

I 1°) $\forall n \in \mathbb{R}, n^2 + 1 \geq 1 > 0$ donc par Théorèmes généraux,

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$$2^\circ) \forall n \in \mathbb{R}, f'(n) = 1 + \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{\sqrt{n^2+1} + n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$f''(n) = 0 + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} - \frac{1}{2} 2n(n^2+1)^{-3/2} = \frac{1}{(n^2+1)^{3/2}}$$

$$f'''(n) = -\frac{3}{2} 2n(n^2+1)^{-5/2} = \frac{-3n}{(n^2+1)^{5/2}}$$

3°) La relation est vraie pour $n=2$: $P_2(n) = 1$, et

pour $n=3$: $P_3(n) = -3n$. Supposons que la relation

soit vraie pour $n \geq 2$, $f^{(n+1)}(n) = (f^{(n)})'(n) = \left(\frac{P_n(n)}{(n^2+1)^{\frac{2n-1}{2}}} \right)'$

$$= \frac{P'_n(n)}{(n^2+1)^{\frac{2n-1}{2}}} - \left(\frac{2n-1}{2} \right) (2n)(n^2+1)^{-\frac{2n-1}{2}-1}$$

$$= \frac{P_{n+1}(n)}{(n^2+1)^{\frac{2n+1}{2}}}$$

avec $\boxed{P_{n+1}(n) = (n^2+1)P'_n(n) - (2n-1)nP_n(n)}$

4°) si $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $d^n P_n(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2+1)^n} = \frac{Q_n(x)}{(x^2+1)^n}$ $q = \frac{2n-1}{2}$ (2)

donc $\forall n \in \mathbb{N}^+$: $P_n(x) = Q_n(x)$ d'où: $\boxed{\forall n \geq 2: P_n \text{ unique}}$

5°) Grâce à la relation (*):

$P_4(x) = (x^2+1)(-3) - 5x(-3x)$ d'où $\boxed{P_4(x) = 12x^2 - 3}$

de même $P_5(x) = (x^2+1)(24x) - 7x(12x^2 - 3)$

d'où $\boxed{P_5(x) = -60x^3 + 45x}$

on avait vu au 3°) que $\boxed{P_2(x) = 1}$ et $\boxed{P_3(x) = -3x}$

6°) On a:

n	2	3	4	5
$d^n P_n$	0	1	2	3

 conjecture: $\boxed{d^n P_n = n-2}$

Montrons le par récurrence avec (*):

si $d^n P_n = n-2$, $P_n = aX^{n-2} + \dots$, donc $P'_n = a(n-2)X^{n-3} + \dots$

d'où $P_{n+1}(x) = a(n-2)x^{n-1} - (2n-1)ax^{n-1} + \dots$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{d^n < n-1}$

$= a(-n-1)x^{n-1} + \dots$ donc $d^n P_{n+1} = n+1-2 = n-1$

d'où: $\boxed{\forall n \geq 2: d^n P_n = n-2}$

7) Si l'on note a_n le coefficient dominant de P_n , ③

on a vu au 6) que $a_{n+1} = a_n(-n-1) = -(n+1)a_n (**)$

On en déduit que $\forall n \geq 3$: $a_n = -n a_{n-1} = (-n)(-(n-1)) a_{n-2}$,

$$\text{donc } a_n = \underbrace{(-n)(-(n-1))(-(n-2)) \dots (-3)}_{n-2 \text{ termes}} a_2$$

$$= (-1)^{n-2} \frac{n!}{2} \times 1 = (-1)^n \frac{n!}{2}$$

La relation $(**)$ pour l'hérédité et $a_2 = (-1)^2 \frac{2!}{2} = 1$

permet de conclure : d' : $\forall n \geq 2 \quad a_n = (-1)^n \frac{n!}{2}$

8) 1^{ère} méthode : si on pose $g(n) = \sqrt{n^2+1}$, on a
g paire, donc g' impaire (la dérive la rel. $g(-n) = g(n)$)
donc g'' paire, etc., par récurrence. Comme $f' = 1 + g'$
on a, $\forall n \geq 2$: $f^{(n)}(n) = g^{(n)}(n)$ et donc :

