spé MP

POLYCOPIÉ D'EXERCICES

2025-2026

On finit toujours par trouver la solution ! !

POLYNÔMES

Exo 1 Soit $n \in \mathbb{N}$

(a) Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$: $P_n(\cos\theta)\sin\theta = \sin(n+1)\theta$.
On donnera une expression de P_n.

(b) Montrer que $n \in \mathbb{N}$: $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$.

(c) Calculer le degré , le coefficient dominant , les racines de P_n.

(d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,$\forall z \in \mathbb{C}$: $P_n(\cos z)\sin z = \sin(n+1)z$.

Exo 2 Déterminer $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 , divisible par $X-1$ et $X-2$ et tel que le reste de la division de P par X^2+1 soit égal à 1.

Exo 3 Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^{16}-1$. En déduire $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$. Est-ce le moyen le plus rapide pour calculer $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$?

Exo 4 Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $\sqrt{c} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que si $a+b\sqrt{c}$ est racine d'ordre s de P alors $a-b\sqrt{c}$ est racine d'ordre s de P.

Exo 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que 1 est racine double de $X^{n+1}-X^n-X+1$ puis factoriser ce polynôme dans $\mathbb{C}$.

Exo 6 Déterminer les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P. Même question avec $\mathbb{R}[X]$.

Exo 7 Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{7} \cos\frac{k\pi}{15}$.

Exo 8 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit le polynôme $P_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X^k - 1$.

1) Montrer que P_n a une et une seule racine positive, que l'on notera a_n.
2) Montrer que (a_n) converge et déterminer sa limite L.
3) Déterminer un équivalent de $a_n - L$ quand n tend vers $+\infty$.

Exo 9 Résoudre dans $\mathbb{C}^3$: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=62 \\ xyz=-42 \end{cases}$

Exo 10 Soit $P = X^3+pX+q$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.
Calculer $S = x_1^7+x_2^7+x_3^7$ en fonction de p et q, où x_1, x_2, x_3 sont les racines de P.

Exo 11 On cherche à déterminer les polynômes P qui vérifient $(*)$: $P(X^2) = P(X)^2$.

(a) Montrer qu'un polynôme qui vérifient $(*)$ est pair ou impair.

(b) Déterminer les polynômes solutions de $(*)$.

Exo 12 Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots a_1X + a_0$ un polynôme unitaire dont les racines sont toutes situées dans le disque unité fermé de $\mathbb{C}$. Montrer que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $|a_k| \leqslant \binom{n}{k}$.

Exo 13 On note $(L_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ les polynômes de Lagrange de $1, \ldots, n$, c'est-à-dire $L_i(j) = \delta_{i,j}$ pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

(a) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, exprimer le coefficient dominant de L_k au moyen de factorielles.

(b) Exprimer de deux manières l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour lequel $P(k) = k^{n-1}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

(c) En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}k^n$.

Exo 14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction H_n par :

$$H_n(x) = e^{x^2} f^{(n)}(x)$$

(a) Déterminer une relation reliant H_n, H_{n+1} et H_{n+2}.

(b) Montrer que H_n est une fonction polynôme dont on précisera le degré et le coefficient dominant.

(c) Montrer que H_n admet n racines réelles distinctes séparées par celles de H_{n-1}.

Exo 15 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le polynôme $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples. Combien P_n a-t-il exactement de racines réelles ?

b) Écrire une fonction **python def q(n,x) :** qui renvoie la valeur de $P_n(x)$. Écrire ensuite une fonction **python def p(n,x) :** qui renvoie la valeur de $P_n(x)$. La fonction p ne devra utiliser que des additions, multiplications et divisions (pas de factoriels). Écrire un algorithme qui renvoie les valeurs de $P_n(1)$ pour $n = 0, 10, 20, ..., 100$. Que constate-t-on ?

Écrire une fonction **def rac(n,h) :** qui à n renvoie une approximation à h près des racines de P_n, à l'aide de la dichotomie. Que constate-t-on lorsque n devient grand ? Que constate-t-on lorsque h devient petit ?

Exo 16 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ possédant exactement $k \geqslant 1$ coefficients non nuls. Montrer par récurrence que P a au plus $2k-1$ racines réelles distinctes et que cette majoration est optimale.

RELATIONS BINAIRES

Exo 1 Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. On définit sur $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{R}$ la relation binaire par : $X\mathcal{R}Y$ si $X \cap A = Y \cap A$.

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b) Montrer que $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(A)$.

Exo 2 Soit $E = \mathbb{N}^2$. On définit la relation $\preceq$ par

$$\forall((x,y),(x',y')) \in E,\ (x,y) \preceq (x',y') \text{ si } [(x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leqslant y')]$$

a) Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre. Est-elle totale ou partielle ? Comment s'appelle-t-elle ?

b) E a t-il un plus petit élément,un plus grand élément ?

c) Les parties $\{(p,p)\ ,\ p \in \mathbb{N}\}$, $\{(2,2^p)\ ,\ p \in \mathbb{N}\}$ sont elles majorées ? Si oui, ont-elles un plus grand élément ? une borne supérieure ?

d) Démontrer que toute partie de E non vide admet un plus petit élément.

e) Démontrer que toute partie de E non vide et majorée admet une borne supérieure.

Exo 3 Déterminer le nombre de relations binaires symétriques et réflexives sur un ensemble à n éléments.

Exo 4 Soit E un ensemble ordonné. Soit $(a,b) \in E^2$. Déterminer $\sup\{a,b\}$ dans les cas suivant :

(a) $E = \mathbb{R}$ avec l'ordre usuel.

(b) $E = \mathcal{P}(X)$ avec l'inclusion.

(c) $E = \mathbb{N}^*$ avec l'ordre "a divise b".

(d) $E = \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ avec l'ordre usuel (on fera juste un dessin).

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Exo 1 Soit $I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)dx$.

(a) Calculer I_0 et I_1.

(b) Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $I_n = \frac{1}{\pi} - \frac{n(n-1)}{\pi^2} I_{n-2}$.

(c) Montrer par récurrence que $\forall p \geqslant 1$, $I_{2p} = (-1)^p \frac{2(2p)!}{\pi^{2p+1}} + \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \frac{(2p)!}{(2p-2k)!\pi^{2k+1}}$

Exo 2 Soit E un ensemble non vide de n éléments. On cherche le nombre S_n de couple (A,B) tels que $A \cup B = E$ (attention : A et B ne sont pas forcément disjoints).

(a) Calculer ce nombre lorsque $n = 1, 2$.

(b) Soit $A \subset E$ fixé de cardinal p. Combien y-a-t-il de couples (A,B) solutions de $A \cup B = E$?

(c) En déduire S_n.

(d) Généraliser.

Exo 3 Soit A inclus dans $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence :
A majoré et minoré $\Longleftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A$, $|x| \leqslant M$.

Exo 4 Soient r, r' rationnels et α, α' irrationnels.
Que dire de $r + r'$, rr' , $r + \alpha$, $r\alpha$, $\alpha + \alpha'$, $\alpha\alpha'$, $\frac{r}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\alpha'}$ et $\frac{\alpha}{r}$?

Exo 5 Soit A et B, inclus dans $\mathbb{R}$, non vides et majorés. Calculer $\sup(A \cup B)$ en fonction de $\sup A$ et de $\sup B$.

Exo 6 Soient x et y deux réels. Montrer que $\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor \Longrightarrow x < y$. A-t-on la réciproque ?

Exo 7 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geqslant 1$: $\left| x - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right| \leqslant \frac{1}{n}$. Conséquence ?

Exo 8 Soit f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

(a) Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, $f([0, \pi])$, $f([0, \frac{1}{2}])$, $f^{-1}(]0, 1[)$, $f^{-1}(]-15, 0])$, $f^{-1}(\mathbb{N})$,$f^{-1}(\{-13\})$.

(b) Déterminer $f(f^{-1}([0, 1]))$, $f^{-1}(f([0, 1]))$

(c) Déterminer les sous-ensembles A tels que $f(f^{-1}(A)) = A$

Exo 9 Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 3$ on a $n! > (\frac{n}{e})^n$.

NOMBRES COMPLEXES

Exo 1 Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{i\theta}}\right) \geqslant \frac{2}{3}$.

Exo 2 Linéariser $\cos^3 x \sin^5 x$ et délinéariser $\sin 6t$.

Exo 3 Déterminer les complexes z tels que $|z| = |1 - z| = 1$.

Exo 4 Calculer une racine carré de $1 + 4i\sqrt{3}$.

Exo 5 Résoudre $z^3 = \frac{1 + j}{\sqrt{3} - i}$.

Exo 6 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre $z^8 - 2z^4 \cos\theta + 1 = 0$.

Exo 7 Déterminer les points M d'affixe z tels que les points A, M et M' d'affixes respectives $1, z$ et z^2 soient alignés.

Exo 8 Résoudre $\cos z = 2$ dans $\mathbb{C}$. Généraliser.

Exo 9 On définit Γ l'ensemble de toutes les racines n-ième de l'unité quand n décrit $\mathbb{N}^*$.
On a donc $\Gamma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$.

(a) Montrer que $\Gamma \subset \mathbb{U}$. Donner 10 exemples d'éléments de Γ.

(b) e^i appartient-il à $\mathbb{U}$? e^i appartient-il à Γ ?

(c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une C.N.S. sur α pour que $e^{i\alpha} \in \Gamma$.

(d) Montrer que $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$: $|e^{i\alpha} - e^{i\beta}| \leqslant |\alpha - \beta|$.

(e) En déduire que $\forall u \in \mathbb{U}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists z \in \Gamma$ tel que $|u - z| \leqslant \varepsilon$. Interpréter.

DÉNOMBREMENT

Exo 1 Déterminer une bijection de $[\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n^2]\!]$. On exhibera sa bijection réciproque.

Exo 2 Soit E de cardinal $n \geqslant 1$. Calculer en fonction de n les sommes $\sum_{A \subset E} |A|$ et $\sum_{A \subset E} 2^{|A|}$.

Exo 3 Soient $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $2 \leqslant p \leqslant n$. Trouver le nombre de p-listes d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$ telles que le plus petit élément soit placé en première position et le plus grand en dernière position.

Exo 4 Soient $n_1, \ldots, n_r$ des entiers naturels non nuls. On considère un mot contenant n_1 fois la lettre L_1,...,n_r fois la lettre L_r. Déterminer le nombre d'anagrammes de ce mot.

Exo 5 On donne un entier naturel non nul n. On appelle composition de n toute liste d'entiers supérieurs ou égaux à un dont la somme fait n.

i) Faire la liste de toutes les compositions des entiers 1,2,3,4.

ii) Déterminer le nombre de compositions d'un entier n quelconque.

Exo **6** Soient deux entiers naturels m et p tels que $m \geqslant 2$ et $p \geqslant 2$.

On considère une cour fermée par m murs non nécessairement rectilignes et l'on dispose de p couleurs différentes. On souhaite repeindre les m murs de telle sorte que deux murs consécutifs ne soient pas de la même couleur. On note enfin $\pi_{m,p}$ le nombre de façons de parvenir à notre souhait.

i) Calculer $\pi_{2,p}$ et $\pi_{3,p}$.

ii) Donner une relation de récurrence entre $\pi_{m+2,p}$, $\pi_{m+1,p}$ et $\pi_{m,p}$.

iii) En déduire la valeur de $\pi_{m,p}$ pour toutes les valeurs de m et p.

Exo **7** On donne un couple $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant n$. On considère l'ensemble X des $(n+1)$-listes formées uniquement de "0" et de "1" et qui contiennent au moins $p+1$ chiffres "1". On va dénombrer X de deux manières différentes.

i) On considère pour $p+1 \leqslant i \leqslant n+1$, l'ensemble X_i des listes de X ayant exactement $i+1$ chiffres "1". Dénombrer X_i et en déduire un premier dénombrement de X.

ii) On considère maintenant , l'ensemble Y_i des listes de X pour lesquelles le $(p+1)$-ième chiffre "1" apparait en $(i+1)$-ième position. Dénombrer Y_i et en déduire un deuxième dénombrement de X.

iii) En déduire l'égalité sommatoire suivante : $\forall (p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant n$: $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} \binom{n+1}{i+1} = \sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} 2^{n-i}$.

Exo **8** 1) Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombre de couples (A, B) de parties de E telles que $A \subset B$?

2) Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombre de quadruplets (A, B, C, D) de parties de E telles que $A \subset B \subset C \subset D$?

Exo **9** Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On en tire successivement n au hasard en remettant chaque fois la boule tirée.

a) Calculer la probabilité de l'événement B_i : "On obtient i boules blanches", pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

b) Calculer , pour tout x réel, $\displaystyle\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} x^{2i}$.

c) En déduire la probabilité que le nombre de boules blanches obtenus soit pair.

Exo **10** Combien existe-t-il de mains différentes au poker contenant exactement un full ? un brelan ? une paire ? (une main au poker est un ensemble de 5 cartes pris dans l'ensemble des 32 cartes. Une main contient une paire si elle contient 2 cartes d'une même hauteur (as-roi...8-7), et 2 seulement, un brelan si elle contient 3 cartes d'une même hauteur, les autres cartes étant de hauteur différente et différente de la hauteur du brelan, un full si elle contient 3 cartes d'une même hauteur, les 2 autres cartes étant d'une même hauteur.

Exo **11** 1) $2n$ personnes doivent prendre place autour d'une table ronde. De combien de façons peuvent-elles s'asseoir ?

2) On suppose qu'il y a n hommes et n femmes. De combien de façons peuvent-elles s'asseoir en respectant l'alternance ?

Exo **12** Démontrer à l'aide d'un dénombrement que $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exo **13** Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, on note $S(n, p)$ le nombre de surjections de $E = [\![1, n]\!]$ dans $F = [\![1, p]\!]$.

1. Déterminer $S(n, p)$ lorsque $p > n$.
2. Calculer $S(n, n)$, $S(n, 1)$, $S(n, 2)$ et $S(n, 3)$.
3. Établir une relation entre p^n et les $S(n, k)$.
4. On suppose que $p \leqslant n$. Montrer que $S(n, p) = p(S(n-1, p) + S(n-1, p-1))$.

On admet (avec les séries entières et la relation ci-dessus) que si $p \leqslant n$, on a : $S(n, p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.

5. En déduire la valeur des sommes suivantes : $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n$ et $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1}$.

Exo **14** On appelle dérangement une bijection sans point fixe. Donner une relation de récurrence pour calculer le nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments.

Exo **15** On note D_n le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments n'ayant pas de point fixe.

1. Établir, par une preuve combinatoire, que pour tout $n \geqslant 2$,

$$D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1}).$$

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$.

3. En déduire la valeur de D_n.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue le tirage d'une permutation dans $\mathcal{S}_n$. On note p_n , la probabilité d'obtenir un dérangement. Déterminer la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini.

SUITES RÉELLES ET COMPLEXES

Exo **1** Soit (x_n) une suite qui converge vers ℓ. Que peut-on dire de la suite (x_n^n) ?

Exo **2** Étudier la convergence de (u_n) définie par : $u_1 > 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n} \arctan(u_n)$.

Exo **3** Soit $P_n = X^n - nX + 1$.

(a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, P_n possède une unique racine dans $[0,1]$, notée a_n.

(b) Montrer que (a_n) converge vers 0.

(c) Donner un développement asymptotique à 2 termes. C'est-à-dire $a_n = b_n + c_n + o(c_n)$ avec $c_n << b_n$.

Exo **4** Soit (u_n) telle que (u_{2n}) ,(u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Que dire de (u_n) ?

Exo **5** Montrer que $\forall x > 0 : |\sin x - x| \leqslant \dfrac{x^3}{6}$. Étudier la convergence de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{1}{n+k})$.

Exo **6** Soient a et b tels que $a > 0$, $b > 0$ et $a \neq b$. Étudier la suite $u_n = \left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$.

Exo **7** soit $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^p$.

(a) Donner au "feeling" un équivalent de S_n.

(b) Démontrer votre "feeling".

Exo **8** Déterminer les limites des suites : $\dfrac{n!}{n^{2n}}$ et $\dfrac{(\ln n)^7}{\sqrt{n}}$. Montrer que $n! << 2^{n^2}$. Donner des équivalents de $\ln(n+1)$, $\ln(n^2+1)$, $\exp(n+1)$, $\arctan(n+1)$.

Exo **9** Combien y-a-t-il de façon de vider une bassine de 100 litres avec un seau de 1 litre et un seau de 2 litres (attention : on tient compte de l'ordre) ?

Exo **10** Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer u_n en fonction de n quand $u_0 = 1$, $u_1 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = 2xu_{n+1} - u_n$.

Exo **11** Soit (u_n) une suite convergente. Étudier la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2}$.

Exo **12** Étudier la convergence de la suite $\left(\dfrac{e^{in\theta} + 5n}{in + (\frac{1}{2} + \frac{i}{3})^n}\right)$.

Exo **13** Soit $q \in \mathbb{C}$. Étudier la convergence de la suite (q^{2^n}).

Exo **14** Soit (u_n) une suite à valeurs réelles.

1) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2u_n + u_{n-1}$. Montrer que la suite (u_n) converge SSI la suite (v_n) converge.

2) A-t-on le même résultat avec $v_n = \dfrac{1}{2}u_n + u_{n-1}$?

Exo **15** Soit (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{C}$. Soit α une valeur d'adhérence de (u_n) et soit β une valeur d'adhérence de (v_n). $\alpha + \beta$ est-elle une valeur d'adhérence de $(u_n + v_n)$? α^3 est-elle une valeur d'adhérence de (u_n^3) ?

Exo **16** Soit (u_n) une suite bornée de $\mathbb{R}$. On suppose que (u_n) n'admet qu'un nombre fini de valeurs d'adhérence et que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrer que (u_n) est convergente.

Exo **17** Déterminer une suite (u_n) telle que $\{u_n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $\mathbb{R}$. Quel sont ses valeurs d'adhérence ?

Suites récurrentes

Exo **18** Soit $(a, b, \alpha) \in \mathbb{R}^3$. Calculer u_n en fonction de n quand $u_0 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = au_n + b$.

Exo **19** Soit f une fonction k-lipschitzienne avec $0 < k < 1$ et soit I un intervalle stable par f. On suppose que f admet un point fixe γ dans I. On définit une suite récurrente par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer que γ est unique.

(b) Majorer $|u_n - \gamma|$ en fonction de k, u_0, n et γ.

(c) Majorer $|u_n - \gamma|$ en fonction de k et n quand $I = [a, b]$.

Exo $\boxed{20}$ Soit f une fonction définie de I dans I et $\gamma \in I$ tel que $f(\gamma) = \gamma$.
On dit que f est **höldérienne** s'il existe $\lambda > 0$ tel que $\forall x \in I : |f(x) - \gamma| \leqslant \lambda |x - \gamma|^2$.
Soit la suite récurrente définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) **Lemme** : Soit (α_n) qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n > 0$ et $\alpha_{n+1} \leqslant \lambda \alpha_n^2$. Majorer α_n en fonction de λ , α_0 et n , puis en fonction λ , α_p et n (avec $p \leqslant n$).

(b) En déduire une majoration de $|u_n - \gamma|$ en fonction de λ , $|u_p - \gamma|$ et n (avec $p \leqslant n$).

(c) Conclure.

(d) **Un exemple** : Soit $b \geqslant 1$, fixé. Soit (u_n) définie par $u_0 \geqslant 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{b}{u_n})$

i. Montrer que $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f höldérienne et déterminer son point fixe γ.

ii. Majorer $|u_n - \gamma|$ en fonction $|u_0 - \gamma|$ et n.

iii. Prenez un u_0 "proche" de γ et en déduire un rationnel proche de $\sqrt{97}$ à 10^{-100} près.

Exo $\boxed{21}$ Étudier les suites récurrentes suivantes :

a) $u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{1 - u_n}}$ et $0 < u_0 < 1$ et b) $u_{n+1} = e^{-u_n}$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.

