mathrm{P}^\omega})$ tels que $v_{\mathrm{P}^\omega} = t_1 \circ \cdots t_p$ où $p \in [\![1, 2n]\!]$.
Soit t une transvection symplectique de $(\mathrm{P}^\omega, \omega_{\mathrm{P}^\omega})$.
Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on peut écrire $t_i : x \in \mathrm{P}^\omega \longmapsto x + \lambda_i \omega_{\mathrm{P}^\omega}(a_i, x) a_i$ avec $a_i \in \mathrm{P}^\omega \setminus \{0_\mathrm{E}\}$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

On pose $t'_i : x \in \mathrm{E} \longmapsto x + \lambda_i \omega(a_i, x) a_i$.
Comme $a_i \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors t'_i est une transvection symplectique de (E, ω).
On remarque que comme $a_i \in \mathrm{P}^\omega$, alors $\forall x \in \mathrm{P},\ t'_i(x) = x$
D'où $\forall x \in \mathrm{P},\ t'_1 \circ \cdots t'_p(x) = x = v(x)$ selon **Q38**
Comme $\forall x \in \mathrm{P}^\omega,\ t'_i(x) = t_i(x)$ alors $\forall x \in \mathrm{P}^\omega,\ t'_1 \circ \cdots t'_p(x) = t_1 \circ \cdots t_p(x) = v_{\mathrm{P}^\omega}(x) = v(x)$
Comme $\mathrm{P} \oplus \mathrm{P}^\omega = \mathrm{E}$, alors $t'_1 \circ \cdots t'_p = v$ ce que l'on voulait.

C : On a bien montré par récurrence que la propriété est vraie pour tout espace symplectique de dimension finie.

Ainsi $\boxed{\text{le théorème annoncé est démontré}}$

III.D.4) Une conséquence topologique

Q 41. **Remarque**: Comme on l'a montrer pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, on va montrer à l'aide des transvections (ici symplectiques) que toute matrice de $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est connecté dans $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ à I_n (qui est dans $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$).
Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. On note u l'endomorphisme canoniquement à M.
Selon **Q15**, u est un endomorphisme de l'espace standard symplectique $(\mathbb{R}^n, b_s)$.
Selon le théorème que l'on vient de montrer on peut écrire,

$$u = \tau_{a_1}^{\lambda_1} \circ \cdots \circ \tau_{a_p}^{\lambda_p}$$

avec $p \in [\![1, 2n]\!]$, les $a_i \in \mathrm{E}$, les $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et les $\tau_{a_1}^{\lambda_1} : x \mapsto x + \lambda_i \omega(a_i, x)$, transvections symplectiques de $(\mathbb{R}^n, b_s)$.
Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on note $\varphi_i : t \in [0,1] \longmapsto \tau_{a_1}^{t\lambda_1} = t \cdot \tau_{a_1}^{\lambda_1} + (1-t) \cdot \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.
Ainsi l'application φ_i est continue de $[0,1]$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, par théorèmes généraux.
On remarque que pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi_i(t)$ est une transvection symplectique
donc $\forall t \in [0,1],\ \varphi_i(t) \in \mathrm{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^n)$ selon **Q27**.
On pose pour $t \in \mathbb{R}$, $\mu_i(t)$ la matrice représentative de $\varphi_i(t)$ dans la base canonique.
Comme l'application qui à un endomorphisme associe sa matrice est linéaire, μ_i est continue.
De plus en utilisant, **Q15**, on a $\forall t \in [0,1],\ \mu_i(t)\, \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.
On note alors l'application $\psi\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & \mu_1(t) \times \cdots \times \mu_p(t) \end{array}\right.$.
ψ est bien définie car $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Comme déjà vu le produit matriciel est continue, ainsi ψ est continue.
Ainsi ψ est un chemin continue de $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.
Par construction, on a $\psi(0) = \mathrm{I}_n$ et $\psi(1) = \mathrm{M}$.
Ainsi M appartient à la composante connexe par arcs de I_n dans $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.
Ainsi on a bien montré que $\boxed{\text{le groupe symplectique } \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \text{ est une partie connexe par arcs de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

III.D.5) Deuxième conséquence

Q 42. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.
On vient de voir que M représente une composée de p (où $p \in [\![1, 2n]\!]$) transvections symplectiques de l'espace symplectique standard $(\mathbb{R}^n, b_s)$.
Or le déterminant de ces transvections valent 1 selon **Q29** d'où $\det(\mathrm{M}) = 1^p = 1$.
Ceci prouve l'inclusion $\boxed{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})}$