$$\forall n \in \mathbb{R} : P_n(n) = \underbrace{g(n)}_{\substack{\text{parité} \\ \text{de } n}} \times \underbrace{(n^2+1)^{\frac{2n-1}{2}}}_{\substack{\text{paire} \\ \text{donc } P_n \text{ a la parité de } n}}$$

2^{en} méthode: Par récurrence, à l'aide de (*)

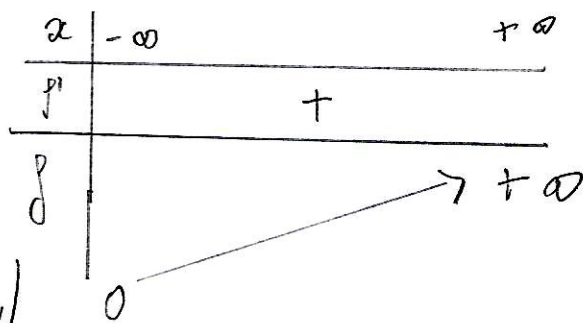
(4)

d^o: Si n pair, P_n pair et si n impair, P_n impair

g) Grâce à f' , ~~donner~~ les variations de f :

$$\forall n \in \mathbb{R}, \sqrt{n^2+1} > \sqrt{n^2} = |n| \geq -n$$

d'où $f'(|n|) > 0$ d'où



On a facilement $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty$ (T.G.)

$E_n - \infty$: $f(n) = n + \sqrt{n^2(1 + \frac{1}{n^2})}$, $\forall n < 0$

$$= n + |n| \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$$

$$= n - n \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \quad \text{car } n < 0$$

$$= n(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}})$$

On prend $h \rightarrow 0$, $\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h + o(|h|)$, donc

$1 - \sqrt{1+h} \underset{0}{\sim} \frac{-h}{2}$ et comme $h = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$, $n \rightarrow -\infty$

on a: $f(n) \underset{-\infty}{\sim} \frac{-1}{2n}$ et $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = 0$

Par le théorème de bijection (f continue et strictement croissante) (5)

$$f \text{ bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } I =]0, +\infty[$$

$$10') (1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + o(t^n)$$

$$\text{d'où } f(x) = x + (1+x^2)^{1/2}$$

$$= x + 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} x^4 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!} x^6$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{4!} x^8 + o(x^9)$$