Exo $\boxed{22}$ (a) Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution a_n dans $\left](n-1)\pi + \frac{\pi}{2}; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. En donner un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$.

(b) Vérifier que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n > \pi + a_{n-1}$.

(c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. Montrer que $(b_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite croissante et qu'elle converge.

(d) Calculer $\tan(a_n)$ en fonction de b_n de deux manières différentes. En déduire une relation vérifiée par b_n puis la limite de la suite (b_n).

(e) Trouver la limite de la suite (nb_n) puis en déduire un équivalent de b_n et enfin un développement asymptotique à 3 termes de b_n.de

Exo $\boxed{23}$ On considère l'équation $e^x - x^n = 0$.

(a) Montrer que, pour n assez grand, cette équation a exactement deux solutions positives

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

(b) Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ ; donner un équivalent de $u_n - \ell$.

(c) La suite (v_n) converge-t-elle ? Déterminer un équivalent de v_n.

(d) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de v_n.

FONCTIONS RÉELLES

Exo $\boxed{1}$ Soit f continue sur $[0, 1]$ tel que $f(0) = f(1)$.

(a) Montrer par l'absurde qu'il existe $a \in [0, 1]$ tel que $f(a + \frac{1}{2}) = f(a)$.

(b) Montrer par l'absurde qu'il existe $b \in [0, 1]$ tel que $f(b + \frac{1}{3}) = f(b)$.

(c) Application : Coulibaly parcourt 80km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de 30 minutes pendant lequel il a parcourut exactement 40 km.

Exo $\boxed{2}$ Soient f et g , 2 fonctions lipschitziennes sur $[a, b]$. Montrer que $f + g$ et fg le sont aussi.

Exo $\boxed{3}$ Déterminer les limites suivantes :

$\sqrt{x^2 + 1} - x$ en $+\infty$, $\ln(e^x + 1) - x$ en $+\infty$ et $\dfrac{x^{10}}{e^{\sqrt{x}} - 1}$ en 0 et $+\infty$.

Exo $\boxed{4}$ Déterminer des équivalents simples de :

a) $\dfrac{1}{x^n - 1}$ en 1. b) $\dfrac{\sin x}{3x - \pi}$ en $\frac{\pi}{3}$. c) $e^x - 1 - x$ en 0. d) $\dfrac{2x + 5}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$ en 1.

Exo 5 Déterminer un petit o simple de

a) e^{-x^2} en $+\infty$. b) $\dfrac{(\ln x)^{100}}{x^3}$ en $+\infty$. c) $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ en 0.

Exo 6 On cherche à déterminer les fonctions f définies et continues sur $\mathbb{R}$, qui vérifient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x+y) = f(x)f(y).$$

Soit f une telle fonction. On suppose de plus que f est non nulle.

(a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$.

(b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : f(nx) = f(x)^n$.
On pose $a = f(1)$.

(c) Calculer $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ puis $f(r)$ pour $r \in \mathbb{Q}$.

(d) Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer $f(t)$.

(e) Conclure.

Exo 7 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.

(a) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) En encadrant $\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ à l'aide de x, montrer que f est continue en 0.

(c) Tracer f sur $\mathbb{R}_+$.

Exo 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $z_n = 1 + \dfrac{i}{n}$. Déterminer $\arg(z_n)$ à l'aide d'un arctan.

En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \dfrac{i}{n})^n$.

Exo 9 Montrer que $2 \arctan \dfrac{1}{5} = \arctan \dfrac{5}{12}$.

Exo 10 Montrer que $P_n(x) = [(x^2-1)^n]^{(n)}$ admet n racines 2 à 2 distinctes dans $]-1, 1[$.

Exo 11 La fonction $\sqrt{x}$ est-elle polynômiale sur $\mathbb{R}^+$? sur $[1, 3]$?

Exo 12 Déterminer les fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que :
$\exists \alpha > 1$ et $\exists K \geqslant 0$, $\forall (x, y) \in [a, b]^2 : |f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|^\alpha$.

Exo 13 Étudier la continuité et la dérivabilité de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \displaystyle\int_0^1 |x^2 - t| dx$.

Exo 14 On considère **l'équation fonctionnelle** d'inconnue $f : \forall x \in \mathbb{R} : f(2x) = 2f(x)$. Déterminer les solutions dérivables en 0 de cette équation. Donner un exemple de fonction solution de cette équation non continue.

Exo 15 On considère **l'équation fonctionnelle** d'inconnue $f : (*) : \forall x \in \mathbb{R} : f'(-x) = f(x)$.

(a) Montrer qu'une solution de $(*)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(b) En dérivant $(*)$, déterminer les solutions de cette équation.

Exo 16 Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une fonction 1-lipschitzienne, et (x_n) définie par $x_0 \in [a, b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n + f(x_n)}{2}$. Montrer que (x_n) converge vers un point fixe de f.

Exo 17 Si $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$, soit $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$.

(a) Déterminer le plus petit réel x_n strictement positif en lequel f_n atteint un maximum local.

(b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n)$ à l'aide des sommes de Riemann.

CONVEXITÉ

Exo 1 Montrer que :

(a) $\forall x \in [0, \dfrac{\pi}{2}]\mathbb{R} : 0 \leqslant \sin x \leqslant \dfrac{2}{\pi} x$. (b) $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \arctan x \leqslant x$.

(c) $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n : \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$. Montrer que $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \cdots + \dfrac{x_{n-1}}{x_n} + \dfrac{x_n}{x_1} \geqslant n$.

Exo $\boxed{2}$ Donner un exemple de fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non dérivable en 0,1, et -1.

Exo $\boxed{3}$ Soit f convexe sur un intervalle bornée $]a,b[$, montrer que f est minorée.

Exo $\boxed{4}$ Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convexe et majorée. Montrer que f est constante.

Exo $\boxed{5}$ Montrer que pour tous $(x,y)\in]1,+\infty[^2$, $\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\geqslant\sqrt{\ln x\ln y}$

Exo $\boxed{6}$ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

(a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f^n(0)$.

(b) Étudier la convexité et tracer f.

Exo $\boxed{7}$ Soit f une fonction convexe et C^2, définie sur $\mathbb{R}^+$, montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite finie ou infinie en $+\infty$. Montrer que si cette limite est un nombre négatif ou nul alors f est décroissante.

Exo $\boxed{8}$ Soit f convexe de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable à gauche et à droite en tout point $]0,1[$ et que f'_d et f'_g sont croissantes sur $]0,1[$.

Exo $\boxed{9}$ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que f vérifie :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\quad,\quad f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exo $\boxed{10}$ Soit p un réel tel que $p>1$.

(a) Montrer que $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ et $\forall(\lambda,\mu)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ $(\lambda x+\mu y)^p\leqslant(\lambda x^p+\mu y^p)(\lambda+\mu)^{p-1}$.

(b) En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

indication : On commencera par appliquer le (a) avec $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i^p=\sum_{i=1}^n b_i^p=1$.

DÉVELOPPEMENTS LIMITES-ÉTUDES LOCALES

Exo $\boxed{1}$ Donner le DL en 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes :

$$e^{-3x},\qquad e^{2x^2},\qquad \ln(1+\frac{x}{3}),\qquad \cos\sqrt{x},\qquad \frac{1}{x+2},\qquad 2^{x^2}.$$

Exo $\boxed{2}$ Donner le DL en a à l'ordre 2 des fonctions suivantes : $\tan x$ en $a=\dfrac{\pi}{3}$, $\sqrt{x}$ en $a=2$, $\ln(-1+x)$ en $a=3$, $\arctan x$ en $a=\sqrt{3}$, $e^{\frac{1}{x+2}}$ en $a=+\infty$.

Exo $\boxed{3}$ Soit P une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ \neq}}\left(\frac{xP(a)-aP(x)}{x-a}\right)$

Exo $\boxed{4}$ Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{\frac{x^2}{2}}+\ln(\cos x)-1}{\tan^4 x}\right)\quad,\quad\lim_{x\to1}\left(\frac{\ln x}{\sin\pi x}\right)\quad,\quad\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x-1\right)\ln x.$$

Exo $\boxed{5}$ Déterminer un équivalent simple de

$$\text{a)}\ \frac{-2+\sin x+\ln(1+x)+\cos x+e^x}{(\arcsin x^2)^3+\tan^6 x}\quad\text{en }0\quad,\quad\text{b)}\ \left(\frac{3^x+7^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}-7\quad\text{en}\quad+\infty.$$

Exo **6** Calculer les DL suivants :

a) $e^{6\sin x}$ en 0 à l'ordre 4 ,

b) $(1+2x+3x^2)^8$ en 0 à l'ordre 3 ,

c) $\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{(x(1-x)}}$ en 0 à l'ordre 3 ,

d) $\dfrac{1}{\cos x}$ en 0 à l'ordre 6.

Exo **7** Soit f définie sur $]-\infty,1[$ par $f(x)=(1-x)^{-\frac{1}{x}}$.

(a) Prolonger f par continuité en 0 et étudier les variations de f.

(b) Montrer que f admet un DL en 0 à tout ordre et donner celui d'ordre 2.

(c) Tracer le graphe de f.

Exo **8** Calculer le DL en 0 à l'ordre $2n+1$ de $\arccos x$ (on donnera les coefficients du DL sans pointillés).

Exo **9** Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $(x+1)^2\arctan\dfrac{1}{x}$

(a) Étudier l'allure locale (tangente et position) en 0.

(b) Étudier l'allure locale (asymptote et position) en $+\infty$.

(c) Tracer le graphe de f.

Exo **10** Soit f définie de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin x+\tan x$.

Montrer que f est bijective, que f^{-1} est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Calculer le DL de f^{-1} en 0 à l'ordre 3.

Exo **11** Calculer la limite suivante

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos(3x)}\left(\arctan(2\sin x)-\frac{\pi}{4}\right)$$

SÉRIES NUMÉRIQUES RÉELLES ET COMPLEXES

Exo **1** Étudier la nature des séries suivantes :

a) $\left(\sum\dfrac{2^n}{3^n+4^n}\right)$ b) $\left(\sum\dfrac{2^n+\ln n}{3^n-\cos n}\right)$ c) $\left(\sum\dfrac{n^4+n^3-2n^2+n+7}{100n^3-4n^2+108n+147}\right)$

d) $\left(\sum\cos\dfrac{1}{n}-e^{\frac{1}{n}}\right)$ e) $\left(\sum\ln(\cos\dfrac{1}{n})\right)$ f) $\left(\sum e-(1+\dfrac{1}{n})^n\right)$ g) $\left(\sum\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}\right)$

h) $\left(\sum\dfrac{1}{2^{\ln n}}\right)$ i) $\left(\sum\dfrac{\cos(3^n)}{n^3}\right)$ j) $\left(\sum\dfrac{n^2+\ln n}{2^{\sqrt{n}}}\right)$ k) $\left(\sum\dfrac{\arctan(n^2+\ln n)}{n^2}\right)$

Exo **2** Étudier la nature des séries suivantes : a) $\left(\sum\dfrac{n!}{n^n}\right)$ b) $\left(\sum\dfrac{n^2}{2^n}x^n\right)$ c) $\left(\sum\dbinom{3n}{n}x^n\right)$

Exo **3** Étudier la nature de la série $(\sum u_n)$ où $u_n=(n\sin\dfrac{1}{n})^n$.

Exo **4** Séries de Bertrand (HPTS)

(a) Rappeler $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^a}{x^b}$.

(b) Étudier la nature des séries suivantes :

$(\sum\dfrac{\ln n}{n^3})$, $(\sum\dfrac{(\ln n)^{100}}{n^2})$, $(\sum\dfrac{(\ln n)^{37}}{n^{1,2}})$, $(\sum\dfrac{1}{(\ln n)^{100}\sqrt{n}})$, $(\sum\dfrac{1}{n\ln n})$.

(c) Généraliser à l'aide des exemples ci-dessus.

Exo **5** Nature de la série $\left(\sum a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}\right)$ (avec $a>0$).

Exo **6** Étudier la nature des séries suivantes :

a) $(\sum(-1)^n\dfrac{(\ln n)^{10}}{n-10\sqrt{n}+5})$, b) $(\sum\dfrac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}})$ c) $(\sum\sin(\pi\sqrt{n^2+2}))$

Exo **7** Soit (u_n) définie par $u_1\in\mathbb{R}$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $u_{n+1}=\dfrac{1}{n}e^{-u_n}$. Étudier la nature de la série $(\sum u_n)$ et de la série $(\sum(-1)^nu_n)$.

Exo $\boxed{8}$ Donner la nature de la série $(\sum u_n)$ où $u_n = \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exo $\boxed{9}$ Soit z un complexe fixé.

(a) On suppose que $\mathrm{Re}(z) > 1$. Étudier la nature de la série $(\sum \frac{1}{n^z})$.

(b) On admet que $(\sum \frac{\cos(\ln n)}{n})$ est divergente. Étudier la nature de la série $(\sum \frac{1}{n^{1+i}})$.

Exo $\boxed{10}$ Soit $u_n = \int_0^1 t^n \sin(\pi t)dt$. Étudier la nature de la série $(\sum u_n)$.

Exo $\boxed{11}$ Calculer , après en avoir justifier l'existence , les sommes suivantes :

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2})$.

Exo $\boxed{12}$ Calculer la somme suivante : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\left\lfloor\sqrt{n+1}\right\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)$

Exo $\boxed{13}$ Calculer , après avoir justifier l'existence , une valeur approchée des sommes suivantes :

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!}$ à 10^{-1} près b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ à 10^{-2} près c) $\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n!}$ à 10^{-100} près.

Exo $\boxed{14}$ Soit $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

(a) Justifier l'existence de u_n.

(b) Montrer que $(\sum u_n)$ est convergente.

(c) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Exo $\boxed{15}$ Soit $u_n = \frac{j^n}{n}$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

(a) Calculer pour $p \in \mathbb{N}$, $v_p = u_{3p+1} + u_{3p+2} + u_{3p+3}$ et donner en un équivalent.

(b) Montrer que $(\sum v_p)$ est convergente , puis que $(\sum u_n)$ est convergente.

(c) Grâce à la Méga-astuce $\frac{1}{n} = \int_0^1 t^{n-1}dt$, calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

(d) Que dire de la série $(\sum \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{n})$ et de sa somme ?

Exo $\boxed{16}$ Soit (x_n) définie par $x_0 > 0$ et pour tout entier n, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$.

1) Étudier la suite (x_n).
2) Déterminer un équivalent simple de x_n.
3) On prend $x_0 = 5$. Montrer que $45 < x_{1000} < 45,1$.

Exo $\boxed{17}$ On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n+1}{2}} \end{cases}$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - x_n$.
1) Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exo $\boxed{18}$ On pose, pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \frac{1}{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}$

Quelle est la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{n}$?

Exo $\boxed{19}$ Soit $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $u_n = h_n - \ln n$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.
a) Montrer que (u_n) converge.
b) A l'aide de (v_n), donner un développement asymptotique à 4 termes de h_n.

Exo $\boxed{20}$ Soit φ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{\varphi(n)}$ et $v_n = \frac{\varphi(n)}{n^2}$. Étudier les suites et les séries suivantes : (u_n) , (v_n), $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$.

Exo 21 Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) \sim \frac{a}{\sqrt{n}}$.

On utilisera $\sigma_n = 1 + \cdots + \dfrac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$

Exo 22 Établir une bijection entre $[0,1]$ et $[0,1[$, puis entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

Exo 23 Soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}}$ définie par $(u_{p,q} = \dfrac{2(p-q)}{(p+q+1)(p+q+2)(p+q+3)}$.

a) Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q}$ b) Calculer $\displaystyle\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}$ c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} u_{k,n-k}$.

d) La série $\left(\sum u_{p,q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}}$ est elle absolument convergente ?

Exo 24 Existence et calcul (quand elle existe !) de la série double $\displaystyle\left(\sum\sum \frac{1}{(p+q+1)^{\alpha}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.

Exo 25 On admet que $\sigma_n = 1 + \cdots + \dfrac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$ et que pour $x \in [-1,1[$: $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$.

On pose enfin $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\zeta(n)}{n} = \gamma$

Exo 26 Pour tout entier naturel n non nul, on note $\nu_2(n)$ le nombre de 1 dans l'écriture binaire de n.

(a) Justifier que $\nu_2(n) = \underset{+\infty}{O}(\ln n)$. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\nu_2(n)}{n(n+1)}$ converge.

(b) Exprimer $\nu_2(2n)$ et $\nu_2(2n+1)$ en fonction de $\nu_2(n)$.

(c) En déduire la somme de la série.

(d) On souhaite vérifier avec python. Écrire la fonction **v2** de manière récursive. En déduire la fonction somme partielle et vérifier numériquement le c).

Exo 27 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{\ln(x)}}\sin(x)\,dx$.

Exo 28 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On considère la série de terme général $u_n = (n^4+n^2)^{1/4} - P(n)^{1/3}$.
Déterminer P pour que la série $\sum u_n$ converge.

Exo 29 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour la suite (u_n) soit convergente avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \alpha\ln(n)$$

(b) Exprimer la limite de la suite (u_n) en fonction de la constante d'Euler $\gamma = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right]$.

Exo 30 Soit $j \in \mathbb{N}$, on note $k_j = \min\left\{p \in \mathbb{N} \;\middle|\; \displaystyle\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} \geqslant j\right\}$

(a) Justifier l'existence de k_j puis montrer que k_j tend vers $+\infty$ lorsque j tend vers $+\infty$.

(b) Montrer que $1 - \dfrac{1}{k_j} \leqslant S_{k_{j+1}} - S_{k_j} \leqslant 1 + \dfrac{1}{k_{j+1}}$ avec $S_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}$.

(c) A l'aide de la comparaison série-intégrale, montrer que $\displaystyle\lim_{j\to+\infty}\frac{k_{j+1}}{k_j} = e$.

PROBABILITÉS

Exo 1 Une compagnie d'assurance automobile a classée ses assurés en trois classes d'âges : moins de 25 ans, de 25 ans à 50 ans, plus de 50 ans. Le tableau ci-dessous fournit deux informations : la proportion d'assurés appartenant à chaque classe et la probabilité qu'un assuré d'une classe donnée déclare au moins un accident au cours de l'année.

Classe	proportion	probabilité
moins de 25 ans	0,25	0,12
de 25 à 50 ans	0,53	0,06
plus de 50 ans	0,22	0,09

1. Un assuré est tiré au hasard dans le fichier de la compagnie. Quelle est la probabilité qu'il ait déclaré au moins un accident au cours de l'année ?

2. Quelle est la probabilité qu'un assuré ayant déclaré au moins un accident au cours de l'année soit âgé d'au plus 25 ans ?

3. Quel est la probabilité qu'un assuré âgé de 25 ans ou plus ait au moins un accident au cours de l'année ?

4. Quelle est la probabilité qu'un assuré n'ayant déclaré aucun accident soit âgé de 25 à 50 ans ?

Exo **2** On jette trois dés non pipés indiscernables.

1. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un as.

2. Que vaut la probabilité d'obtenir au moins deux faces portant le même chiffre ?

3. Calculer la probabilité que la somme des points marqués sur les trois dés soit paire.

4. Montrer que les évènements considérés aux questions 2. et 3. sont indépendants.

Exo **3** Dans une bibliothèque, n livres sont exposés sur une étagère rectiligne et répartis au hasard. Parmi ces n livres, k sont d'un même auteur 'A' , les autres étant d'auteurs tous différents. Calculer la probabilité qu'au moins p livres de 'A' se retrouvent côte à côte dans les cas suivants :

1. $n = 20$, $k = 3$, $p = 3$;

2. $n = 20$, $k = 5$, $p = 2$.

Exo **4** 1. Mon voisin a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

2. Un autre voisin a deux enfants dont une fille. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité que l'ainé soit un garçon ?