IV Exemples de problèmes de plongements symplectiques linéaires

IV.A - Injection par $u \in \mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ d'une boule dans un cylindre

Q 43. On considère l'application

$$u : (x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ \ldots\ ,\ x_m\ ,\ y_1\ ,\ y_2\ ,\ y_3\ ,\ \ldots\ ,\ y_m) \longmapsto \left(rx_1\ ,\ \frac{x_2}{r}\ ,\ x_3\ ,\ \ldots\ ,\ x_m\ ,\ ry_1\ ,\ \frac{y_2}{r}\ ,\ y_3\ ,\ \ldots\ ,\ y_m\right)$$

On a bien $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $\det(u) = 1$
ainsi $\boxed{\text{il existe } u \in \mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right) \text{ tel que } u\left(\mathrm{B}^{2m}(1)\right) \subset \mathrm{Z}^{2m}(r)}$

IV.B - Injection par $u \in \mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ d'une boule dans une autre

Soit $r > 0$ tel qu'il existe $u \in \mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ vérifiant $u\left(\mathrm{B}^{2m}(1)\right) \subset \mathrm{B}^{2m}(r)$.
Notons $\mathrm{U} \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$ la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^{2m}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de la matrice U.

Q 44. On identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

<u>Premier cas</u> : $\lambda \in \mathbb{R}$

Soit X un vecteur propre de U, de norme 1 (quitte à prendre $\dfrac{\mathrm{X}}{\|\mathrm{X}\|}$), associé à λ.

$\mathrm{X} \in \mathrm{B}^{2m}(1)$ donc $\mathrm{UX} = \lambda \mathrm{X} \in \mathrm{B}2m(r)$, par suite $\underline{\|\lambda \mathrm{X}\| = |\lambda| \leqslant r}$.

<u>Deuxième cas</u> : $\lambda \in \mathbb{C}$

On considère $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{2m,1}(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Z} = \mathrm{P} + \mathrm{iQ}$ est une colonne propre de U pour la valeur propre λ.

On a alors $\mathrm{UP} + \mathrm{iUQ} = \lambda(\mathrm{P} + \mathrm{iQ})$ car $\mathrm{UZ} = \lambda \mathrm{Z}$.

En regardant la j-ème composante ($1 \leqslant j \leqslant n$), on a $(\mathrm{UP})_j + \mathrm{i}(\mathrm{UQ})_j = \lambda(p_j + \mathrm{i}q_j)$

Ainsi $(\mathrm{UP})_j^2 + (\mathrm{UQ})_j^2 = |\lambda|^2\left(p_j^2 + q_j^2\right)$ en prenant les modules au carré.

En sommant pour j allant de 1 à n, on obtient $\|\mathrm{UP}\|^2 + \|\mathrm{UQ}\|^2 = |\lambda|^2\left(\|\mathrm{P}\|^2 + \|\mathrm{Q}\|^2\right)$

À l'aide de l'inégalité (*), on obtient $|\lambda|^2\left(\|\mathrm{P}\|^2 + \|\mathrm{Q}\|^2\right) \leqslant r^2\left(\|\mathrm{P}\|^2 + \|\mathrm{Q}\|^2\right)$

Or $\mathrm{P} \neq 0$ ou $\mathrm{Q} \neq 0$ car $\mathrm{Z} \neq 0$ (vecteur propre) et donc $\|\mathrm{P}\|^2 + \|\mathrm{Q}\|^2 > 0$

On a bien $\boxed{|\lambda| \leqslant r}$

Q 45. Selon d'Alembert-Gauss, le polynôme caractéristique χ_{U} est scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Ainsi la matrice U est trigonalisable.

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres complexes de U comptées avec multiplicité.

On a alors $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(\mathrm{U}) = 1$ d'où $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| = 1$. Ceci nous fournit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|\lambda_{i_0}| \geqslant 1$ (sinon $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| < 1$).

On déduit que $1 \leqslant |\lambda_{i_0}| \leqslant r$ à l'aide de **Q44**. **<u>Conclusion</u>**: $\boxed{1 \leqslant r}$

Q 46. Soit $r > 0$. On va montrer que

$$\text{il existe } u \text{ appartenant à } \mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right) \text{ tel que } u\left(\mathrm{B}^{2m}(1)\right) \subset \mathrm{B}^{2m}(r) \text{ si et seulement si } 1 \leqslant r$$

On vient de traiter le sens direct.