↑ par parité de $t \mapsto (1+t^2)^{1/2}$

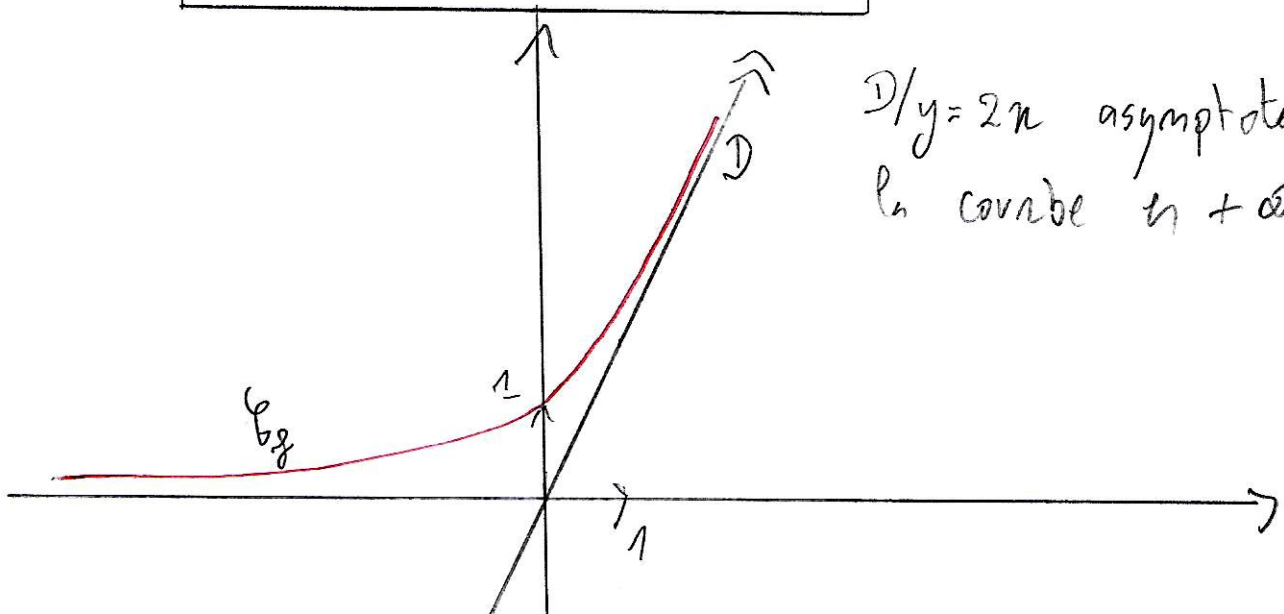
$$\text{d'où : } f(x) = x + 1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{16} x^6 - \frac{5}{128} x^8 + o(x^9)$$

$$11') \forall n > 0, f(n) = n + n \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = n + n \left(1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

$$\text{d'où : } f(n) = 2n + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et $a=2, b=0, c=\frac{1}{2}$
par unicité du D.L.

12)



$D/y = 2x$ asymptote à la courbe en $+\infty$

$$\text{II } 1') \quad f(-x) = -x + \sqrt{x^2+1} = \frac{(-x + \sqrt{x^2+1})(-x - \sqrt{x^2+1})}{-x - \sqrt{x^2+1}} \quad (6)$$

$$= \frac{x^2 - (x^2+1)}{-x - \sqrt{x^2+1}} \quad \text{d'où: } \boxed{f(-x) = \frac{1}{f(x)}} \quad (f(x) \neq 0)$$

$$2') \quad \forall y \in I =]0, +\infty[\quad \exists ! x \in \mathbb{R} \setminus y = f(x) \quad \text{et} \quad x = g(y)$$

$$y = f(x) = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{f(x)} = f(-x) = -x + \sqrt{x^2+1}$$

$$\cdot \text{ donc } \begin{cases} x + \sqrt{x^2+1} = y \\ -x + \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2x = y - \frac{1}{y} \\ \Rightarrow x = \frac{y - \frac{1}{y}}{2} \end{matrix}$$

Comme x existe et unique, on a

$$\boxed{g(y) = \frac{y^2 - 1}{2y}, \quad \forall y > 0}$$

3') $\Leftarrow$ c'est clair $\mathbb{Q}$ est stable par $+$ et avec le 9°) $f(x) > 0$.

$\Rightarrow$ Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y \in \mathbb{Q}^*$, on a

$\forall$ au 2°) que $x = g(y) = \frac{y^2 - 1}{2y} \in \mathbb{Q}$ puis $\sqrt{x^2+1} = f(x) - x \in \mathbb{Q}$

$$\text{d'où: } \boxed{f(x) \in \mathbb{Q}^* \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q} \text{ et } \sqrt{x^2+1} \in \mathbb{Q}}$$