Exo **5** On cherche un parapluie qui, avec la probabilité $\frac{p}{7}$ se trouve dans l'un quelconques des 7 étages d'un immeuble ($p \in [0, 1]$ fixé). On a exploré les 6 premiers étages. Quelle est la probabilité que le parapluie se trouve au 7-ième étage. Soit $f(p)$ cette probabilité ; représenter graphiquement f. Donner une interprétation de $f(\frac{1}{2})$.

Exo **6** Une maladie M affecte un français sur 1000. On dispose d'un teste sanguin qui détecte M avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant on obtient un résultat faussement positif pour 0,2% des personnes saines testées.

Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsqu'elle a un test positif ? Conclure.

Exo **7** On considère n "menteurs" $I_1,\ldots,I_n$. I_1 reçoit une information sous la forme de "oui" ou "non", la transmet à I_2, ainsi de suite jusqu'à I_n qui l'annonce au monde. Chacun d'eux transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité p, $0 < p < 1$, le contraire avec la probabilité $1 - p$ et les réponses des n personnes sont indépendantes.

1. Calculer la probabilité p_n pour que l'information soit fidèlement transmise. Que se passe-t-il lorsque n tend vers l'infini. Conclure

2. Reprendre le calcul de p_n à l'aide d'une variable aléatoire.

Exo **8** On dispose de $N+1$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne numérotée k contient k boules rouges et $N-k$ blanches. On choisit une urne au hasard. Sans connaitre son numéro, on en tire n fois de suite une boule, avec remise après chaque tirage.

1. Quelle est la probabilité que le $(n + 1)$-ième tirage donne encore une boule rouge sachant que, au cours des n premiers tirages, seules des boules rouges ont été tirées ?

2. Calculer la limite de cette probabilité lorsque N tend vers l'infini.

(ce résultat est connu sous le nom de *loi de succession de Laplace*)

Exo **9** Soit T une **v.a.** à valeurs dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathbf{P}(T \geqslant n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On appelle **taux de panne** la suite (θ_n) définie par $\theta_n = \mathbf{P}(T = n / T \geqslant n)$, $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, si T est la durée de vie d'une ampoule électrique mesurée en heures, un observateur la trouvant allumée au début de l'heure n a la probabilité θ_n de la voir "griller" avant la fin de l'heure.

1. Calculer $\mathbf{P}(T = n)$ en fonction des θ_k , $k \leqslant n$.

2. Montrer qu'une suite de réels (θ_k) est un taux de panne **si et seulement si** pour tout entier $k \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant \theta_k < 1$ et la série $(\sum \theta_k)$ diverge. Que dire du cas où (θ_k) est constante ?

Exo $\boxed{10}$ Considérons le jeu suivant : un joueur lance successivement et indépendamment n fois une pièce de monnaie. Chaque fois qu'il obtient Pile, il gagne un point ; chaque fois qu'il obtient Face, il perd un point.

Soit $p \in]0,1[$ la probabilité d'obtenir Pile et $q = 1-p$ la probabilité d'obtenir Face pour chaque lancer. L'espace des épreuves est $\Omega_n = \{\text{Pile,Face}\}^n$. On a $\text{card}\Omega_n = 2^n$ et la probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω_n est donné par

$$\forall \omega \in \Omega_n : \mathbf{P}(\{\omega\}) = p^r q^{n-r} \text{ où } r \text{ est le nombre de piles obtenus lors de la réalisation de } \omega.$$

On définit les variables aléatoires $X_1, X_2 \ldots, X_n$ et $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n$ sur $(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n)$ par les conditions suivantes $(k \in [\![1,n]\!])$:

- $X_k(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_k = \text{Pile} \\ -1 & \text{si } \omega_k = \text{Face} \end{cases}$
- $S_0 = x_0$ où $x_0 \in \mathbb{Z}$ est la fortune initiale du joueur.
- $S_k = x_0 + X_1 + X_2 + \cdots + X_k$

La variable aléatoire X_k représente le gain du joueur -positif ou négatif, gain ou perte- du joueur au k-ième lancer. La variable aléatoire S_k représente la fortune du joueur après le k-ième lancer ou à l'instant k.

On peut représenter une partie complète à savoir un ω , par sa trajectoire, c'est-à-dire la ligne brisée joignant les points de coordonnées $(k, S_k(\omega))$ pour $k \in [\![0,n]\!]$, placé dans un repère. L'axe T des abscisses est ici interprété comme l'axe des temps.

Ainsi un chemin qui se trouve à l'instant k en (k,x) sera à l'instant $k+1$ en $(k+1,x+1)$ avec la probabilité p en $(k+1,x-1)$ avec la probabilité q.

Il y a donc 2^n chemins ou trajectoires possibles de n lancers. On se servira de cette représentation pour décrire les événements. Par exemple l'événement $(S_1 = 1, S_2 = 0)$ est l'ensemble des trajectoires passant par les points $(1,1)$ et $(2,0)$.

On notera $\mathcal{T}_{M,N}$ ou $\mathcal{T}_{(m,\mu)(,n,\nu)}$ le nombre de chemins joignant les points $M(m,\mu)$ à $N(n,\nu)$.

Lorsque l'expérience consiste en une suite infinie de tirage à Pile ou Face, la suite infinie correspondante de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ s'appelle une *marche aléatoire*.

(a) Pour tout $\omega \in \Omega_n$ donner la probabilité de ω en fonction de r, le nombre de Pile obtenus dans la réalisation de ω.

(b) Faire des schémas de différentes trajectoires.

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur m, μ, n, ν pour que puisse exister une trajectoire $T_{N,M}$ de $M(m,\mu)$ à $N(n,\nu)$.

(d) Déterminer le nombre $R_{N,M}$ de trajectoire $T_{N,M}$.

(e) *Principe de réflexion.* Soient $\mu >$ et $\nu > 0$ et M' le symétrique de M par rapport à l'axe des temps T.

i. Montrer qu'il existe autant de trajectoires touchant l'axe des temps et menant de M à N, que de trajectoires menant de M' à N.

ii. En déduire , lorsque partant de M, on arrive à N, la probabilité de ne jamais rencontrer l'axe des temps.

iii. Au cours d'un scrutin opposant deux candidats, $\mathbf{C}$ à obtenu 600 voix et $\mathbf{D}$ 400. Quelle est la probabilité que $\mathbf{C}$ ait été majoritaire tout au long du scrutin ?

iv. Cent personnes font la queue à un guichet de cinéma ; la place coûte cinq euros. 60 personnes n'ont en poche qu'un billet de cinq euros. Les 40 autres personnes ont chacune un billet de 10 euros. Combien faut-il de billets de cinq euros dans la caisse pour pour que, avec la probabilité d'au moins 95%, chacun soit servi dès qu'il se présente ?

Exo $\boxed{11}$ Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soient N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes.

On définit Y par $\forall \omega \in \Omega : Y(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega)$.

Montrer que Y est une variable aléatoire discrète.

Exo $\boxed{12}$ Soient n et N deux entiers naturels non nuls. On considère N urnes qui contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule dans chaque urne. Soit X_n le plus grand numéro obtenu.

(a) Déterminer le loi de X_n.

(b) Calculer, à N fixé, l'espérance de X_n puis montrer que $\mathbf{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{nN}{N+1}$.

Exo $\boxed{13}$ Soient $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,X]\!])$. Déterminer la loi de probabilités de Y ainsi que son espérance. Calculer la covariance de X et Y.

Exo $\boxed{\textbf{14}}$ Sur un écran numérique carré de N^2 pixels assimilé à $T = [\![0, N[\![^2$, on choisit de manière indépendante trois points A, B, C suivant une loi uniforme. Pour $M \neq P \in T$, on note $\Delta_{M,P}$ les points de T alignés avec M et P.

(a) Déterminer $\mathbf{P}(A = B)$.

(b) Montrer que , pour tout $M \neq P \in T$, on a $\mathbf{P}(C \in \Delta_{M,P}) \leqslant \dfrac{1}{N}$.

(c) Montrer que $\mathbf{P}(A, B, C \text{ forme un vrai triangle}) \geqslant 1 - \dfrac{1}{N} - \dfrac{1}{N^2}$.

Exo $\boxed{\textbf{15}}$ Sur un espace probabilisé, on considère une suite $(A_i)_{i\geqslant 1}$ d'événements indépendants. On note $p_i = \mathbf{P}(A_i)$ et on suppose que $a = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} p_i < +\infty$.

On veut montrer que , pour tous $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a : $\mathbf{P}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} \geqslant k\right) \leqslant \dfrac{a^k}{k!}$.

(a) Que dire du cas $k > n$?

(b) Montrer que $\mathbf{P}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} \geqslant k\right) \leqslant \sum_{\substack{F\subset[\![1,n]\!] \\ |F|=k}} \prod_{i\in F} p_i$.

(c) Si $a_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i$, montrer que $a_n^k \geqslant k! \displaystyle\sum_{\substack{F\subset[\![1,n]\!] \\ |F|=k}} \prod_{i\in F} p_i$. Conclure.

(d) Au ball-trap , un tireur vise à chaque épreuve une cible mobile. Sa probabilité de réussir au premier coup est $p \in]0, 1[$, et cette probabilité est inversement proportionnelle à la vitesse de la cible. D'une épreuve à la suivante, la vitesse de la cible augmente de 20%. Les tirs successifs sont supposés indépendants, et le stock de cartouche est illimité... Le tireur doit atteindre au moins 20 fois la cible. Majorer, indépendamment de p, sa probabilité de réussite.

Exo $\boxed{\textbf{16}}$ Un polycopié de 140 pages contient un nombre $n \geqslant 100$ d'erreurs typographiques réparties au hasard (n étant quand même inférieur au nombre de caractères que contient une page).

(a) Quelle est la loi exacte de la v.a. Y_0 représentant le nombre d'erreurs en page 13 ? Par quelle loi peut-on l'approcher ? Dans les deux questions suivantes, on suppose que Y_0 suit cette loi approchée.

(b) On effectue des lectures successives de cette page. A chaque lecture les erreurs sont corrigés avec une probabilité de $2/3$, indépendamment les unes des autres. On note Y_i le nombre d'erreurs restantes après la i-ième lecture.

Déterminer $\mathbf{P}(Y_1 = j / Y_0 = k)$ pour j et k entiers.

(c) Déterminer la loi de Y_1 puis celle de Y_i.

(d) En fait, le nombre d'erreurs contenues dans ce polycopié est modélisé par une v.a. N entière, d'espérance μ. On définit la variable Z_i correspondant au nombre total d'erreurs subsistant dans le polycopié après la i-ième lecture.

Déterminer $\mathbf{P}(Z_1 = k / N = n)$ pour n et k entiers.

(e) Déterminer $\mathbf{E}(Z_1)$ et $\mathbf{E}(Z_i)$.

Exo $\boxed{\textbf{17}}$ On considère une suite de n épreuves répétées indépendantes avec pour chaque épreuve trois résultats possibles : A avec la probabilité a, B avec la probabilité b, C avec la probabilité c. Quelle est la loi de la variable aléatoire $X = (n_A, n_B, n_C)$ où n_A est le nombre de résultats valant A etc... ? Vérifier que l'on a bien une loi de probabilité.

Exo $\boxed{\textbf{18}}$ On dispose de deux urnes. La première contient une proportion de $p \in]0, 1[$ boules blanches et de q boules noires. On effectue des tirages avec remise jusqu'à obtention d'une boule blanche. On note N le nombre aléatoire de tirages nécessaires. Dans une seconde urne contenant 10 boules numérotées de 0 à 9, on effectue alors N tirages avec remise, et si on note Y_j le chiffre obtenu lors du j-ième tirage, on forme le réel décimal :

$$X(\omega) = 0, Y_1(\omega)Y_2(\omega)\cdots Y_{N(\omega)}(\omega) = \sum_{j=1}^{N(\omega)} \frac{Y_j(\omega)}{10^j}$$

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des décimaux de $[0, 1[$, tout élément $d \in \mathcal{D}$ admettant une unique écriture de la forme $k10^{-n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ non divisible par 10, qu'on appelle écriture réduite de d (pour $d = 0$, on prend $k = 0$ et $n = 1$).

(a) Montrer que $\mathcal{D}$ est dénombrable. Existe-t-il une énumération croissante de $\mathcal{D}$?

(b) Quelle est la loi de N ?

(c) Calculer $\mathbf{P}(X = 0,375)$. Plus généralement calculer $\mathbf{P}(X = d)$ pour $d \in \mathcal{D}$.

(d) Si F est la fonction de répartition de X, montrer que F n'est continue sur aucun sous-intervalle de $[0, 1[$, mais qu'elle est continue en tout réel non décimal.

(e) Montrer que, pour $j \geqslant 1$: $\forall d \in \mathcal{D}$, $\mathbf{P}(X \leqslant d / N = j) = \dfrac{\lfloor 10^j d \rfloor + 1}{10^j}$

(f) Calcul $F(d)$ pour d admettant une écriture réduite avec $n = 1$ puis $n = 2$. Calculer $F(d)$ pour d décimal quelconque.

(g) Calculer l'espérance de X. Montrer que, pour toute valeur de p, on a : $\dfrac{9}{20} < \mathbf{E}(X) < \dfrac{1}{2}$.

Exo **19** Soit $a \in]0, 1/2[$ et p_k la probabilité qu'une famille ait k enfants. On suppose que $p_0 = p_1 = a$ et $p_k = (1 - 2a)2^{-(k-1)}$ pour $k \geqslant 2$. On suppose aussi que $\mathbf{P}(\text{Fille}) = \mathbf{P}(\text{Garçon}) = 1/2$.
On pose E_n : « la famille a n enfants », F_n : « la famille a n filles » et G_n : « la famille a n garçons ».

(a) Vérifier que p suit bien une loi de probabilité.

(b) Quelle est la la probabilité qu'une famille ayant 2 filles ait seulement 2 enfants.

(c) Quelle est la la probabilité qu'une famille ait 2 garçons sachant qu'elle a deux filles ?

Exo **20** Dans une ville fictive et pas chère, le ticket de métro coûte 1 euro. La première infraction constatée coûte 20 euros, la seconde 40 et la troisième 400. La probabilité $p \in]0, 1[$ pour un voyageur d'être contrôlé lors d'un trajet est constante et connue seulement de la compagnie. Un fraudeur décide de ne pas payer systématiquement jusqu'à la deuxième amende. On note T le numéro du trajet où le fraudeur est contrôlé pour la seconde fois. Les contrôles sont indépendants.

(a) Déterminer la loi de T.

(b) Déterminer $\mathbf{P}(T > n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbf{P}(T > 60)$ pour $p = 1/10$ et $p = 1/20$.

(c) Déterminer l'espérance de T.

(d) Quel conseil financier donner au fraudeur ?

Exo **21** Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie quelconque d'événements.
Convention : $\displaystyle\prod_{i \in \emptyset} x_i = 1$.

(a) Montrer que, pour x_i réels quelconques $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) = \sum_{I \subset [\![1,n]\!]} (-1)^{\text{Card}(I)} \prod_{i \in I} x_i$.

(b) Montrer que $\mathbf{P}\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - E\left(\prod_{i=1}^{n}(1 - \mathbf{1}_{A_i})\right)$.

(c) En déduire la **Formule de Poincaré** : $\mathbf{P}\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$.

Exo **22** On suppose que le couple de v.a. entières (X, Y) a une loi donnée par

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 : \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{\alpha}{(1 + i + j)!} \qquad \text{où } \alpha > 0$$

(a) Que peut-on dire , sans calculs, des lois de X et Y ?

(b) Si $S = X + Y$, déterminer la loi de S et en déduire la valeur de α.

(c) Calculer $\mathbf{P}(X = 0)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

(d) Sans calcul, donner l'espérance de S et en déduire celle de X. Pourrait-on obtenir ainsi la variance de X ? Calculer la covariance de (X, Y) et en déduire la variance de X.

(e) Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$ puis en déduire $\mathbf{P}(X > Y)$.

Exo 23 Le nombre de personnes entrant en une journée dans un bureau de poste est une variable aléatoire S suivant une loi de Poisson de paramètre λ. La probabilité qu'un arrivant soit une arrivante est p. On note X le nombre d'arrivantes dans une journée et Y le nombre d'arrivants. Calculer $\mathbf{P}(X = i, Y = j / S = n)$ et en déduire la loi de (X, Y) et les lois de X et Y.

X et Y sont-elles indépendantes ?

Exo 24 Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in (\mathbb{R}^{*+})^d$. On dit que'une variable aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_d)$ suit une loi de Poisson de paramètre α si

$$\forall (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}^d : \mathbf{P}(X_1 = k_1, \ldots, X_d = k_d) = e^{-(\alpha_1 + \cdots + \alpha_d)} \frac{\alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_d^{k_d}}{k_1! \ldots k_d!}$$

Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité. Déterminer , pour $I \subset [\![1, d]\!]$ non vide la loi de $X_I = \sum\limits_{i \in I} X_i$.

Exo 25 On considère une suite de n épreuves répétées indépendantes, chaque épreuve ayant k résultats possibles $r_1, \ldots, r_k$. On note p_i la probabilité de réalisation de r_i, lors d'une épreuve. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, on note X_i le nombre de réalisations de r_i au cours des n épreuves.

(a) Déterminer $\mathbf{Var}(X_1 + \cdots + X_k)$.

(b) Déterminer la loi de X_i et sa variance.

(c) Même question pour $X_i + X_j$ avec $i \neq j$. En déduire $\mathrm{Covar}(X_i, X_j)$. Vérifier que ce résultat est compatible avec celui de la première question.

Exo 26 Deuxième lemme de Borel-Cantelli. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants. On note $A = \limsup\limits_n A_n = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup\limits_{k \geqslant n} A_k \right)$.

On suppose que $\left(\sum \mathbf{P}(A_n) \right)$ diverge et l'on souhaite prouver que $\mathbf{P}(A) = 1$.

1. Justifier que pour tout $x > -1$, $\ln(1 + x) \leqslant x$.

2. Caractériser le fait qu'un élément appartienne à A.

3. Soient $n \leqslant N$. On note $E_{n,N} = \bigcap\limits_{k=n}^{N} \overline{A_k}$ et $E_n = \bigcap\limits_{k \geqslant n} \overline{A_k}$.

(a) Démontrer que (n étant fixé), $\lim\limits_{N \to +\infty} \ln(\mathbf{P}(E_{n,N})) = -\infty$.

(b) En déduire que $\mathbf{P}(E_n) = 0$ puis que $\mathbf{P}(A) = 1$.

4. **Application** : On lance une pièce equilibrée, une infinité de fois. Montrer que l'évènement "37 piles de suite" une infinité de fois a une probabilité de 1.

5. Montrer qu'il n'existe pas de probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ tel que $\mathbf{P}(p\mathbb{N}) = \dfrac{1}{p}$ pour tout nombre premier p (on rappelle que la série $\left(\sum\limits_{p \text{ premier}} \dfrac{1}{p} \right)$ diverge).

ESPACES VECTORIELS

Exo 1 On pose $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique.

Soit $F / y + z = 0$, $G \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{array} \right.$ et $G' = \mathrm{vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$ et $\overrightarrow{v} = (1, 0, 1)$.

(a) Montrer que F , G et G' sont des SEV de E.

(b) Déterminer une base de F , G et G'.

(c) Déterminer 4 supplémentaires de F et G.

(d) Déterminer l'expression analytique du projecteur p sur F parallèlement à G.

Exo 2 Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & -5y \\ y & x + 3y \end{pmatrix} \text{ tel que } (x, y) \in (\mathbb{R})^2 \right\}$

(a) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-EV.

(b) Déterminer une base et la dimension de E.

(c) Déterminer un supplémentaire de E dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(d) Montrer que E est une $\mathbb{R}$-algèbre.

(e) E muni des lois $+$ et $\times$ est-il un corps ?

Exo $\boxed{3}$ Soit F et G 2 SEV de E. Que dire d'un vecteur $\overrightarrow{x}$ qui n'appartient pas à $F+G$?

Exo $\boxed{4}$ Soit F et G 2 SEV de E tels que $F+G=E$. Que dire d'un vecteur $\overrightarrow{x}$ qui n'appartient pas à F ?