Réciproquement on suppose $r \geqslant 1$.

On prend $u = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. On a bien $u \in \mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ et $u\left(\mathrm{B}^{2m}(1)\right) = \mathrm{B}^{2m}(1) \subset \mathrm{B}^{2m}(r)$

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\text{il existe } u \text{ appartenant à } \mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right) \text{ tel que } u\left(\mathrm{B}^{2m}(1)\right) \subset \mathrm{B}^{2m}(r) \text{ si et seulement si } 1 \leqslant r}$

IV.C - Injection symplectique d'une boule dans un cylindre

Q 47. On a M symplectique.

Selon **Q16 puis Q15** : on a $\mathrm{M}^{\top}$ symplectique puis $\psi^{\top}$ est symplectique.

d'où vu la matrice J, on a

$$b_s\left(\psi^{\top}(e_1), \psi^{\top}(f_1)\right) = b_s(e_1, f_1) = \langle e_1, j(f_1)\rangle = \langle e_1, -e_1\rangle = -1$$

Ainsi $\boxed{\left|b_s\left(\psi^{\top}(e_1), \psi^{\top}(f_1)\right)\right| = 1}$

On a également à l'aide de Cauchy-Schwarz :

$$\left|b_s\left(\psi^{\top}(e_1), \psi^{\top}(f_1)\right)\right| = \left|\left\langle \psi^{\top}(e_1), j\left(\psi^{\top}(f_1)\right)\right\rangle\right| \leqslant \left\|\psi^{\top}(e_1)\right\| \times \left\|j\left(\psi^{\top}(f_1)\right)\right\|$$

or $\mathrm{J} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ainsi $j \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ et $\left\|j\left(\psi^{\top}(f_1)\right)\right\| = \left\|\psi^{\top}(f_1)\right\|$

D'où $1 \leqslant \left\|\psi^{\top}(e_1)\right\| \cdot \left\|\psi^{\top}(f_1)\right\|$

On peut conclure que $\boxed{\left\|\psi^{\top}(e_1)\right\| \geqslant 1 \text{ ou } \left\|\psi^{\top}(f_1)\right\| \geqslant 1}$

Q 48. On remarque que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \langle x, \psi^\top(y)\rangle = \langle \psi(x), y\rangle$$

en utilisant l'écriture matricielle du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

Par ailleurs on a $\forall x \in \mathrm{B}^{2m}(1)$, $\psi(x) \in \mathrm{Z}^{2m}(r)$

donc en regardant à la condition sur la première coordonnée, on a

$$\forall x \in \mathrm{B}^{2m}(1),\ |\langle \psi(x), e_1\rangle| \leqslant r$$

En combinant les inégalités, on a

$$\forall x \in \mathrm{B}^{2m}(1),\ |\langle x, \psi^\top(e_1)\rangle| \leqslant r$$

En appliquant cela à $\dfrac{\psi^\top(e_1)}{\|\psi^\top(e_1)\|} \in \mathrm{B}^{2m}(1)$, on obtient $r \geqslant \|\psi^\top(e_1)\|$

De manière analogue, on établit que $r \geqslant \|\psi^\top(f_1)\|$.

À l'aide de la question précédente, on conclut que $\boxed{1 \leqslant r}$

Q 49. Soit $\mathrm{R} > 0$ et $\mathrm{R}' > 0$. En posant $r = \mathrm{R}'/\mathrm{R}$, pour prouver le théorème de non-tassement linéaire, il suffit de prouver pour $r > 0$ que

$$\text{il existe } \psi \in \mathrm{Symp}_{b_s}\left(\mathbb{R}^{2m}\right) \text{ tel que } \psi\left(\mathrm{B}^{2m}(1)\right) \subset \mathrm{Z}^{2m}(r) \text{ si et seulement si } 1 \leqslant r$$

Si $r \geqslant 1$, il suffit de prendre $\psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

Réciproquement, on suppose qu'il existe $\psi \in \mathrm{Symp}_{b_s}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ tel que $\psi\left(\mathrm{B}^{2m}(1)\right) \subset \mathrm{Z}^{2m}(r)$.

On a alors $r \geqslant 1$ selon **Q48**.