4) analyse Soit $(x, z) \in \mathbb{Q}_+^2 \setminus x^2+1 = z^2$ donc $z = \sqrt{x^2+1}$ et donc $y = x + \sqrt{x^2+1} \in \mathbb{Q}^*$ et $x = \frac{y^2 - 1}{2y}$

$$\text{d'où } x = \frac{y^2-1}{2y} \text{ et } z = y - x = y - \frac{y^2-1}{2y} = \frac{y^2+1}{2y} \quad (7)$$

$$\text{D'autre part } y = f(n) \in f([0, +\infty[) = [1, +\infty[\quad (n \geq 0)$$

cqs, synthèse : Si (n, z) solution du problème, alors

$$\text{il existe } y \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[\text{ tel que } x = \frac{y^2-1}{2y} \text{ et } z = \frac{y^2+1}{2y}$$

$$\text{Réciproquement, soit } y \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[, x = \frac{y^2-1}{2y} \text{ et } z = \frac{y^2+1}{2y} \text{ (quelconque)}$$

$$\text{alors } x \in \mathbb{Q}^+, z \in \mathbb{Q}^+ \text{ et } x^2 + 1 = \frac{y^4 + 2y^2 + 1}{4y^2} = z^2$$

$$\mathcal{L}^v : \boxed{\mathcal{Y} = \left\{ \left(\frac{y^2-1}{2y}, \frac{y^2+1}{2y} \right), y \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[\right\}}$$

$$5) \text{ 1}^{\text{er}} \text{ cas : } a = 0 \text{ donc l'équation devient } x^2 = z^2$$

$$\mathcal{L}_1^v : \mathcal{Y}_0 = \{ (x, x), x \in \mathbb{Q} \}$$

$$2^{\text{ème}} \text{ cas : } a > 0 , \text{ l'équation est équivalente à } \left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1 = \left(\frac{z}{a} \right)^2$$

$$\text{donc } (x, z) \text{ solution du pb} \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[\mid \frac{x}{a} = \frac{y^2-1}{2y} \text{ et } \frac{z}{a} = \frac{y^2+1}{2y}$$

$$d' : \mathcal{Y}_a = \left\{ \left(a \frac{y^2-1}{2y}, a \frac{y^2+1}{2y} \right), y \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[\right\} \quad (8)$$

III. 1)

$\begin{array}{c} y \\ \hline x \end{array}$	1	2	3	4	5
1	2	5	10	17	26
2	5	8	13	20	29
3	10	13	18	(25)	

ici

$(3, 4, 5)$ solution.

Python: voir page (13)

2°) Les solutions de ce type sont : $(n, 0, n)$ et $(0, n, n)$
où $n \in \mathbb{N}$

3°) a) si $p \wedge (p^2 - q^2) \neq 1$, il existerait un nombre premier δ
tel que $\delta \mid p$ et $\delta \mid p^2 - q^2$

$\hookrightarrow \delta \mid p \mid p^2$ donc $\delta \mid p^2$ d'où $\delta \mid p^2 - (p^2 - q^2) = q^2$

Comme δ premier (avec Gauss) $\delta \mid q^2 \Rightarrow \delta \mid q$. On a donc

$\delta \mid p$ et $\delta \mid q$: absurde car $p \wedge q = 1$.

cqs : $p \wedge (p^2 - q^2) = 1$. On fait pareil pour $p \wedge (p^2 + q^2) = 1$

b) $p \mid y \Rightarrow \exists y_1 \in \mathbb{Z} \mid y = p y_1$. $q \mid y \Rightarrow q \mid p y_1$. Comme $p \wedge q = 1$, par Gauss, $q \mid y_1$ soit $\exists y_2 \in \mathbb{Z} \mid y_1 = q y_2$

On en déduit que $y = pqz$ et $z \in \mathbb{Z}$ donc $\boxed{pq \mid y}$ ⑨

4) si $d=1$ alors c'est évident, sinon $d \geq 2$: écrivons la décomposition de d : $d = p_1^{a_1} \dots p_h^{a_h}$ où $p_1, \dots, p_h$ sont des nombres premiers distincts et $a_i \in \mathbb{N}^*$.