Exo $\boxed{5}$ Montrer à l'aide de la définition que $(3+X\ ,\ 2-X\ ,1+X^2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Est-ce une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exo $\boxed{6}$ Soient u,v,w 3 vecteurs d'un K-EV. On suppose que (u,v) , (u,w) et (v,w) sont libres. A-t-on (u,v,w) libre ?

Exo $\boxed{7}$ Soit $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On définie f,g,h dans E par $f(x)=\cos(x+a)$, $g(x)=\cos(x+b)$ et $h(x)=\cos(x+c)$.
Montrer que (f,g,h) est liée.

Exo $\boxed{8}$ Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. On pose $u_1=e_1-e_2$, $u_2=e_2-e_3$,..., $u_n=e_n-e_1$.
A-t-on $(u_1,\dots,u_n)$ libre ? Déterminer $\text{vect}(u_1,\dots,u_n)$.

Exo $\boxed{9}$ Soit $E=\{f\ C^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R} : f'(x)=2xf(x)\}$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-EV et déterminer une base de E.

Exo $\boxed{10}$ Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\forall n\in\mathbb{N} : d^0(P_n)=n$.

(a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N} : (P_0,P_1,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) En déduire que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Exo $\boxed{11}$ Soit $a\in[0,1]$ et soit φ_a définie sur $[0,1]$ par $\varphi_a(x)=|x-a|$.

(a) Montrer que $(\varphi_a)_{a\in[0,1]}$ est libre dans $E=\mathbb{R}^{[0,1]}$.

(b) Soit $F=\text{vect}(\varphi_a)_{a\in[0,1]}$. A-t-on $F=E$?

(c) Soit f définie par $f(x)=4x$ si $x\in[0,\frac{1}{2}]$ et $f(x)=-2x+3$ si $x\in[\frac{1}{2},1]$.
Tracer f et montrer que $f\in F$.Généraliser.

Exo $\boxed{12}$ Soit f_a définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x)=e^{ax}$. Montrer que $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exo $\boxed{13}$ Soit f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\cos nx$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{2+\cos x}$. A-t-on $f\in\text{vect}\{f_n$ tel que $n\in\mathbb{N}\}$?

Exo $\boxed{14}$ Soit E un $\mathbb{R}$-EV et $f\in\mathcal{L}(E)$ telle que $f^2-10f+21id_E=0$.

(a) Factoriser $f^2-10f+21id_E$.

(b) Montrer que $\ker(f-7id_E)\oplus\ker(f-3id_E)=E$.

Exo $\boxed{15}$ Soit f définie de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z,t)=(x+2y+3z,-2x+5y+z,-x-11y-10z)$. Déterminer rang , noyau et image de f. On donner une base de chacun d'eux.

Exo $\boxed{16}$ Soit $p=\text{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\7\\6\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\-6\\7\end{pmatrix}\right)$ et $q=\text{rg}((X+1)^2,(X+2)^2,(X+3)^2,(X+4)^2))$.
Pourquoi a-t-on $p\leqslant 3$ et $q\leqslant 3$? Calculer p et q.

Exo $\boxed{17}$ Soit $E=\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ et soit $\varphi:E\to\mathbb{R}^{n+1}$, $f\mapsto(f(0),f'(0),\dots,f^{(n)}(0))$

(a) Montrer que φ est linéaire.

(b) Déterminer le noyau, l'image et le rang de φ.

(c) Déterminer un supplémentaire du noyau.

Exo $\boxed{18}$ **<u>Exercices très classiques : à savoir faire par coeur !!</u>**
Soit E un K-ev de dimension n et $(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2$.

(a) Montrer que $\ker f^p\subset\ker f^{p+1}$ et que $\text{im} f^{p+1}\subset\text{im } f^p$.

(b) Montrer que $f^2=0\iff\text{im } f\subset\ker f$.

(c) Montrer que $f\circ g=0\iff$ ....⊂.....

(d) $E = \ker f \oplus \mathrm{im} f \iff \mathrm{im} f = \mathrm{im} f^2 \iff \ker f = \ker f^2$.
Reprendre ces équivalences si E n'est plus supposé de dimension finie.

(e) Quelles sont les valeurs possibles de $\mathrm{rg}\,(f)+\mathrm{rg}\,(g)$?

(f) On suppose que $f \circ g = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}\,(f)+\mathrm{rg}\,(g) \leqslant n$.
Si $\mathrm{rg}\,(f) = 2$ et $n \geqslant 3$, montrer qu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ \varphi = 0$ et que $\mathrm{rg}\,(f)+\mathrm{rg}\,(\varphi) = n$.

Exo **19** Soit E un K-ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ avec $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$. On suppose que $\dim \ker f = 1$. On pose enfin $N_k = \ker f^k$.

(a) Montrer que $\forall k \in [0, p]$, $N_k \subset N_{k+1}$ et $f(N_{k+1}) \subset N_k$.

(b) En considérant φ définie de N_{k+1} dans N_k par $\varphi(x) = f(x)$, montrer que $\dim N_{k+1} \leqslant \dim N_k + 1$.

(c) En déduire que p=n et calculer $\dim N_k$ pour $k \in [\![0, p]\!]$.

(d) Soit x un vecteur de E tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.
Montrer que $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E

Exo **20** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit libre.

1) f est-elle bijective ?

2) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\exists (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ tel que $g = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$

3) Soit $\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{L}(E)\ ,\ f \circ g = g \circ f\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. Quelle est sa dimension ?

Exo **21** Soit E, F, G 3 K-ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, G)$ et $g \in \mathcal{L}(E, F)$. Déterminer une CNS sur f et g pour qu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(F, G)$ tels que $f = \varphi \circ g$.

Exo **22** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $F = \{P \in E \text{ tel que } P(3) = 0\}$. Déterminer avec 3 démonstrations (base, isomorphisme et dualité) la dimension de F.

Exo **23** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie et p, q deux projecteurs de E tels que $pq = 0$. On pose $r = p + q - qp$.

1) Montrer que r est un projecteur.

2) Montrer que $\ker r = \ker p \cap \ker q$ et $\mathrm{Im}\ r = \mathrm{Im}\ p \oplus \mathrm{Im} q$.

Exo **24** Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer qu'il existe un scalaire λ tel que $f^2 = \lambda f$.

Exo **25** On considère la suite de polynômes $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$E_0 = 1,\ E_1 = X \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 2,\ E_k = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$$

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note Δ l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

(a) Montrer que la famille $(E_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) En déduire que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ, puis en notant $\Delta_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application induite, déterminer son image et son noyau.

(c) En déduire que Δ est une application surjective et préciser son noyau.

Exo **26** Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes de E. Montrer que

$$|\mathrm{rg}\,(u) - \mathrm{rg}\,(v)| \leqslant \mathrm{rg}\,(u+v) \leqslant \mathrm{rg}\,(u) + \mathrm{rg}\,(v)$$

GÉOMÉTRIE AFFINE

Exo **1** Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble d'un espace vectoriel E. On suppose que $\mathcal{F}$ est stable par barycentration , c'est-à-dire , tout barycentre de points de $\mathcal{F}$ est encore dans $\mathcal{F}$.
Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous espace affine de E.

Exo 2 Soit E un $\mathbb{R}$-ev. Soit A,B,C,D quatre points de E, deux à deux distincts et non alignés, tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ soit lié et que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$ soit lié.
Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exo 3 Soit E un $\mathbb{R}$-ev. Soit G le barycentre de $(A_1, \dots, A_p)$ et Soit H le barycentre de $(B_1, \dots, B_p)$. Montrer que $\sum_{i=1}^{p} \overrightarrow{A_i B_i} = p\overrightarrow{GH}$.

Exo 4 Montrer que $\mathcal{F} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x) + 1\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dont on déterminera un point et sa direction.

Exo 5 Soit E un plan vectoriel. Soient A, B, C trois points non alignés et (Δ) une droite de E ; (Δ) coupe (BC), (CA), (AB) en trois points notés P, Q, R respectivement. On construit les trois parallélogrammes $AQA'R$, $BPB'R$ et $CQC'P$.
Montrer que A', B' et C' sont alignés.

Exo 6 Dans $\mathcal{E}_3$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne : $A : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $D \left\{ \begin{array}{l} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x + y - 3z = -1 \end{array} \right.$
Donner l'équation cartésienne du plan passant par A et D.

Exo 7 Dans $\mathcal{E}_3$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne :
$D \left\{ \begin{array}{l} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \end{array} \right.$ et $D' \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a \end{array} \right.$
Pour quelles valeurs de a, D et D' sont-elles coplanaires ?
Donner alors l'équation du plan contenant D et D'.

MATRICES

Exo 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AM = MA\}$.

(a) Montrer que F est un $\mathbb{R}$-EV.

(b) Déterminer la dimension et une base de F.

(c) Montrer que F est une $\mathbb{R}$-algèbre. Est-ce un coprs ?

Exo 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ 2 à 2 distincts. Soit $\phi : \mathbb{K}_{n-1}[X] \to \mathbb{K}^n$, $P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n))$. On pose $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}_1 = (1, X, \dots, X^{n-1})$ la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. Déterminer la matrice de ϕ dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_0$: $A = M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_0}(\phi)$.

Exo 3 Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ On note $E_{i,j}$ les matrices de la base canonique de E. Soit $A \in E$.

(a) Soit $(i_0, j_0, k_0, l_0) \in [1, n]^4$. Calculer $E_{i_0,j_0} E_{k_0,l_0}$, $E_{i_0,j_0} A$ et $A E_{i_0,j_0}$.

(b) En déduire $\mathrm{Tr}(A E_{i_0,j_0})$.

(c) Soit φ une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique matrice A telle que : $\forall M \in E$, $\varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.

(d) Que peut-on en déduire pour l'application de E^* dans E qui à φ associe A ?

(e) Montrer que tout hyperplan de E contient au moins une matrice inversible.

Exo 4 Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est semblable à sa transposée.

Exo 5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$. Comparer $\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{rg}(A)$.

Exo 6 Étudier la structure de groupe de $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ tel que } (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \right\}$

Exo 7 Soit A la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments sont égaux à 1 sauf ceux de la diagonale qui sont nuls. Calculer A^p avec $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer A^{-1} puis A^{-p} avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Exo 8 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $A^p = (0)$ (on dit alors que A est nilpotente.

(a) Montrer par récurrence que A est semblable à une matrice du type : $\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

(b) En déduire $\mathrm{tr}(A)$.

Exo $\boxed{9}$ Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M \neq (0)$ et $M^3 = -M$. Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exo $\boxed{10}$ Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soit $f : P \longmapsto P - P'$.

1)Montrer que f est bijective

a) sans utiliser la matrice de f

b) en utilisant la matrice de f.

2) Soit Q un élément de E. trouver un $P \in E$ tel que $Q = P - P'$.

Indication : Si $P \in E$, que vaut $P^{(n+1)}$?

Exo $\boxed{11}$ 1) Déterminer la forme d'une matrice triangulaire supérieure nilpotente de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

2) Soit $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, une matrice triangulaire supérieure nilpotente. On pose :

$$P_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & & & 0 \\ & \frac{1}{n^2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{n^p} \end{pmatrix}$$

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} P_n^{-1} N P_n$. (on admet qu'une suite de matrice (M_n) avec $M_n = (m_{i,j}(n))$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ converge vers une matrice A si pour tout i, j de $[\![1, p]\!]$: $\lim_{n \to +\infty} m_{i,j}(n) = a_{i,j}$.

Exo $\boxed{12}$ Soit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer A_n^{-1}.

Exo $\boxed{13}$ Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

(a) On notera $\mathrm{rg}\,(M)$ le rang de la matrice M. Montrer que

$$\mathrm{rg}\,(M) = \mathrm{rg}\,(A) + \mathrm{rg}\,(B - A)$$

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit inversible.

(c) Calculer M^{-1} quand elle existe.

Exo $\boxed{14}$ Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même définie par

$$\varphi(X) = -X + (\mathrm{tr}\, X)A$$

(a) A quelle condition φ est-elle bijective ? Caractériser $(-\varphi)$ lorsque φ n'est pas bijective.

(b) Discuter et résoudre, pour B donné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'équation $\varphi(X) = B$.

GROUPE SYMÉTRIQUE - DÉTERMINANTS

Exo $\boxed{1}$ Donner en extension $\mathcal{S}_6$.

Exo $\boxed{2}$ Soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 \\ 13 & 18 & 12 & 17 & 19 & 5 & 1 & 10 & 9 & 20 & 3 & 22 & 7 & 11 & 15 & 21 & 4 & 16 & 6 & 8 & 2 & 14 \end{pmatrix}.$$

Décomposer σ en produit de cycles, en déduire sa signature. Calculer σ^n pour tout entier n. Décomposer σ en produit de transpositions.

Exo $\boxed{3}$ a) Écrire une fonction python **def rajout(L,p) :** qui renvoie la liste des p listes obtenues à partir de L (qui a p-1 éléments) en insérant le nombre p partout entre les éléments de L.

b) Écrire une fonction python **def groupeSymetrique(n) :** qui renvoie le groupe symétrique S_n.

c) Écrire une fonction python **def orbite(n,s,x0) :** qui renvoie l'orbite de x ($\{s^i(x_0),\ i \in \mathbb{N}\}$) par la permutation s de S_n.

d) Écrire une fonction python **def dec(s) :** qui renvoie la décomposition en produit de cycles disjoints de la permutation s de S_n

Exo $\boxed{4}$ Soit s un p-cycle de $\mathcal{S}_n$ et soit σ une permutation de $\mathcal{S}_n$. Déterminer $\sigma s \sigma^{-1}$

Exo $\boxed{5}$ Montrer que toute permutation de $\mathcal{A}_n$ peut s'écrire comme produits de 3-cycles.

Exo $\boxed{6}$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\det(A) \in \mathbb{Z}$.

Exo $\boxed{7}$ Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M \neq (0)$ et $M^3 = -M$. Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exo $\boxed{8}$ Calculer $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & a \\ 1 & -x & 0 & b \\ 0 & 1 & -x & c \\ 0 & 0 & 1 & d-x \end{vmatrix}$ et généraliser.

Exo $\boxed{9}$ Soit f définie de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}_n[X]$ par $f(P) = P(X+2)$. Calculer $\det(f)$, $\operatorname{rg}(f)$ et $\operatorname{Tr}(f)$.

Exo $\boxed{10}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ A_{i,j} = |i-j|$.
Calculer le déterminant de A.

Exo $\boxed{11}$ Calculer $\begin{vmatrix} x^2+1 & x & \cdots & x \\ x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \cdots & x & x^2+1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 7 & 2 & & 0\cdots & 0 \\ 6 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 6 & 7 \end{vmatrix}$.

Exo $\boxed{12}$ Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et soit f définie par $f(e_i) = e_{n-i+1}$.

(a) Calculer $\det(f)$.

(b) Définir analytiquement f.

Exo $\boxed{13}$ Soit $(a, b, \lambda) \in \mathbb{R}^3$. On cherche à calculer $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} \lambda & & b \\ & \ddots & \\ a & & \lambda \end{vmatrix}$.

(a) On suppose $a \neq b$. Montrer que $P(x) = \begin{vmatrix} \lambda+x & & b+x \\ & \ddots & \\ a+x & & \lambda+x \end{vmatrix}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. En déduire $D_n(a,b)$.

(b) En déduire $D_n(a,a)$.

Exo $\boxed{14}$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r.

(a) Montrer qu'il existe une matrice , B , extraite de A, telle que $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ et telle que $\det(B) \neq 0$.

(b) Montrer que toute matrice carrée d'ordre $p \times p$ avec $p \geqslant r+1$ extraite de A a un déterminant nul.

(c) Calculer le rang de la comatrice de A en fonction du rang de A.

Exo $\boxed{15}$ Calculer le déterminant $B_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ où $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$.

Exo $\boxed{16}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*, \theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$. On définit le déterminant Δ_n par

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_n$$

(a) Calculer Δ_1 et Δ_2.

(b) Déterminer une relation de récurrence vérifiée par Δ_n puis expliciter Δ_n en fonction de n et θ comme le quotient de deux sinus.

Exo $\boxed{17}$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$. On désigne par $\text{com}(A)$ la comatrice de A c'est-à-dire la matrice constituée des cofacteurs de A. Montrer que

$$\det(\text{com}(A)) = (\det A)^{n-1}$$

Exo $\boxed{18}$ On tire dans $\mathcal{S}_n$, une permutation au hasard (on suppose les tirages équiprobables). Quel est la probabilité de tomber sur une permutation qui dans sa décomposition en produit de cycles de supports disjoints admet au moins 2 cycles distincts et de longueurs différentes de 1.

Exo $\boxed{19}$ On admet la formule de <u>**Formule de Poincaré**</u> :

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie quelconque d'événements. Alors on a :

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

On munit l'ensemble Ω_N des permutations de $[\![1, N]\!]$ de l'équiprobabilité P_N.

Pour $k \in [\![0, N]\!]$, on note $E_{N,k}$ l'événement $\{\omega$ a exactement k points fixes $\}$ et, pour $i \in [\![1, N]\!]$, $B_i = \{\omega \text{ tel que } \omega(i) = i\}$.

(a) Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_j\leqslant N} P_N\left(B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_j}\right)$ pour $1 \leqslant j \leqslant N$.

(b) En déduire $P_N\left(E_{N,0}\right)$.

(c) En utilisant la valeur de $P_{N-k}\left(E_{N-k,0}\right)$, calculer $P_N\left(E_{N,k}\right)$.

(d) Montrer que $p_k = \displaystyle\lim_{N\to+\infty} P_N\left(E_{N,k}\right)$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$. De quelle loi s'agit-il ?

(e) Montrer que $\quad \forall k \in [\![0, N]\!] \quad , \quad |P_N\left(E_{N,k}\right) - p_k| < \dfrac{1}{k!(N+1-k)!}$.

En déduire que $\quad \forall n \in [\![0, N]\!] \quad , \quad \displaystyle\sum_{j=0}^{n} |P_N\left(E_{N,j}\right) - p_j| \leqslant \dfrac{e}{(N+1-n)!}$.

(f) Après avoir vérifier que $0,9994 < \displaystyle\sum_{j=0}^{5} p_j < 0,9995$, donner, pour $N \geqslant 12$ quelconque, des valeurs approchées à 10^{-4} près de $P_N\left(E_{N,k}\right)$ pour $k \in [\![1, 5]\!]$ (ces valeurs ne dépendent pas de N), ainsi que la probabilité qu'une permutation ait au moins 6 points fixes.

Exo $\boxed{20}$ On munit l'ensemble Ω_N des permutations de $[\![1, N]\!]$ de l'équiprobabilité P_N. Pour $i \in [\![1, N]\!]$, on note : $B_i = \{\omega \text{ tel que } \omega(i) = i\}$. On note X_i la variable indicatrice de l'événement B_i et $X = X_1 + \cdots + X_N$. Que représente X ? Déterminer son espérance et sa variance.

Exo $\boxed{21}$ Soient $(A, C) \in GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

(a) Dire dans quels ensembles de matrices appartiennent B et 0.

(b) A l'aide d'une transvection par blocs, transformer M en $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

(c) A l'aide des blocs et des matrices équivalentes, montrer que $\text{rg}M = \text{rg}A + \text{rg}C$.

Donner un contre-exemple de ce résultat lorsque A n'est plus supposée inversible.

Exo $\boxed{22}$ On note F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec $J_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) Montrer que F est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(b) Déterminer F et en déduire sa dimension.

(c) Soit p un projecteur de rang r d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel des endomorphismes de E commutant avec p.

Exo **23** Soit $(A, B, C, D) \in M_n(\mathbb{K})^4$. On suppose que D est inversible et que $CD = DC$.

A l'aide d'une transvection par bloc , montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

A votre avis le résultat est-il encore vrai si D n'est plus supposée inversible ?

ANNEAUX-CORPS

Exo **1** Déterminer le centre de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices.

Exo **2** Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times)$.

Exo **3** Soit A un anneau commutatif. On dit qu'un élément a de A est nilpotent s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $a^n = 0$.

a) Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal de A.

b) Soit I un idéal de A. On appelle radical de I, l'ensemble : $\sqrt{I} = \{x \in A,\ \exists n \geqslant 1 :\ \ x^n \in I\}$. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.

Calculer dans $\mathbb{Z}$, $\sqrt{94500\mathbb{Z}}$.

Exo **4** On note $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}\ ,\ (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3\}$.

Montrer que K est un corps.

Exo **5** On note $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, le plus petit anneau inclus dans $\mathbb{C}$ et contenant $i\sqrt{2}$.

(a) Déterminer A. A est-il commutatif ? intègre ?

On définit pour tout $z \in A$, $N(z) = \bar{z}z$

(b) Montrer que pour tout $z \in A$, $N(z) \in \mathbb{N}$ et que pour tout z et z' de A, $N(zz') = N(z)N(z')$.

(c) Déterminer A^*.

(d) Démontrer que pour tout z dans $\mathbb{C}$ il existe q dans A tel que $|z - q| < 1$.

(e) Montrer que $\forall (z, z') \in A^2$ tel que $z' \neq 0$, $\exists (q, r) \in A^2$ tels que $\begin{cases} z = z'q + r \\ N(r) < N(z') \end{cases}$

Comment pourrait-on appeler cela ? A-t-on unicité du couple (q, r) ?

(f) En déduire que tout idéal de A est principal (c'est-à-dire de la forme z_0A)

(g) Déterminer les éléments associés dans A à $3 + 2i\sqrt{2}$.

(h) Déterminer les diviseurs dans A de $21 - 3i\sqrt{2}$.

(i) On définit (comme dans $\mathbb{K}[X]$) le PGCD de $(z, z') \in A^2$ comme étant un élément d tel que $zA + z'A = dA$, idem pour le PPCM. Les PGCD et PPCM sont donc définis à un élément de A^* près. Déterminer un PGCD et un PPCM de 2050 et $188 - 50i\sqrt{2}$.

(j) Décomposer en produit de facteurs premiers (toujours dans A) le nombre 54.

(k)* Application : Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $x^2 + 2 = y^3$.

Exo **6** Soit A un anneau commutatif et intègre. soit A' un sous anneau de A. On suppose que pour tout a dans A il existe P dans $A'[X]$, unitaire tel que $P(a) = 0$.

Montrer que A est un corps ssi A' est un corps

Exo **7** Soit P un plan euclidien et soient 2 points A et B du plan tel que $AB = 1$. On dit que $x \in \mathbb{R}$ est constructible à la règle et au compas s'il l'on peut effectuer à partir de A et B, une figure avec une règle (non graduée) et un compas pour faire apparaitre 2 points M et N tel que $\overline{MN} = x$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des nombres constructibles à la règle et au compas. On suppose que $0 \in \mathcal{C}$ (c'est la figure vide !).

(a) Montrer que $1, 3, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \sqrt{3}$ sont éléments de $\mathcal{C}$.

(b) Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que $\mathcal{C}$ est pythagoricien c'est-à-dire que si $x \in \mathcal{C}$ et x positif alors $\sqrt{x} \in \mathcal{C}$.

(d) Expliquer (grossièrement) pourquoi $\sqrt[3]{2} \notin \mathcal{C}$ et $\pi \notin \mathcal{C}$.

RÉDUCTION-DIAGONALISATION

POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES ET DE MATRICES

Exo **1** Soit $E=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $C^\infty\}$. On définit Δ de E dans E par $\Delta(f)=f''$ et , pour $n\in\mathbb{N}$, on définit f_n dans E par $f_n(x)=\cos nx$.

(a) Montrer que $\Delta\in\mathcal{L}(E)$.

(b) Calculer $\Delta(f_n)$. Conséquence.

(c) En déduire que $(f_0,\dots,f_n)$ est une famille libre de E.

Exo **2** Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini canoniquement par sa matrice A. Déterminer les valeurs propres , les vecteurs propres , les espaces propres et le polynôme minimal de f. Dire pour chaque cas si l'application f est diagonalisable et si oui donner la matrice de passage ainsi que son inverse et la formule de changement de base quand A prend les valeurs suivantes :

a) $\begin{pmatrix}5&7\\7&8\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1&2&4\\\frac12&1&2\\\frac14&\frac12&1\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&3&1\\4&-4&-1\end{pmatrix}$

Reprendre cette étude en voyant f non plus dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mais dans $f\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$

Exo **3** Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f\in\mathcal{L}(E)$, diagonalisable. Montrer que $E=\ker f\oplus \mathrm{im} f$.

Exo **4** Soit $A=\begin{pmatrix}2&0&4&8\\0&2&5&9\\0&0&6&10\\0&0&0&11\end{pmatrix}$.

(a) Donner sans calculs les valeurs propres et le plus de vecteurs propres possibles.

(b) En déduire sans calculs que A est diagonalisable.

Exo **5** Soit $(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2$. On suppose que $f\circ g=g\circ f$.
On pose E_λ un sous-espace propre pour f : $E_\lambda=\ker(f-\lambda Id_E)$.

(a) Montrer que E_λ est stable par g.

(b) Si $E_\lambda=$vect$(\vec{u})$, que dire de $\vec{u}$ pour g ?

(c) On suppose que f et g sont diagonalisables. Montrer à l'aide du (a) qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres pour f <u>et</u> pour g.

Exo **6** Soit $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&3&1\\4&-4&-1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(a) Montrer que A et B sont semblables (cf 2. e)).

(b) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A^n}{n}$.

Exo **7** Déterminer les SEV stables par f définie canoniquement sur $\mathbb{R}^n$ par sa matrice A :

a) $A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&3&0&0\\4&0&0&0\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&3&1\\4&-4&-1\end{pmatrix}$

Exo **8** Calculer $\begin{pmatrix}7&6\\4&-3\end{pmatrix}^n$.

Exo **9** Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ et $P\in\mathbb{R}[X]$ tels que $P(f)=0$, $P(0)=0$ et $P'(0)\neq 0$.
Montrer que $E=\ker f\oplus \mathrm{im} f$.

Exo **10** Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2-5A+6I_n=0$.

(a) Montrer que $\mathrm{Tr}(A)\in\mathbb{N}$.

(b) Montrer que A est inversible et calculer son inverse en fonction de A.

(c) Soit $k\in\mathbb{N}$. Calculer A^k.

(d) Soit $p\in\mathbb{N}$. Existe-t-il une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2-5A+6I_n=0$ et $\mathrm{Tr}(A)=p$?

Exo 11 Soit $\mathbb{C}^n$ muni de sa base canonique notée $(e_1, \dots, e_n)$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ l'unique application définie par $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$, ... $f(e_{n-1}) = e_n$, $f(e_n) = e_1$.

(a) Montrer en calculant $f^2, \dots, f^n$ que f est diagonalisable.

(b) Calculer les valeurs propres de f.

(c) Calculer les vecteurs propres de f.

Exo 12 Existe-t-il une matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Exo 13 Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que pour les 3/2 : M^2 soit diagonalisable et pour les 5/2 : M^3 soit diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable pour tous les élèves de la classe.

Exo 14 Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}(H) = 1$.

(a) Montrer que H est le produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne.

(b) En déduire que $H^2 = \mathrm{Tr}(H)H$.

(c) Calculer le polynôme caractéristique de H. H est-elle diagonalisable ?

(d) Étudier l'inversibilité de la matrice $M = I_n + H$ et calculer M^{-1} lorsque M est inversible.

Exo 15 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\chi_f(X) = X^2(X-1)(X+3)$ et que $\dim \ker f = 1$.
Quels sont les SEV F stables par f ? Que dire de l'endomorphisme induit $g = f_{/F}$ dans chacun des cas ?

Exo 16 Soit $E = C^\infty(\mathbb{R})$. On définit φ de E dans E par $\varphi(f) = f'' + f$.

(a) Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

(b) Déterminer les valeurs propres et les espace propres de φ.

Exo 17 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A est-elle diagonalisable ? Déterminer le polynôme minimal de A.

Exo 18 Soit A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Déterminer toutes les matrices B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$.

Exo 19 Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{sp}(M) = \{0, 1, 2\}$.
Trouver un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que les valeurs propres de $Q(M)$ soient -1 (double) et 3 (simple).

Exo 20 1) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

2) A quelle condition la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Déterminer le polynôme minimale de B.

Exo 21 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par : $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le déterminant de B en fonction de A.

2) Déterminer les éléments propres de B en fonction des éléments propres de A.

3) Étudier le lien entre A est diagonalisable et B est diagonalisable.

Exo 22 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. On suppose A diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec des valeurs propres de module 1. Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^s = I_n$.

Exo $\boxed{23}$ Soient $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des nombres réels. On considère la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer le rang de A en fonction de ses coefficients.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de A pour que la matrice soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exo $\boxed{24}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Justifier que B est diagonalisable.

(b) Déterminer ses éléments propres.

Exo $\boxed{25}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la matrice $A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & & (0) & (0) & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ (0) & & a & b & & (0) \\ \hline (0) & & b & a & & (0) \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & (0) & (0) & & a \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

(a) Justifier que A est diagonalisable.

(b) Déterminer ses valeurs propres.

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que A soit inversible.

Exo $\boxed{26}$ On pose I_3 et O_3 respectivement les matrices identité et nulle d'ordre 3. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A^3 - 4A^2 + 5A - 2I_3 = O_3$$

(a) Que peut-on dire du spectre de A ?

(b) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

(c) Calculer A^n en fonction de A^2, A, I_3 et n.

Exo $\boxed{27}$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = O_n$. Montrer que le rang de A est pair.

Exo $\boxed{28}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix}$. Déterminer les éléments propres de B.

Exo $\boxed{29}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit u l'application définie sur E par

$$u(M) = aM + bM^T$$

(a) Vérifier que $u \in \mathcal{L}(E)$.

(b) Montrer que u est diagonalisable.

(c) Déterminer $\det(u)$ et $\operatorname{tr}(u)$.

Exo $\boxed{30}$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} O_n & 2A \\ -A & 3A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ où O_n désigne la matrice nulle d'ordre n.

(a) Soit C la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Diagonaliser la matrice C.

(b) Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exo $\boxed{31}$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Exo $\boxed{32}$ Soit $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T$. Déterminer les valeurs propres et calculer le déterminant de Φ.

Exo **33** Soit $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_{ij}\in]0;1[$ et $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=1$.

(a) Montrer que $|\det(A)|\leqslant 1$.

(b) Montrer que 1 est valeur propre de A.

(c) Soit b une valeur propre complexe de A. Montrer que $|b|\leqslant 1$ et que si $|b|=1$, alors $b=1$.

Exo **34** Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\alpha>0$ et Y une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p\in]0;1[$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

(a) Déterminer les valeurs propres de la matrice $M(a,b)=\begin{pmatrix}-a & a & 0\\ 2a & 0 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$ en fonction de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

(b) On considère la matrice $A=M(X,Y)$.

i. Déterminer la probabilité pour que A soit inversible.

ii. Déterminer la probabilité pour que A ait trois valeurs propres distinctes.

E.V.N. - APPLICATIONS CONTINUES

Exo **1** Soit $E=\mathbb{R}^2$. On munit E d'une norme N. Soit $B_F(a,r)$ et $B_F(b,r')$, 2 boules fermées de E pour N.

(a) Montrer qu'il existe une application f homothétie ou translation telle que $f(B_F(a,r)=B_F(b,r')$.

(b) En déduire que les boules pour la norme N ont toutes la même "forme".

Exo **2** Soit $E=\mathbb{R}^2$. On définit N sur E par $\forall x=(a,b)\in E$, $N(x)=\sqrt{\displaystyle\int_0^1(a+bt)^2dt}$.

(a) Montrer que N est une norme sur E.

(b) Dessiner la sphère unité pour cette norme : $S(0,1)$.

Exo **3** Soit $E=\mathbb{R}[X]$. On définit 3 normes N_1,N_2,N_∞ sur E par $\forall P=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n\in E$:

$N_1(P)=|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_n|$, $N_2(P)=\sqrt{a_0^2+a_1^2+\cdots+a_n^2}$, $N_\infty(P)=Max\{|a_0|,|a_1|,\ldots,|a_n|\}$.

(a) Montrer que N_1,N_2,N_∞ sont des normes sur E.

(b) Comparer 2 à 2 ces normes : c'est-à-dire pour 2 normes N et $\tilde{N}$, chercher s'il existe une constante $\alpha>0$ telle que $N\leqslant\alpha\,\tilde{N}$ et s'il existe une constante $\beta>0$ telle que $\tilde{N}\leqslant\beta N$.

(c) Soit (P_n) la suite de E définie par $\forall n\in\mathbb{N}$: $P_n=1+2X+\dfrac{1}{n}(X^2+X^3+\cdots+X^{n^2+1})$.

Étudier la convergence de cette suite (P_n) selon la norme N_1,N_2 ou N_∞.

Exo **4** Soit $E=C^1([0,2],\mathbb{R})$. Pour toute application f de E, on pose :
$N_\infty(f)=\displaystyle\sup_{t\in[0,2]}|f(t)|$ et $N'_\infty(f)=|f(0)|+\displaystyle\sup_{t\in[0,2]}|f'(t)|$.

(a) Montrer que N'_∞ est une norme sur E.

(b) Comparer les normes N_∞ et N'_∞.

(c) Donner un exemple de suite qui converge pour une norme et pas pour l'autre.

Exo **5** La norme N_∞ sur $\mathbb{R}^2$ est-elle une norme euclidienne , c'est-à-dire existe-t-il un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}^2$, $N_\infty(x)=\sqrt{(x|x)}$?

Exo **6** Soit $n\geqslant 1$. Soit $U=\{P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $d^o(P)=n$ et P unitaire$\}$.

Montrer que $\inf\left\{\displaystyle\int_0^1|P(t)|dt\ ,\ P\in U\right\}>0$.

Exo **7** Soit $n\geqslant 1$ et soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ muni de la norme $||P||=\displaystyle\sup_{t\in[-1,1]}|P(t)|$.

Montrer qu'il existe $c>0$ tel que $\forall P\in E$: $|P(3)|\leqslant c||P||$.

Exo **8** Soit $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x+y=0\}$ et soit f définie sur Ω par $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$.

(a) Montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$

(b) Montrer que f est continue sur Ω.

(c) Étudier le prolongement par continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exo $\boxed{9}$ Soit f définie par $f(x,y) = \dfrac{|x|^a + |y|^b}{x^4 + y^4}$ et $f(0,0) = 0$. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$, en fonction de $a, b \geqslant 0$.

Exo $\boxed{10}$ Soit f définie par $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x+y+z^2}$ et $f(0,0,0) = 0$. Étudier le prolongement par continuité de f sur $\mathbb{R}^3$.

Exo $\boxed{11}$ Soit $E = C^1([0,7],\mathbb{R})$ muni de la norme N_1 : $N_1(f) = \displaystyle\int_0^7 |f(t)|dt$. On définit φ de E dans E par $\varphi(f) : t \mapsto t^2 f(t)$. Montrer que φ est continue sur E et calculer $|||u|||$.

Exo $\boxed{12}$ Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \displaystyle\int_0^1 \cos(1+x+y+t^2)dt$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exo $\boxed{13}$ Soit $n \geqslant 1$. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de la norme N_1 : $\forall P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in E : N_1(P) = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$.
Soit $u : E \to E$, $P \mapsto P'$.
Montrer que u est continue sur E. Calculer $|||u|||$.

Exo $\boxed{14}$ Soit $n \geqslant 1$. Soit $E = \mathbb{R}^n$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, définie canoniquement par sa matrice A dans la base canonique.

(a) Calculer $|||u|||_1$.

(b) Idem quand E est muni de la norme $||_\infty$ usuelle.

Exo $\boxed{15}$ Montrer que $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x > 7\}$ est ouvert et non fermé dans $\mathbb{R}^3$.

Exo $\boxed{16}$ Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $N_\infty(f) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On considère F l'ensemble des fonctions dérivables de E. Déterminer graphiquement les points intérieurs et les points adhérents de F.

Exo $\boxed{17}$ Soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lfloor xy \rfloor = 1\}$. Déterminer les points intérieurs et les points adhérents de F. ($\lfloor t \rfloor$: partie entière de t).

Exo $\boxed{18}$ Soit E un EVN muni d'une norme notée $||$. Soit U un ouvert de E.
On définit $\mathcal{C} = \{\lambda x$ tel que $\lambda > 0$ et $x \in U\}$.

(a) Dessiner $\mathcal{C}$ quand $E = \mathbb{R}^2$. En déduire : $\mathcal{C}$ comme c.... ?

(b) Montrer que $\mathcal{C}$ est ouvert. Est-il borné ? Est-il convexe ?

(c) Montrer que $0 \in U \Longrightarrow \mathcal{C} = E$.

Exo $\boxed{19}$ Soit E un EVN muni d'une norme notée $||$. Soit C un sous-ensemble convexe de E. On note $\overline{C}$ l'ensemble des points adhérents de C et $\overset{\circ}{C}$ l'ensemble des points intérieurs de C.
Montrer que $\overline{C}$ et $\overset{\circ}{C}$ sont convexes.

Exo $\boxed{20}$ 1) Soit $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure nilpotente. On pose :

$$P_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & & & 0 \\ & \frac{1}{n^2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{n^p} \end{pmatrix}$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n^{-1} N P_n$.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, et E_A l'ensemble des matrices semblables à A. Montrer que E_A est fermé si et seulement si A est diagonalisable.

Exo $\boxed{21}$ Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme : $||u|| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés, ouvert ou non :

— $A = \{$ suites croissantes $\}$
— $B = \{$ suites convergeant vers 0 $\}$
— $C = \{$ suites convergentes $\}$
— $D = \{$ suites admettant 0 pour valeur d'adhérence $\}$
— $F = \{$ suites sommables $\}$ $(= \ell^1(\mathbb{N}))$
— $G = \{$ suites périodiques $\}$

Exo $\boxed{22}$ Ensemble de Cantor

Soit K l'ensemble des réels x de $[0,1]$ qui admettent une écriture décimale (propre ou impropre) qu'avec des 0 ou des 9. Exemple : $0,0191 \in K$ et $0,0391 \notin K$.

a) Dire si ces éléments sont dans K : 0 ; 1 ; 0,1 ; 0,2 ; 0,9 ; 0,8 ; 0,91.

b) Donner un exemple rationnel non décimale et un exemple d'irrationnel de K (on rappelle (et on admet) que x est rationnel ssi son écriture décimale est ...)

c) Montrer que K est inclus dans 2 segment de longueur 1/10.

d) Montrer que $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ où K_n est une réunion finie de segments que l'on déterminera.

e) En déduire que K est compact.

f) Déterminer les points intérieurs à K. Que peut-on dire de $[0,1] - K$?

g) Déterminer la frontière de K.

h) Montrer que pour tout x de K et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \neq x$ dans K tel que $|x - y| \leqslant \varepsilon$. En déduire les points isolés de K.

i) Montrer que K n'est pas dénombrable.

Exo $\boxed{23}$ Soit f définie et dérivable de I un intervalle non réduit à un point dans $\mathbb{R}$. On souhaite montrer le théorème de Darboux : $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

a) On considère $F : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$, où $\Delta = \left\{(x,y) \in I^2 \ , \ x < y \right\}$. Montrer que $F(\Delta)$ est un intervalle.

b) En déduire le théorème de Darboux.

FRACTIONS RATIONNELLES-DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

Exo $\boxed{1}$ Soit $F = \dfrac{(X-1)(X+2)^8}{(X-3)^2(X-5)^4(X-7)}$.

(a) Que dire de 1 , -2 , 3 , 5 , -7 ?

(b) Que vaut $d^0(F)$?

(c) Écrire sans la calculer la décomposition en éléments simples de F.