$\forall i \in [1, h]$, $z = p_i^{n_i} z_i$ avec $n_i \in \mathbb{N}$ et $p_i \nmid z_i = 1$

$$z^2 = p_i^{2n_i} z_i^2, \quad d^2 \mid z^2 \Rightarrow p_i^{2a_i} \mid d^2 \mid z^2 = p_i^{2n_i} z_i^2$$

Comme $p_i^{2a_i} \nmid z_i^2 = 1$, par Gauss, $p_i^{2a_i} \mid p_i^{2n_i}$ soit $2a_i \leq 2n_i$

donc $n_i \geq a_i$ cqs $z = p_1^{n_1} \dots p_h^{n_h}$ et $n_i \geq a_i$ d'où

$$z = d \times \underbrace{p_1^{n_1 - a_1} \dots p_h^{n_h - a_h}}_{\in \mathbb{Z}} \quad \text{donc} \quad \boxed{d \mid z}$$

Voir page 14 une solution + simple! ↗

5 a) si $d \mid x$ et $d \mid z$ alors $d^2 \mid z^2 - x^2 = y^2$ donc $d \mid y$

d'où $d \mid x$ et $d \mid y$ donc $d=1$ car $x \wedge y = 1$

cqs : $\boxed{x \wedge z = 1}$, on fait pareil pour $\boxed{y \wedge z = 1}$

b) Comme $x \wedge y = 1$, ils ne peuvent être tous les 2 pairs.

Si $x = 2x_1 + 1$ et $y = 2y_1 + 1$ (tous les 2 impairs)

alors $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4}$. Or $\begin{matrix} z^2 \equiv 0 \pmod{4} & \text{si } z \text{ pair} \\ z^2 \equiv 1 \pmod{4} & \text{si } z \text{ impair} \end{matrix}$
 $2 \not\equiv 0$ et $2 \not\equiv 1$: Absurde

d' : n et y n'ont pas m même parité

c) d'après le II 5 avec " $y=a$ ", $\exists u \in \mathbb{Q}^* \setminus$

$$x = y \frac{u^2 - 1}{2u} \quad \text{et} \quad z = y \frac{u^2 + 1}{2u}$$

$u = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $p \wedge q = 1$ donc

$$x = y \frac{p^2 - q^2}{2pq} \quad \text{et} \quad z = y \frac{p^2 + q^2}{2pq}$$

Comme $x \in \mathbb{N}$, $pq \mid y(p^2 - q^2)$ et avec le II 3 a)

$p^2 - q^2 \wedge pq = 1$, donc par Gauss $pq \mid y$. On a

donc $y = k pq$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ d'où

$$\underline{x = \frac{k}{2}(p^2 - q^2) \quad y = k pq \quad \text{et} \quad z = \frac{k}{2}(p^2 + q^2)}$$

p et q ne peuvent être pairs tous les 2 ($p \wedge q = 1$)

* Si p et q ont une parité différente, $p^2 - q^2$ est impair d'où comme $x \in \mathbb{N}$, $2 \mid k$: $k = 2d$

donc $x = d(p^2 - q^2)$, $y = 2d pq$ et $z = d(p^2 + q^2)$

comme $x \wedge y = 1$, $d = 1$ et donc :

$$\underline{x = p^2 - q^2, y = 2pq, z = p^2 + q^2, p \wedge q = 1 \text{ et } p > q}$$

($n > 0$)

* Si p et q sont impaires tous les 2, comme y est pair, on a $k = 2d$ et n est pair : absurde car $nz = 1$