Exo $\boxed{2}$ Soit $F = \dfrac{X^3 - 8}{(X-2)(X+5)}$.

(a) Donner les pôles et les racines de F .

(b) Écrire sans la calculer la décomposition en éléments simples de F.

Exo $\boxed{3}$ Décomposer en éléments simples les fractions suivantes :

(a) $F = \dfrac{X^5}{(X-1)(X^2-4)}$, dans $\mathbb{R}(X)$

(b) $F = \dfrac{n!}{(X+1)\cdots(X+n)}$, dans $\mathbb{R}(X)$

(c) $F = \dfrac{X^2}{X^4 - 1}$, dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$

(d) $F = \dfrac{X+5}{X(X^2+1)}$, dans $\mathbb{R}(X)$

(e) $F = \dfrac{X-1}{(X+1)(X-2)^2(X^2+X+1)^2}$, dans $\mathbb{R}(X)$

(f) $F = \dfrac{1}{X^5(1-X)}$, dans $\mathbb{R}(X)$

(g) $F = \dfrac{X^2+X+1}{(X-1)(X^3-2)}$, dans $\mathbb{Q}(X)$

Exo $\boxed{4}$ Soit $R = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle irréductible et soit c une racine de Q.

(a) Démontrer que le coefficient λ de $\dfrac{1}{X-c}$ dans la décomposition de F en éléments simples dans $\mathbb{K}(X)$ vaut $\lambda = \dfrac{P(c)}{Q'(c)}$.

(b) En déduire la décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X^{2n+1}-1}$ dans $\mathbb{C}(X)$.

(c) Calculer la décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X^{2n+1}-1}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

Exo $\boxed{5}$ Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

(a) $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{(n+2)(n+4)(n+6)}\right)$

(b) $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} R(n)\right)$ où R est une fraction rationnelle n'ayant que des pôles simples dans $\mathbb{Z}_-^*$.

Exo $\boxed{6}$ **Théorème de Lucas** : Soit $P \in \mathbb{C}(X)$ n'ayant que des racines simples. Montrer en décomposant en éléments simples $\dfrac{P'}{P}$ que les racines de P' sont des barycentres à coefficients positifs des racines de P (donc "entre" les racines de P).

Exo $\boxed{7}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n.

Montrer que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} P(k) = a_n n!$ $\left[\text{Indication : considérer } S(x) = \dfrac{P(x)}{\prod_{k=0}^{n}(x-k)}\right]$

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

Exo $\boxed{1}$ Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $\ln x$ b) $\arcsin x$ c) $x^3 e^x$ d) $\dfrac{\ln(1-t^2)}{t^2}$ g) $\dfrac{1}{x^4+4}$

e) $\dfrac{\sqrt{2x+1}}{4x+5}$ f) $\dfrac{x^3}{(x^4-1)^2}$ g) $\dfrac{1}{(x+1)^7-x^7-1}$ (CCP) h) $\sin^2 x \cos^6 x$.

Exo $\boxed{2}$ Calculer a) $\displaystyle\int_0^A \frac{1}{x^4+4}dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$ c) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{1+x^2}dx$ (avec $a \in]0,1[$)

d) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x+\sqrt{2x-1}}{\sqrt[4]{2x-1}+2}dx$ e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\sin^2 x+\cos x}dx$ f) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{7+\sin x}dx$.

Exo $\boxed{3}$ Calculer a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-2x-4ix}{(x-1-2i)^2}dx$ et b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-i}dx$.

Exo $\boxed{4}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$.

(a) Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

(b) Calculer I_n en fonction de n sans pointillés.

(c) Déterminer la limite de la suite (I_n) .

(d) Montrer que $(nI_nI_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est une suite constante.
En déduire un équivalent simple de I_n (en $+\infty$).

(e) Si on admet qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $n! \sim \lambda\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n$. Calculer λ .

Exo $\boxed{5}$ Soit f de classe C^1 sur $[a,b]$. Calculer $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos\lambda t dt$.

Exo $\boxed{6}$ Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_{2x}^{5x} \frac{t}{\sin t^2}dt$.

Exo $\boxed{7}$ On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f .

(b) Étudier les variations de f .

(c) Étudier la convexité de f .

(d) Étudier les branches infinies de f .

(e) Étudier avec soin les points "spéciaux" du domaine de f .

(f) Calculer $f(2)$ à 10^{-2} près avec python et la méthode des trapèzes.

(g) Tracer f .

Exo **8** Tracer $t \to \sin t^2$ sur $[0, \sqrt{\pi}]$. Calculer à 10^{-3} près $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin t^2 dt$.

Exo **9** (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ du polynôme $X^n - 1$.

(b) Justifier l'existence puis calculer pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ l'intégrale

$$I(x) = \int_0^{2\pi} \ln\left|x - e^{it}\right| dt \quad \text{à l'aide de sommes de Riemann.}$$

Exo **10** Si $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$, soit $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$.

(a) Déterminer le plus petit réel x_n strictement positif en lequel f_n atteint un maximum local.

(b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n)$ à l'aide des sommes de Riemann.

FONCTIONS INTÉGRABLES

Exo **1** Étudier l'intégrabilité des fonctions :

a) $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ sur $]0, 1]$.

b) $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ sur $]0, 1[$.

c) $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2 + \ln t}$ sur $[1, +\infty[$.

d) $x \longmapsto (\ln x)^7$ sur $]0, 1[$.

e) $x \longmapsto \ln(\sin x)$ sur $]0, \pi[$.

f) $t \longmapsto e^{-t^2}$ sur $]0, 1[$.

g) $t \longmapsto t^{37}e^{-t}$ sur $\mathbb{R}^+$.

h) $t \longmapsto \dfrac{\sin t + t\ln t}{t^{\frac{5}{2}}}$ sur $[1, +\infty[$ et sur $]0, 1]$.

i) $t \longmapsto \dfrac{t + 3 + i}{t^3 + 2it + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

j) $t \longmapsto \dfrac{\cos t^2}{t^2 + t + 1}$ sur $[0, +\infty[$.

Exo **2** Étudier l'intégrabilité des fonctions et calculer les intégrales :

a) $\displaystyle\int_{[0,\frac{\pi}{2}[} \sqrt{\tan t}\, dt$. b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3 + 2t^2 + 3t + 2} dt$. c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} dt$. d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2\sqrt{1 + t^2}} dt$.

Exo **3** Soit $I(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^1 t^\alpha(1 - t)^\beta dt$.

(a) Déterminer l'ensemble D des couples (α, β) pour lesquels $I(\alpha, \beta)$ existent .

(b) Montrer que $I(\alpha, \beta) = I(\beta, \alpha)$.

(c) Calculer $I(n, p)$ pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

(d) Calculer $I(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$.

(e) Montrer que I est continue sur D.

Exo **4** Étudier l'intégrabilité de la fonction $f(t) = \dfrac{t - \lfloor t\rfloor}{t}$ sur $[1, +\infty[$.

Exo **5** Étudier l'intégrabilité de la fonction $f(t) = \dfrac{\sin t}{\ln t}$ sur $[\pi, +\infty[$. La fonction admet-elle une intégrale semi-convergente ?

Exo **6** Soit f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

(a) Déterminer le domaine D de f.

(b) Calculer $f'(x)$.

(c) Montrer que $\forall x \in D$, $-f(x) + \dfrac{e^{-x}}{x} = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$. En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x}$.

(d) Montrer que $f(1) - f(x) - \ln x$ admet une limite finie en 0 . En déduire un équivalent de f en 0 ainsi qu'un développement asymptotique de f en 0 .

Exo 7 Calculer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{n}}}{1+t^2}\,dt$.

Exo 8 Déterminer un équivalent de (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{n+t}\,dt$.

Exo 9 Déterminer un développement asymptotique à trois termes de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ quand x tend vers $+\infty$.

Exo 10 Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$. En déduire une valeur de l'intégrale à 10^{-1} près.

Exo 11 Déterminer la limite de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\,dx$ quand n tend vers $+\infty$.

Exo 12 Soit f une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}^+$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\int_0^n e^{-x^n} f(x)\,dx$. Donner la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exo 13 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^n}\,dt$.

1) Quelle relation y a-t-il entre I_{n+1} et I_n
2) Déterminer un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exo 14 Existence et calcul éventuel de : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\,dt$

Exo 15 Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,dt$. Préciser le signe de J.

Exo 16 On considère une fraction rationnelle F à coefficients complexes telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,dt$ converge.
On note $\mathcal{P}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ et $a_1 \dots a_n$ les pôles deux à deux distincts de F respectivement d'ordre $m_1 \dots m_n$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on appelle résidu en a_k de F le coefficient de $\dfrac{1}{X - a_k}$ dans la décomposition en éléments simples de F, on le notera $\operatorname{Res}_F(a_k)$.

(a) Après avoir donner la forme générale de la décomposition en éléments simples de F, calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} xF(x)$ et en déduire que
$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_F(a_k) = 0$$

(b) Si $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_{-x}^{x} \frac{dt}{t-a}$.

(c) Montrer que $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,dt = 2i\pi \sum_{a_k \in \mathcal{P}^+} \operatorname{Res}_F(a_k)$, dans le cas où il y a au moins un pôle de F dans $\mathcal{P}^+$.

INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

Exo 1 On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

On définit F et G sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

(a) Montrer que que I existe .
(b) Montrer que la fonction $F + G^2$ est constante sur $\mathbb{R}$.
(c) En déduire la valeur de I.
(d) En déduire la valeur de $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

Exo 2 On définit F sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos xt}{t^2} e^{-t}\,dt$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = x \arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Exo $\boxed{3}$ Étudier la fonction f définie par $f(t) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{1 + t\cos x}}$.

(a) Déterminer le domaine de f.

(b) Étudier la continuité sur le domaine de f.

(c) Montrer que f est C^∞ sur son domaine.

(d) Dresser le tableau de variations, étudier la convexité, déterminer les limites aux bornes et tracer le graphe de f.

Exo $\boxed{4}$ (a) Quelles sont les racines complexes du polynôme $P(t) = t^4 + 1$? En déduire une factorisation de ce polynôme en deux facteurs réels du second degré.

(b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t^2)}dt$ existe et calculer sa valeur.

(c) Soit α un réel strictement positif. Pour quel ensemble de valeurs de α l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha}dt$ existe-t-elle ? Calculer sa valeur lorsque $\alpha = \dfrac{3}{2}$.

(d) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^{\frac{3}{2}} + t^n}dt$.

Deuxième partie

(e) On considère dans cette partie la fonction de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}dt.$$

(f) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Quelle propriété de symétrie possède-t-elle ? Écrire le tableau de variations de cette fonction sur l'intervalle $[0, +\infty[$, en précisant les valeurs $F(0)$, $F(1)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$, que l'on aura déterminées.

(g) Prouver que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, et donner une expression de $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

(h) Calculer l'intégrale de la question précédente lorsque x est différent de 1. Que vaut $F'(1)$?

(i) Tracer F.

(j) En déduire la valeur de l'intégrale I définie par

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(u)}{u^2 - 1}du$$

Exo $\boxed{5}$ **1)** On pose $K(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(tx)}{\sqrt{1-t^2}}dt$

a) Calculer $K(0)$.

b) Montrer que $t \mapsto \dfrac{\cos(tx)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $[0, 1[$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

c) Montrer en justifiant les dérivations sous le signe intégral que $K(x)$ est solution de l'équation $(E) : xy'' + y' + xy = 0$.

Exo $\boxed{6}$ On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, $J_n(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$.

1) Donner le domaine de définition de J_n.

2) Calculer J_n' en fonction de J_{n+1}.

3) Quelle est la relation de récurrence vérifiée par la suite U définie par $U_n(a) = a^{2n-1}J_n(a)$?

4) Calculer $J_n(a)$ en fonction de n et a.

Exo $\boxed{7}$ On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln t \, e^{-xt}\,dt$.

1) Quel est le domaine de définition de f ?

2) Étudier la dérivabilité de f.

3) Trouver une équation différentielle vérifiée par f.

Exo $\boxed{8}$ Étudier la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{x+t^2}\sqrt{1+xt^2}}$.

Exo 9 Soit $I = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt$.

(a) Montrer l'existence de I.

(b) Soit, pour $n \geqslant 1$, $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t \, dt$. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} I_n = I$.

(c) Exprimer I_n en fonction de n et I en fonction de la constante d'Euler $\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right]$.

(d) Montrer que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \ln t \, dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$. Calculer $F(x)$.

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS - C.S.-C.U.-C.A.-C.N.

Exo 1 Soit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto n x^n (1 - x)$.

(a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0, 1]$.

(b) Calculer $\|f_n - g\|_{\infty, [0,1]}$ où g est la limite simple de (f_n).
En déduire l'étude de la convergence uniforme de (f_n) sur $[0, 1]$.

Exo 2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto n^\alpha x^n (1 - x)$.

(a) Étudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n).

(b) Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$. En déduire la limite de la suite (I_n).
Quel lien y a-t-il avec la convergence uniforme ?

Exo 3 Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + \frac{\cos(n \arctan(x^n))}{n}$.
Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$.

Exo 4 Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$.
Montrer la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$. Quelle propriété n'a pas été transférée ?

Exo 5 Soit f_n définie par le graphe :

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ sur $[0, 1]$.

Exo 6 Calculer $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 x^{1 - \frac{1}{n}} e^{x^2} dx$.

Exo 7 Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{nx}$ et $f_n(0) = 1$.

(a) Montrer que la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

(b) Montrer que la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

(c) Montrer que la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}^+$ d'un certain type que l'on déterminera.

Exo 8 Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Soit F le SEV des fonctions polynômiales sur $[0, 1]$. Déterminer $F^\perp$.

Exo 9 Soit S définie par $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \arccos(\cos nx)$.

(a) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$, que S est paire et 2π-périodique.

(b) Calculer $S(0)$, $S(\pi)$ et $S(\frac{\pi}{2})$.

Exo 10 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$.
Montrer que cette suite converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
Étudier les différentes convergences de la série $(\sum f_n)$.

Exo 11 On fixe $\alpha > 0$ et on pose lorsque c'est possible :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^\alpha x}.$$

1) Domaine de définition de f ?

2) Continuité de f ?

3) Étudier le comportement de f en $+\infty$.

4) Donner un équivalent de f en 0.

Exo $\boxed{12}$ Soit la série de fonctions $(\sum u_n)$ avec $u_n(t) = e^{-t\sqrt{n}}$

(a) Étudier la convergence simple de $(\sum u_n)$.

On définit sur $D = \mathbb{R}_+^* : g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$.

(b) Montrer que g est C^∞ sur D et calculer (sous forme de série) $g^{(p)}(t)$.

(c) Déterminer à l'aide du (b) la limite de g en 0.

(d) Déterminer un équivalent simple de $g(t)$ en 0.

(e) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

(f) Étudier la convexité et tracer le graphe de g.

Exo $\boxed{13}$ Soit F définie par $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x-n|}{2^n}$.

(a) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que F est convexe sur $\mathbb{R}$.

(c) Étudier la dérivabilité de F.

(d) Tracer le graphe de F.

Exo $\boxed{14}$ Soit f définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + x^2}$.

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exo $\boxed{15}$ Soit $u_n :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1 + x^n)$.

(a) Montrer que la série $(\sum u_n)$ converge simplement sur $]-1, 1[$.

(b) Soit $-1 < a < b < 1$. Montrer que la série $(\sum u_n)$ converge uniformément sur $[a, b]$.

On pose $f_n :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \prod_{p=1}^{n} (1 + x^p)$.

(c) Soit $0 < a < 1$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[-a, a]$.

(d) En déduire que G définie par $G(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n)$ est continue sur $]-1, 1[$.

(e) Calculer $\lim_{x \to 1^-} G(x)$ et $\lim_{x \to -1^+} G(x)$.

Exo $\boxed{16}$ Montrer avec soin que $\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} t \cos(nt^2) e^{-nt} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t \cos(nt^2) e^{-nt} dt$.

Exo $\boxed{17}$ Soit $x \in]-1, 1[$ fixé. On définit u_n sur $\mathbb{R}$ par : $u_n(\theta) = \frac{x^n \cos(n\theta)}{n}$.

(a) $(\sum u_n)_{n \geqslant 1}$ converge-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

Soit f_x définie sur $\mathbb{R}$ par $f_x(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n}$.

(b) Montrer que f_x est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer (sans $\sum$) $f_x'(\theta)$.

(c) En déduire $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1) d\theta$.

Exo $\boxed{18}$ Soit f définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + n}$

(a) Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$.

(b) Montrer que que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^- : f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x}$.

(c) Montrer que que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : 0 < f(x) < \dfrac{1}{x}$ et $0 \leqslant f(x) - f(x+1) \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.

(d) En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$. En déduire $\displaystyle\lim_{t \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nt+1}$.

(e) Déterminer le développement asymptotique de $f(x)$ en 0 à l'ordre 2 (c'est-à-dire $f(x) = \cdots + o(x^2)$)

(f) Tracer f.

Exo $\boxed{19}$ On considère la suite de fonction (f_n) définie par $f_n(x) = (1 + \dfrac{x}{n})^n$. Est-ce que (f_n) converge uniformément sur tout segment compris dans $\mathbb{R}$?

Exo $\boxed{20}$ Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{z-1} dt$

Exo $\boxed{21}$ Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $Z_f = \{x \in \mathbb{R} \,/ f(x) = 0\}$ est un fermé. Soit F un fermé de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $Z_f = \{x \in \mathbb{R} \,/ f(x) = 0\} = F$. (On admet que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts 2 à 2 disjoints).

Exo $\boxed{22}$ 1] Soit une suite (f_n) d'applications de $[a, b]$ (un segment de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$ toutes k-lipschitziennes. Montrer que si (f_n) converge simplement vers f sur $[a, b]$ alors (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

2] Soit une suite (f_n) d'applications de $[a, b]$ (un segment de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$ toutes convexes sur $]a, b[$. Montrer que si (f_n) converge simplement vers f sur $]a, b[$ alors (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment compris dans $]a, b[$.

Exo $\boxed{23}$ On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie sur $[0;1]$ par

$$f_1(t) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(t) = \int_0^t 2\sqrt{f_n(u)}\, du$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) = \alpha_n t^{\beta_n}$ où $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux suites réelles.

(b) Montrer que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 1 en étudiant la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (\ln(\alpha_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(c) Conclure quant à la convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(d) Montrer la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $[0;1]$.

Exo $\boxed{24}$ Sur un espace probabilisé, on considère une v.a. entière N d'espérance finie et $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires entières ayant toutes même loi d'espérance finie. On suppose que, pour tout $n \geqslant 1$, les variables N et $Z_n = (X_1, \ldots, X_n)$ sont indépendantes. On définit alors :

$$S_0 = 0, \qquad \forall n \geqslant 1 : S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad T = \sum_{i=1}^{N} X_i. \text{ c'est-à-dire } \forall \omega \in \Omega : T(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega).$$

On peut ainsi modéliser les remboursements effectuées par une compagnie d'assurance pendant une période donnée : N est le nombre aléatoires de sinistres déclarés et X_i est le coût (aléatoire) du i-ème sinistre. On se propose de calculer l'espérance de T sans connaitre les lois de N ou X_i.

(a) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $\mathbf{E}\left(S_j \cdot \mathbf{1}_{(N=j)}\right) = j\mathbf{P}(N = j)\,\mathbf{E}(X_1)$.

(b) On pose $T_n = T \cdot \mathbf{1}_{(N \leqslant n)}$. Calculer $\mathbf{E}(T_n)$.

(c) Montrer que la suite de v.a. (T_n) converge simplement sur Ω vers T. En déduire l'espérance de T en fonction de celle de N et de X_1.

Exo $\boxed{25}$ Soit $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(a) Si $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, déterminer l'espérance de la v.a. $f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$. Quelle est la limite probable de cette espérance ?

(b) Pour $\alpha > 0$, on pose $\omega_f(\alpha) = \sup\{\, |f(x) - f(y)|\ ,\ (x, y) \in [0,1]^2 \text{ et } |x - y| \leqslant \alpha\}$.
Déterminer $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0} \omega_f(\alpha)$.