Réciproquement, si $x = p^2 - q^2$, $y = 2pq$, $z = p^2 + q^2$, $\begin{cases} p, q \text{ de parité } \neq \\ p \wedge q = 1 \text{ et } p > q \end{cases}$

alors $(n, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $n^2 + y^2 = p^4 + 2p^2q^2 + q^4 = z^2$, y pair,

n impair, $n \wedge y = n \wedge z = y \wedge z$ avec le III 3 b

donc on conclut :

$$\begin{aligned} Y' &= \{ (n, y, z) \in \mathbb{N}^3 \text{ solution de (F) avec } nyz \neq 0, n \wedge y = 1 \} \\ &= \{ (p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2), p > q, p \wedge q = 1, p, q \text{ de parité } \neq \} \\ &\cup \{ (2pq, p^2 - q^2, p^2 + q^2), \text{ ————— } \} \end{aligned}$$

l'union correspond aux 2 cas : n pair/impair & y impair/pair

6°) Soit $(n, y, z) \in \mathbb{N}^3$ solution de (F) avec $nyz \neq 0$

Posez $d = n \wedge y$, $d^2 | z^2$ donc $d | z$ d'où

$$\left(\frac{n}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d} \right) \in \mathbb{N}^3, \text{ solution de (F) et } \frac{n}{d} \wedge \frac{y}{d} = 1$$

On est donc ramené au cas précédent d'où

on conclut :

$$\underline{d} \quad \mathcal{Y} = \left\{ (n, 0, n), n \in \mathbb{N} \right\} \\ \cup \left\{ (0, n, 0), n \in \mathbb{N} \right\} \\ \cup \left\{ (d(p^2 - q^2), 2dpq, d(p^2 + q^2)), d \in \mathbb{N}, \overset{\text{et } p \wedge q = 1}{p, q \text{ premiers}}, p > q \right\} \\ \cup \left\{ (2dpq, d(p^2 - q^2), d(p^2 + q^2)), \text{---} \right\}$$

Ex 7) Pour $d=1, p=8$ et $q=3$, on a

$$x = 55, y = 48 \text{ et } z = 73$$

8°) (résumé) On montre que $x^4 + y^4 = z^2$ n'a aucune solution non triviale ($x, y, z \neq 0$).

comme au dessus on suppose $x \wedge y = x \wedge z = y \wedge z = 1$ et on suppose z minimal (donc $z \geq 2$).

Avec la 5°) $x^2 = p^2 - q^2, y^2 = 2pq, z = p^2 + q^2$

d'où $x = r^2 - s^2, q = 2rs$ et $p = r^2 + s^2, (r \wedge s = 1)$.

Donc $y^2 = 4rs(r^2 + s^2)$ et on montre $r \wedge s = r \wedge s^2 + r^2$

donc $r = a^2, s = b^2, r^2 + s^2 = c^2 = s \wedge s^2 + r^2 = 1$
 $a, b, c \in \mathbb{N}^* \text{ d'où } a^4 + b^4 = c^2 \text{ et } c = \sqrt{z} < z$
 $\rightarrow$

III.1 (suite) Voici l'algorithme :

13

```
from math import *
def recherche(n):
    L=[ ]
    for x in range(1,n+1):
        for y in range(1,n+1):
            for z in range(1,n+1):
                if x*x+y*y-z*z==0:
                    L.append([x,y,z])
    return(L)
```

et l'exécution pour $n = 13$:

```
>>> recherche(13)
[[3, 4, 5], [4, 3, 5], [5, 12, 13], [6, 8, 10], [8, 6, 10], [12, 5, 13]]
```

4) Si $d^2 \mid z^2$, $\exists q \in \mathbb{N} \mid z^2 = q d^2$

(14)

donc $\frac{z^2}{d^2} = \left(\frac{z}{d}\right)^2 = q \in \mathbb{N}$

$\frac{z}{d} = \frac{a}{b}$ avec $\begin{cases} a, b \in \mathbb{N} \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$, donc

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = q \Rightarrow a^2 = q b^2$

$\Rightarrow b \mid a^2$ or $b \wedge a^2 = 1$

donc $b = 1$ et $\frac{z}{d} = a \in \mathbb{N}$

soit $z = ad$: $\boxed{d \mid z}$