(c) Montrer que $\mathbf{E}\left(\left|f\left(\dfrac{S_n}{n}\right) - f(p)\right|\right) \leqslant \omega_f(\alpha) + 2\|f\|_\infty \mathbf{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| > \alpha\right)$
En déduire qu'il existe une suite de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[0,1]$. C'est le théorème de ?

SÉRIES ENTIÈRES

Exo 1 Soit $(\sum a_n z^n)$ une série entière. On suppose que $(\sum a_n)$ est semi-convergente.
Calculer le rayon de convergence de $(\sum a_n z^n)$.

Exo 2 Calculer le rayon de convergence et l'étude au bord (dans $\mathbb{R}$) des séries entières :

a) $(\sum \frac{n^2}{3^n+n}x^n)$ b) $(\sum \cos(n)x^n)$ c) $(\sum \frac{(2n)!}{n^n n!}x^n)$

d) $(\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})x^n)$ e) $(\sum n^{\ln n}x^n)$ f) $(\sum \frac{x^n}{\ln(n!)})$

g) $(\sum a_n x^n)$ où a_n est la somme des n premières décimales de π.

Exo 3 Soit (a_n) définie par $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ et $\forall n \geqslant 2 : a_{n+1} = a_n - \frac{a_{n-2}}{2(n+1)}$.

(a) Montrer par récurrence que (a_n) est décroissante et que (na_n) est croissante .

(b) Déterminer le rayon de convergence de $(\sum a_n x^n)$.

(c) Soit f la série somme : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
Trouver une équation différentielle vérifiée par la fonction f. En déduire f.

Exo 4 Calculer le rayon et la somme des séries entières :

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}x^n$. b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$. c) $\sum_{n=0}^{\infty} n^{(-1)^n}x^n$.

Exo 5 Calculer $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)!}$ en fonction des fonctions usuelles.

Exo 6 Soit f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.
Montrer que f est C^∞ sur $]-1,+\infty[$.
On pose $\forall x \in]-1,+\infty[: g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Montrer que $\forall x \in [-1,1] : g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n^2}$. Sachant que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\int_0^1 f(t)dt$.

Exo 7 Soit $n \geqslant 2$ et $f(x) = (\sin x)^n$. Calculer pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x)}{x^{n-k}}$.

Exo 8 Déterminer le développement en série entière (DSE) des fonctions suivantes :

a) $\cos^4 x$ b) $e^x \cos x$ c) $\frac{x^2}{x^3-4x^2+6x-4}$ d) $e^x\ln(1+x)$ e) e^{x^2+x}

Exo 9 Déterminer le DSE par la méthode de l'équation différentielle de $(\arcsin x)^2$.

Exo 10 Montrer sans utiliser la "trigo" , à l'aide de la définition de $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, que $\forall x \in]0,3] : \sin x > 0$.

Exo 11 Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant 1 : |\cos z| \leqslant \frac{5}{3}$.

Exo 12 Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} : |e^z - 1| \leqslant e^{|z|} - 1$.

Exo 13 $\forall n \geqslant 1$, $\forall z \in \mathbb{C} : |e^z - (1+\frac{z}{n})^n| \leqslant e^{|z|} - (1+|\frac{z}{n}|)^n$.

Exo 14 Déterminer $\sup_{|z|<1}|\sin z|$

Exo 15 On pose $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ lorsque c'est possible.

1) Exprimer $S(x)$ à l'aide des fonctions usuelles pour $|x| < 1$.

2) Déterminer le domaine de définition de S.

Exo 16 Déterminer le développement en série entière de la fonction f définie par :
$f(x) = \int_x^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2+t^4}$.

Exo **17** Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{np+1}$.

2) Écrire la somme sous forme d'une intégrale pour $x \in]-R, R[$.

3) Calculer cette somme pour $p = 4$. Que dire en $x = -R$?

Exo **18** Soit $(\sum a_n x^n)$ une série entière quelconque. Démontrer que le rayon de cette série entière est non nul SSI il existe $(\alpha, k) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, tels que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant \frac{k}{\alpha^n}$.
En déduire que $x \mapsto \tan x$ est développable en série entière en 0.

Exo **19** Soit $(\sum a_n x^n)$ une série entière de rayon $R > 0$. On considère f définie sur $D =]-R, R[$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
Prouver que f est développable en série entière au voisinage de tout point de D.

Exo **20** On considère l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E})\ x^2 y'' + xy' + (4x^4 - 1)y = 0$$

qu'on veut intégrer sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Montrer qu'il existe $R > 0$ et une fonction y_0 développable en série entière sur $]-R, R[$ qui coïncide sur $]0, R[$ avec une solution de $(\mathcal{E})$ (qu'on notera également y_0). Donner une expression simple de y_0 utilisant les fonctions usuelles, soumise à la condition supplémentaire $y_0'(0) = 1$.

Exo **21** On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

Déterminer sous forme d'une séries entière la solution $y_0(x)$ telle que : $y_0(0) = 1$.
Préciser le domaine de définition de $y_0(x)$. (On ne cherchera pas à exprimer $y_0(x)$ à l'aide des fonctions usuelles).

Exo **22** On note $N(n,p)$ le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ qui ont exactement p points fixes ; on convient que $D_0 = 1$. On pose

$$D(n) = N(n,0) \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D(n)}{n!} x^n$$

(a) Déterminer le lien entre $N(n,p)$ et $D(n-p)$.

(b) Montrer que f est définie sur $]-1;1[$ et calculer f.

(c) Calculer $N(n,p)$ puis en déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} N(n,p)$.

Exo **23** Déterminer le nombre de façons de payer 100 Euros avec des pièces de $1, 2, 3$ Euros. Écrire une fonction python pour obtenir ce nombre.

(**Indication** : développer en série entière $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$)

Exo **24** (a) Montrer que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ converge et déterminer sa valeur.

(b) Montrer que c'est un irrationnel.

Exo **25** Soit $n \geqslant 1$, on note I_n le nombre d'involutions de $[\![1, n]\!]$ c'est-à-dire d'applications f de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même qui vérifient $f \circ f = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$. On pose $I_0 = 1$.

(a) Montrer que

$$\forall n \geqslant 2,\ I_n = I_{n-1} + (n-1) I_{n-2}$$

(b) Montrer que la série entière $\sum \frac{I_n}{n!} x^n$ est définie sur $]-1;1[$. Notons S sa somme.

(c) Montrer que $\forall x \in]-1;1[$, $S'(x) = (1+x)S(x)$.

(d) En déduire une expression explicite de $S(x)$ puis de I_n.

Exo **26** (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $\left(\sum \frac{n^p}{n!}\right)$ converge. On note S_p sa somme.

(b) Calculer S_0, S_1 et S_2.

(c) Prouver que pour tout $p \in \mathbb{N}$, S_p est un multiple entier de e.

Exo $\boxed{27}$ Soit $\alpha \in]0;\pi[$.

(a) Exprimer $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ en fonction de $\tan\frac{\alpha}{2}$.

(b) Former le développement en série entière en 0 de

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\tan\frac{\alpha}{2}\right)$$

Exo $\boxed{28}$ (a) On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Déterminer en fonction de l'entier naturel k la somme $1 + j^k + j^{2k}$.

(b) Déterminer les rayons de convergence R_k des séries entières de terme général $\dfrac{x^{3n+k}}{(3n+k)!}$ pour $0 \leqslant k \leqslant 2$, puis calculer chacune des sommes pour $|x| < R_k$.

Exo $\boxed{29}$ Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On pose χ_A et $\rho(A)$ respectivement le polynôme caractéristique et le rayon spectral de A (valeur propre de A de plus grand module). On considère la série

$$\sum \operatorname{tr}(A^n)z^n$$

On note respectivement R et S son rayon de convergence et sa somme.

(a) Calculer $\operatorname{tr}(A^n)$ en fonction des valeurs propres de A.

(b) Déterminer R en fonction de $\rho(A)$.

(c) Déterminer une expression de S en fonction du quotient $\dfrac{\chi_A'}{\chi_A}$.

Exo $\boxed{30}$ Peut-on piper 2 dés de telle sorte que la variable aléatoire "somme des 2 dés" soit uniformément réparti sur l'intervalle $[\![2, 12]\!]$, *(indication : on utilisera les fonctions génératrices)*.

Exo $\boxed{31}$ Le nombre d'accidents N durant une semaine dans une usine est une variable aléatoire d'espérance m et de variance σ^2.

Pour tout accident, le nombre d'ouvriers X blessés lors de cette accident est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance τ^2.

Tous ces évènements sont supposés indépendants.

1. Donner la fonction génératrice de nombre Y d'ouvriers blessés par semaine, en l'exprimant à l'aide des fonctions génératrices de N et X.

2. En déduire la valeur des espérance et variance de Y en fonction de m , σ^2, μ et τ^2.

Exo $\boxed{32}$ X, Y et Z désignent trois variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ et suivant une même loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. On considère la matrice M définie par

$$M = \begin{pmatrix} X & X & X \\ Y & Y & Y \\ Z & Z & Z \end{pmatrix}$$

(a) Démontrer à l'aide des fonctions génératrices que $X + Y$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2n, p)$. Quelle est la loi, l'espérance et la variance de $S = X + Y + Z$?

(b) Quelle est la probabilité pour que M soit la matrice d'un projecteur ?

(c) Soit T la variable aléatoire désignant le nombre de valeurs propres de la matrice M. Vérifier que $T(\Omega) = \{1, 2\}$. Donner la loi, l'espérance et la variance de T.

(d) Quelle est la probabilité pour que M soit diagonalisable ?

Exo $\boxed{33}$ Dans une suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ de pile ou face équitables, on appelle "série" toute suite de résultats consécutifs identiques. Par exemple dans la suite "FFPFPPPPPPFF" , il y a 5 séries. On note S_n le nombre de séries observées après n lancers indépendants. Montrer que

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall i \geqslant 1 : \mathbf{P}(S_n = i, X_n = \ 'F') = \frac{1}{2}(\mathbf{P}(S_{n-1} = i, X_{n-1} = \ 'F') + \mathbf{P}(S_{n-1} = i-1, X_{n-1} = \ 'P'))$$

Évaluer de même $\mathbf{P}(S_n = i, X_n = \ 'P')$. En déduire la fonction génératrice et la loi de S_n.

Exo $\boxed{34}$ Un joueur va au casino avec une fortune initiale $a \in \mathbb{N}^*$. A chaque partie, sa fortune augmente de 1 avec la probabilité p et diminue de 1 avec la probabilité $q = 1 - p$.

(a) Soit $b \geqslant a$ un entier. On note $P_b(a)$ la probabilité que le joueur atteigne la fortune b avant d'être ruiné. Déterminer une relation entre $P_b(a)$, $P_b(a+1)$ et $P_b(a-1)$.
En déduire la valeur de $P_b(a)$.

(b) On autorise le joueur à emprunter. On note T le premier instant où sa fortune atteint $a+1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on note $g_n = \mathbf{P}(T = n)$ et g la fonction génératrice de la suite (g_n).

i. Montrer que $g_{n+2} = q(g_1 g_n + g_2 g_{n-1} + \cdots + g_n g_1)$.

ii. En déduire une relation entre $g(t)$ et $g(t)^2$.

iii. En déduire g, $\mathbf{P}(T < +\infty)$ ainsi que $\mathbf{E}(T)$.

Exo **35** On munit l'ensemble Ω_N des permutations de $[\![1, N]\!]$ de l'équiprobabilité P_N. On note X_N la variable aléatoire correspondant au nombre de cycles (de longueur supérieure ou égale à 1) intervenant dans la décomposition d'une permutation en produits de cycles de supports disjoints (on compte en fait le nombre des orbites) et G_N sa fonction génératrice.

(a) Montrer que $P_{N+1}(X_{N+1} = k) = \dfrac{1}{N+1} P_N(X_N = k-1) + \dfrac{N}{N+1} P_N(X_N = k)$.

(b) En déduire une expression factorisée de $G_N(t)$.

(c) Calculer l'espérance et la variance de X_N.

(d) Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_N}{\ln N} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

PRODUITS SCALAIRES

Exo **1** On considère $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique.
Orthonormaliser (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1,2,3)$, $x_2 = (-3,2,7)$, $x_3 = (0,4,9)$.

Exo **2** Calculer $\inf\left\{\displaystyle\int_0^{+\infty} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 e^{-t} dt \ , \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

Exo **3** Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ tel que la base canonique soit OTN pour ce produit scalaire.

(a) Soit $(A, B) \in E^2$. Donner l'expression de $(A|B)$ et de $\|A\|$.

Soit $\mathcal{S} = \{A \in E$ tels que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et A symétrique $\}$.

(b) Montrer que $\mathcal{S}$ est un SEV de E et déterminer une base et la dimension de $\mathcal{S}$.

(c) Déterminer $\mathcal{S}^\perp$.

Exo **4** Soit $E = C^0([0,2], \mathbb{R})$. On munit E de la forme $\varphi : (f|g) = \displaystyle\int_0^2 f(t)g(t)dt$.

(a) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

(b) Montrer qu'il existe, pour ce produit scalaire, une famille orthogonale de polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots)$ de E telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d^0(P_n) = n$ et P_n unitaire (on confond polynôme et fonction polynômiale). Étudier l'unicité de ces polynômes.

(c) Calculer P_0 , P_1 , P_2 et P_3.

Exo **5** Soit E un $\mathbb{R}$-EV euclidien de dimension n et $f \in \mathcal{O}(E)$. On pose $g = f - \mathrm{id}_E$.

(a) Montrer que $\mathrm{Im} g$ et $\ker g$ sont en somme directe orthogonale.

(b) Justifier l'existence et reconnaitre l'endomorphisme $\varphi = \displaystyle\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}(\mathrm{id}_E + f + f^2 + \cdots + f^p)$.

Exo **6** Soit f canoniquement associé à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$ munit de son produit scalaire canonique.
Déterminer f^* ainsi que les éléments propres de f et de f^*.

Exo **7** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien.
Prouver l'égalité $\mathrm{Ker}(u^* \circ u) = \mathrm{Ker}\, u$. Que peut-on en déduire pour le rang de $A^T A$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exo **8** Soit $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On définit $\forall (A, B) \in E^2 : (A|B) = \mathrm{Tr}(A^T B)$.

(a) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E.

(b) Déterminer une base OTN pour ce produit scalaire.

(c) Soit $A \in E$ et $\phi : E \to E$, $X \mapsto AX^TA$. Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(E)$ et montrer que ϕ est symétrique.

(d) Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, calculer $\|A\|$.

(e) Soit $(A, B) \in E^2$, montrer que $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

Exo $\boxed{9}$ Soit $(E, (|))$ un espace pré-hilbertien réel.

(a) Montrer que pour tout $a \in E$, l'application $f_a : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x|a)$ est continue sur E.

(b) Montrer que pour toute partie A de E, $A^\perp$ est un SEV fermé de E.

Exo $\boxed{10}$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A (répétées autant que leurs ordres de multiplicité).

Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

Exo $\boxed{11}$ Soit E un $\mathbb{R}$-EV euclidien de dimension n et soit s une réflexion de E.

Montrer qu'il existe $\vec{a} \in E$ tel que $\vec{a} \neq 0$ et $\forall \vec{x} \in E$, $s(\vec{x}) = \vec{x} - \dfrac{2(\vec{x}|\vec{a})}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}$.

Exo $\boxed{12}$ Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^TA = B^2$.

Exo $\boxed{13}$ On considère $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et orienté. Déterminer les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $f(u) \wedge f(v) = f(u \wedge v)$.

Exo $\boxed{14}$ On considère $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et orienté. On note $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sa base canonique (qui est donc OTND).

(a) Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tel que $\|\vec{x}\| = 1$. Montrer que $\|\vec{x} \wedge \vec{i}\|^2 + \|\vec{x} \wedge \vec{j}\|^2 + \|\vec{x} \wedge \vec{k}\|^2 = 2$.

On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit antisymétrique si $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2 : (f(\vec{x})|\vec{y}) = -(\vec{x}|f(\vec{y}))$.

(b) Montrer que f est antisymétrique <u>**ssi**</u> $\exists \vec{a} \in E$ tel que $\forall \vec{x} \in E : f(\vec{x}) = \vec{a} \wedge \vec{x}$.

Exo $\boxed{15}$ Former la matrice, dans la base canonique orientée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$, de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et d'axe dirigé et orienté par $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Exo $\boxed{16}$ On considère $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et orienté. Déterminer les éléments géométriques de f définie canoniquement par sa matrice A dans la base canonique avec :

$$A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -3\sqrt{6} \\ -3 & 7 & -\sqrt{6} \\ -3\sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et } A = \frac{-1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Exo $\boxed{17}$ Soit E un **PHR** de dimension quelconque et soit p un projecteur de E. Alors on a :

p est un projecteur orthogonal <u>**si et seulement si**</u> $\boxed{\forall x \in E \ : \|p(x)\| \leqslant \|x\|}$.

Exo $\boxed{18}$ Soit E un $\mathbb{R}$-EV euclidien orienté de dimension n et soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

(a) Soit $\mathcal{B}$ une base <u>**OTND**</u>. Montrer que le réel $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$,OTND.

On pose alors $\Delta(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

(b) Montrer que $|\Delta(x_1, \dots, x_n)| \leqslant \|x_1\| \cdots \|x_n\|$. Étudier les cas d'égalité.

Exo $\boxed{19}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$. Montrer que : $(\operatorname{tr}(AB + BA))^2 \leqslant 4\operatorname{tr}(A^2)\operatorname{tr}(B^2)$.

Exo $\boxed{20}$ Soit A une matrice carrée d'ordre n, montrer que A est symétrique définie positive SSI il existe B inversible telle que $A = B^TB$.

Exo $\boxed{21}$ Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe un unique couple $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R})^{++}$ tel que $A = OS$.
En déduire que $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Exo $\boxed{22}$* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2$. Montrer que : $(\det(A + B))^{\frac{1}{n}} \geqslant (\det(A))^{\frac{1}{n}} + (\det(B))^{\frac{1}{n}}$

Exo $\boxed{23}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Discuter l'existence et l'unicité de $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$.

Exo $\boxed{24}$* Soit $H = \ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ , \ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 < +\infty \right\}$ muni de son produit scalaire canonique.
Déterminer la "forme" des formes linéaires et continues sur H.

Exo **25** (a) On considère la rotation vectorielle r autour du vecteur unitaire $\vec{v}$ et d'angle θ. Justifier qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de r est de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(r) = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R(\theta) \end{pmatrix}$$

où $R(\theta)$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on précisera.

(b) Déterminer la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ de la rotation vectorielle r autour de $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ tel que $r(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$ (on supposera $\mathbb{R}^3$ orienté canoniquement).

Exo **26** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^T A = A A^T$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = O_n$.

(a) Montrer que $A^T A = O_n$.

(b) En déduire que $A = O_n$.

Exo **27** Soient a, b et c trois réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Montrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a^2 & ab - c & ac + b \\ ab + c & b^2 & bc - a \\ ac - b & bc + a & c^2 \end{pmatrix}$$

est la matrice d'une isométrie. Laquelle (on supposera $\mathbb{R}^3$ orienté canoniquement) ?

Exo **28** Soit $(H, (\cdot|\cdot)\,)$ un préhibertien réel. Montrer que pour toute partie $A \subset H$, on a $A^\perp = \overline{A}^\perp$.

GÉOMÉTRIE AFFINE EUCLIDIENNE

Exo **1** Soit une mouche posée sur le carreau d'une chambre cubique et soit une araignée dans un des deux coins inférieurs opposés à la fenêtre. Quel est le chemin le plus court de l'araignée pour aller manger la mouche.

Exo **2** Comment couper, avec une règle (non graduée) et un compas, un segment donné en 7 segments égaux.

Exo **3** Soit deux droites distinctes sécantes. Soit A un point hors des deux droites. Construire, avec une règle (non graduée) et un compas, les cercles tangents aux deux droites et passant par A.

Exo **4** Montrer que dans un triangle, le centre de gravité G, l'orthocentre H, le centre du cercle circonscrit I sont alignés. Le centre du cercle inscrit Ω est il toujours sur cette droite (appelée droite d'Euler) ?

Exo **5** Soit A, B, C dans E et f définie de E dans E par $f(M) = MA^2\overrightarrow{BC} + MB^2\overrightarrow{CA} + MC^2\overrightarrow{AB}$. Soit I le centre du cercle circonscrit à ABC. Montrer que $f(I) = \overrightarrow{0}$.

Exo **6** Soit ABC un triangle équilatéral et M un point à l'intérieur de ABC. Montrer que la somme des distances de M aux trois côtés de ABC ne dépend pas de M.

Exo **7** Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$. On note
$\widehat{A} = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$, $\widehat{B} = (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$, $\widehat{C} = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$.
On note R le rayon du cercle circonscrit et S la surface du triangle ABC.

(a) Montrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.

(b) Montrer que $\sin\widehat{A} = \dfrac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. En déduire que $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

(c) Montrer que $R = \dfrac{a}{2\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{2\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{2\sin\widehat{C}}$.

Pour les exercices 8 à 9 , E désigne un plan vectoriel rapporté à un repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ OTND. Sauf indication contraire, les coordonnées des points, des vecteurs et les équations de droites sont données dans le repère $\mathcal{R}$.

Exo **8** Former les équations des tangentes communes aux deux cercles :
$(C_1) : x^2 + y^2 = 100$ et $(C_2) : x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0$.

Exo **9** Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites de $\mathbb{R}^2$, et $a \in \mathbb{R}^+$. Trouver le lieu des points M tels que :

$$d(M, \Delta_1) + d(M, \Delta_2) = a.$$

Pour les exercices 10 à 16 , E désigne un espace vectoriel de dimension 3 rapporté à un repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ OTND. Sauf indication contraire, les coordonnées des points, des vecteurs et les équations de droites et de plans sont donnés dans le repère $\mathcal{R}$.

Exo **10** Calculer la distance de $A(1,1,1)$ au plan P représenté paramétriquement par : $\begin{cases} x = 2+\lambda-\mu \\ y = 3-\lambda+2\mu \\ z = 1+2\lambda+\mu \end{cases}$

Exo **11** Former l'équation cartésienne du plan perpendiculaire au plan $(P) : x-y+z+24=0$ et contenant la droite $\mathcal{D}\begin{cases} 2x-y+2z+4=0 \\ x-y-z+1=0 \end{cases}$

Exo **12** Déterminer la perpendiculaire commune de $\mathcal{D}\begin{cases} x+y-3z+4=0 \\ 2x-z+1=0 \end{cases}$ et de $\mathcal{D}'\begin{cases} x=z-1 \\ y=z-1 \end{cases}$. En déduire la distance de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}'$.

Déterminer la nature de l'ensemble des points M qui sont à égales distances de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Exo **13** Calculer la distance de $A(1,1,1)$ à la droite $\mathcal{D}\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$ et

la distance de $A(-1,2,1)$ à la droite D représenté paramétriquement par : $\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$

Exo **14** Déterminer toutes les droites (D) de E rencontrant les trois droites

$\mathcal{D}_1\begin{cases} z=1 \\ y=x-2 \end{cases}$ $\mathcal{D}_2\begin{cases} z=0 \\ y=2x+3 \end{cases}$ $\mathcal{D}_3\begin{cases} z=-1 \\ y=-x+1 \end{cases}$ et orthogonales à $\vec{u}(2,4,-3)$.

On montrera qu'une telle droite peut se paramétrer par $\begin{cases} x=az+b \\ y=cz+d \end{cases}$

Exo **15** Déterminer le centre et le rayon du cercle suivant : $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ x^2+y^2+z^2-2x-6y-10z=0 \end{cases}$

Exo **16** Déterminer la sphère de centre $A(1,2,3)$ et tangent au plan d'équation $x+y+z=1$.

On donnera le rayon.

Exo **17** Soit (C) un cercle de E et A un point de E qui ne soit pas dans le plan de (C). Un point M décrit (C) ; montrer que le plan perpendiculaire à (AM) passant par M passe par un point fixe.

GROUPES & ARITHMÉTIQUE

Exo **1** Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , a \in \mathbb{R}^* \right\}$. Montrer que $(G,\times)$ est un groupe isomorphe à un groupe célèbre.

Exo **2** Montrer que les sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$ sont soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}+$) , soit ils sont denses dans $\mathbb{R}$.

Applications :

a) Montrer que si f est continue, non constante et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ alors elle admet une plus petite période strictement positive.

b) Montrer que $A = \{\cos n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$.

c)* Montrer que $A = \{\sin n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$.

Exo **3** Soit K un corps fini. Montrer qu'il existe un nombre premier p et un entier n tel que card$(K)=p^n$. En déduire qu'il n'existe aucun corps ayant 6 éléments.

Exo **4** Montrer que l'ensemble des 3-cycles est une partie génératrice de $\mathcal{A}_n$ (le groupe alterné du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ avec $n \geqslant 3$).

Exo **5** On considère le groupe $(\mathbb{Q},+)$. Soit $A \subset \mathbb{Q}$, fini. Montrer que $< A > \neq \mathbb{Q}$.

Exo **6** On admet le théorème de Cauchy qui dit que pour tout groupe de cardinal n et pour tout nombre premier p divisant n alors il existe un élément de G d'ordre p.

Donner tous les groupes à 6 éléments (à isomorphisme près).

Exo **7** Soit G un groupe abélien et x, y 2 éléments de G d'ordre respectif n et p. On suppose que $n \wedge p = 1$. Déterminer l'ordre de xy.

Exo **8** La comète A qui est visible tous les 5 ans a été observée il y a 1 an. La comète B qui est visible tous les 8 ans a été observée il y a 2 ans. La comète C qui est visible tous les 11 ans a été observée il y a 3 ans. Dans combien d'années pourra-t-on observer les 3 comètes simultanément ?

Exo **9** Soit p un entier premier et n un entier. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Déterminer le cardinal de E, le nombre de droites vectorielles, d'hyperplans. Déterminer le nombre de famille libre à k éléments, le nombre de bases. Déterminer le cardinal de $GL_n(\mathbb{K})$, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer le nombre de projecteurs de E.

Exo **10** Résoudre dans $\mathbb{N}^3$, l'équation $x^2 + y^2 = z^2$.

Exo **11** a)Montrer que si $m|n$, avec $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, alors $\varphi(m)|\varphi(n)$.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$: $n = \displaystyle\sum_{d|n\ ,\ 1 \leqslant d \leqslant n} \varphi(d)$

c) Montrer que si $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, alors $\varphi(m)\varphi(n) = \varphi(mn)$ SSI $n \wedge m = 1$.

Exo **12** Résoudre les équations suivantes : $x^2 - x + \overline{7} = 0$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ et $x^2 - \overline{4}x + \overline{3} = 0$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Exo **13** Montrer sans récurer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $3 \times 5^{2n-1} + 19^{3n-2}$ est divisible par 17.

Exo **14** Déterminer l'opposé et l'inverse de $\overline{173}$ dans $\mathbb{Z}/507\mathbb{Z}$.

Exo **15** Résoudre les systèmes suivant : $\left\{\begin{array}{l} x \wedge y = 27 \\ x \vee y = 108 \end{array}\right.$ dans $(\mathbb{Z})^2$ et $\left\{\begin{array}{l} x \equiv 7\ (11) \\ x \equiv 13\ (20) \\ x \equiv 16\ (21) \end{array}\right.$ dans $\mathbb{Z}$.

Exo **16** Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{l} \overline{5}x + \overline{2}y = \overline{3} \\ \overline{2}x + \overline{4}y = \overline{6} \end{array}\right.$ dans $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^2$.

Exo **17** Montrer que pour tout nombre premier p, il existe un entier n tel que $6n^2 + 5n + 1 \equiv 0\ (p)$.

Exo **18** Soient a et x deux entiers supérieurs ou égales à 2 tels que $a^x - 1$ soit premier. Montrer que $a = 2$ et que x est premier. Étudier la réciproque.

Exo **19** Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on peut trouver $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leqslant q \leqslant n$ et $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \leqslant \dfrac{1}{nq}$.

Exo **20** Résoudre dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$ l'équation $X^2 + 4XY + Y^2 = 0$

Exo **21** Soit $k \in [\![0, 127^2[\![$, non divisible par 127. Donner la classe de $k^{127\times126}$ modulo 127^2.

Exo **22** Quels sont les deux derniers chiffres de 2^{1000} en écriture décimale ?

Exo **23** On note φ la fonction indicatrice d'Euler. Étant donnés k et n deux entiers naturels, on note $k \wedge n$ leur plus grand diviseur commun.

(a) Soit d un diviseur positif de $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il d'entiers k vérifiant

$$k \in [\![\, 1, n \,]\!] \quad \text{et} \quad k \wedge n = d$$

En déduire que

$$n = \sum_{d\,|\,n} \varphi(d)$$

(b) On note T la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient $t_{ij} = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } i \text{ divise } j \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right.$ et $D = \operatorname{diag}(\varphi(1)\ldots\varphi(n))$.

Déterminer la matrice $T^T D T$ puis en déduire le déterminant de la matrice S de coefficient général $s_{ij} = i \wedge j$.

Exo **24** On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour tout entier $n > 0$, on note $\nu_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers et $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

(a) Montrer la formule de Legendre :

$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

(b) Par combien de zéros se termine 2024!.

Exo **25** On note φ la fonction indicatrice d'Euler. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, $\varphi(n)$ est un entier naturel pair.

Exo **26** Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ le système suivant

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 84 \\ (x \wedge y)^2 = x \vee y \end{array}\right.$$

Exo **27** Notons $U(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.

(a) Déterminer le cardinal de $U(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})$.

(b) $U(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})$ est-il un groupe cyclique ?

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES-SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

Exo **1** Résoudre l'équation différentielle : $xy' - y - \dfrac{x}{1+x^2} = 0$. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$.

Exo **2** Soit (E) l'équation différentielle : $x^3y'' - 2xy + 3 = 0$.
Résoudre (E) en effectuant le changement de variable $z = xy' + y$.
Étudier les problèmes de raccord.

Exo **3** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2\alpha y' + y = e^{\alpha x}(x+1)$.

Exo **4** Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R} : f''(x) + f(x) \geqslant 0$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$ (indic : on pourra commencer par un cas particulier non "trivial").

Exo **5** Résoudre, en cherchant des solutions DSE, l'équation différentielle : $xy'' + 3y' - 4x^3y = 0$.
Étudier les problèmes de raccord.

Exo **6** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Chercher des solutions DSE de l'équation $y'' - xy' + \lambda y = 0$. En déduire la résolution de cette équation.

Exo **7** Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' = 5x - 2y + e^t \\ y' = -x + 6y + t \end{cases}$

Exo **8** Intégrer le système $X' = AX$ où A est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exo **9** Résoudre par 2 méthodes différentes le système différentiel : $\begin{cases} x' = 3x + 2y - 2z \\ y' = -x + z \\ z' = x + y \end{cases}$

Exo **10** Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x'' = x' + y' - y \\ y'' = x' + y' - x \end{cases}$

Exo **11** Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 0$. Résoudre le système $X' = AX$. Déterminer la nature des trajectoires (graphes des solutions).

Exo **12** Soit f une solution de l'équation différentielle : $y'' + ye^{-t^2} = \sin t$. On suppose que f est bornée sur $[0, +\infty[$.
Montrer que f' est bornée sur $[0, +\infty[$.

Exo **13** Soit p une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $\forall x \in [0, 1] : p(x) < 0$.
Soit (E) l'équation différentielle sur $[0, 1] : y'' + p(x)y = 0$.

(a) Que dire d'une fonction g solution de (E) pour laquelle qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $g(c) = g'(c) = 0$?

Soit f une solution non nulle de (E).

(b) On suppose que f admet une infinité de racines dans $[0, 1]$.

i. Montrer qu'il existe une suite convergente (α_n) de $[0, 1]$ telle que les α_n sont 2 à 2 distincts et $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(\alpha_n) = 0$.

ii. Montrer que f est nulle. Conclure.

(c) Montrer que f ne peut admettre plus d'une racine dans $[0, 1]$.

(d) Donner un exemple de solution sans racine et un exemple de solution avec une racine.

Exo **14** Soit (ε) l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = f$ où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ fixée.
On pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin \omega(x-t)}{\omega} f(t)\,dt$.
1) φ est-elle solution de (ε) ?
2) Y a-t-il des solutions de (ε) telles que $y(0) = y(a)$ et $y'(0) = y'(a)$ où a est un réel fixé ?

Exo $\boxed{15}$ On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}\,dt$.

1) Quel est le domaine de définition de F ? Donner un équivalent de F en 0^+.

2) Montrer que $\forall \alpha > 0,\ \exists (A, B, M) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall x \geqslant M,\ F(x) \leqslant A + Bx^{\alpha+\frac{1}{2}}$.

3) On s'intéresse à l'équation différentielle $2xy' + y = \ln(1+x)$. Donner la solution générale sur $]0, +\infty[$.

Y a-t-il une solution ayant une limite finie en 0 ?

Exo $\boxed{16}$ On considère l'équation différentielle homogène (E) définie par

$$(E) \quad x(1-x)y'' + (2x^2-1)y' + 2(1-2x)y = 0$$

(a) Déterminer une solution particulière de la forme $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Résoudre (E).

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES - CALCUL DIFFÉRENTIEL

Exo $\boxed{1}$ Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{x^4y^3}{x^6+y^8}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

Étudier la continuité et la différentiabilité de f. f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exo $\boxed{2}$ Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

Étudier la continuité et la différentiabilité de f. f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exo $\boxed{3}$ Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Que peut-on en déduire ?

Exo $\boxed{4}$ Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{e^x - e^y}{x-y}$ si $x \neq y$ et $f(x,x) = e^x$.

Montrer que f est C^0 , C^1 puis C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

Exo $\boxed{5}$ Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} \cdot \vec{y}$

On pose $E = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ que l'on munit de la norme $\|(\vec{x}, \vec{y})\|$ $=\mathrm{Max}(\|(\vec{x}\|_2, \|\vec{y})\|_2)$ où $\|_2$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que $(E, \|)$ est un EVN.

(b) Montrer que f est différentiable sur E et calculer en tout point la différentielle de f.

Exo $\boxed{6}$ L'application $(x,y) \mapsto |x| + |y|$ est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$, de classe C^1 ?

Exo $\boxed{7}$ Soit f définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ par $f(P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)^3 e^{-t}\,dt$. Montrer que f est définie et différentiable sur E.

Exo $\boxed{8}$ Montrer que $f : (x,y) \longmapsto (e^x - e^y, x+y)$ est une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et que sa réciproque est aussi de classe C^1.

Exo $\boxed{9}$ Soit φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x,y) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x^2\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta}\,d\theta$.

Étudier la continuité de φ. φ admet elle des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$?

Exo $\boxed{10}$ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, l'équation aux dérivées partielles suivante : $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = x + e^y$ avec f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Indication : On pourra montrer que l'on peut définir une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u,v) \mapsto g(u,v)$ telle que $f(x,y) = g(u,v)$ avec $u = x - y$ et $v = x + y$.

Exo $\boxed{11}$ On considère l'équation des cordes vibrantes :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0}$$

Cette équation s'applique aux petites vibrations d'une corde tendue, flexible (corde de violon par exemple) initialement tendue le long d'un axe x et mise en mouvement. $f(x,t)$ représente le déplacement d'un point d'abscisse x à l'instant t. La constante a^2 a pour valeur $\frac{\tau}{\mu}$ où τ est la tension (constante) de la corde et μ est la masse (constante) par unité de longueur de la corde. On suppose qu'il n'y a pas de forces extérieures agissant sur la corde et que celle-ci ne vibre que par élasticité.

(a) Résoudre cette équation aux dérivées partielles avec f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
On pourra montrer que l'on peut définir une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u,v) \mapsto g(u,v)$ telle que $f(x,t) = g(u,v)$ avec $u = x - at$ et $v = x + at$.

(b) Chercher une solution de l'équation avec les conditions aux limites :
$4\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - 25\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $f(0,t) = f(\pi,t) = 0$, $f(x,0) = \sin 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = 0$.
On interprétera physiquement les conditions aux limites. En déduire le mouvement de la corde dans le temps.

Exo $\boxed{12}$ Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $(0,0) \notin U$. Soit f définie et de classe C^2 de U dans $\mathbb{R}$.

On note $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (Laplacien).

Soit $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

On pose $U' = P^{-1}(U)$ et g définie sur U' par $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

(a) Montrer que U' est ouvert.

(b) Montrer que $\forall (r,\theta) \in U'$: $\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$. (Laplacien en polaire)

Exo $\boxed{13}$ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = y^2 e^x - x^2 y$.

(a) Déterminer les points critiques de f.

(b) Étude en $(0,0)$. Est-ce un extremum ? Dessiner les zones de $\mathbb{R}^2$ où f est positive et où f est négative.

(c) Étudier l'autre point critique (dire s'il est local , global, stricte ou non).

Exo $\boxed{14}$ (exercice écrit ccinp)

On définit la fonction $f : (x,y) \longmapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^2$.

Q6. Établir que l'équation $e^{-x} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Q7. Démontrer que f possède un unique point critique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Q8. A l'aide de la matrice hessienne, démontrer que f admet un extrémum local en (x_0, y_0).
Est-ce un minimum ou un maximum ?

Q9. (le petit plus !) Est-il global ? (*on pourra utiliser les coordonnées polaires*)

Exo $\boxed{15}$ Déterminer les extrémums (selon les cas dire s'ils sont locaux ou globaux , strictes ou non) des fonctions suivantes :

(a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

(b) $f(x,y) = x^n + y^n$ $(n \in \mathbb{N})$

(c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

(d) $f(x,y) = e^{x\sin y}$

(e) $f(x,y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$

(f) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$

(g) $f(x,y,z)=\frac{1}{2}x^2+xyz-y+z$

Exo **16** Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y)=x^3-3x\left(1+y^2\right)$.

a) Étudier les extremums locaux de f.

b) Soit $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 1\right\}$. Montrer que f admet un maximum M et un minimum m sur D.

c) Soit $(x,y)\in D$. Montrer que si $f(x,y)=M$ ou $f(x,y)=m$, alors $x^2+y^2=1$.

d) En déduire les valeurs de M et m.

Exo **17** Déterminer les bornes et les extremums (absolus) éventuels de $-\sum_{i=1}^{n} x_i\ln(x_i)$ sur

$$D_n=\{(x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n\ ,\ \sum_{i=1}^{n}x_i=1\}.$$

Exo **18** Déterminer les triangles dont la somme des cosinus des 3 angles est maximale.

Exo **19** Soit $k\in]0,1[$ et $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f'(x)|\leqslant k$. On définit :

$\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$(x,y)\mapsto(y+f(x),x+f(y))$

Montrer que φ est une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

Exo **20** Soit $f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{1+y^n}$. Déterminer le domaine de définition Δ de f puis étudier la continuité sur Δ. f est-elle C^1 sur Δ ?

Exo **21** Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout élément $A\in E$ on pose $\exp(A)=\sum_{p\geqslant 0}\frac{A^p}{p!}$.

Montrer que la fonction exp est différentiable en tout point et déterminer sa différentielle en A.

Exo **22** Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et soit $s\in\mathbb{R}$.

f est dite s-homogène si $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall\lambda>0$: $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^s f(x,y)$.

(a) Donner un exemple non nul (!) avec $s=3$.

(b) Montrer l'équivalence suivante : f est s-homogène <u>ssi</u>

$$\forall(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2 : x_0\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+y_0\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=sf(x_0,y_0)$$

Exo **23** Étudier les extremums de la fonction f définie sur le domaine $D=[0;1]^2$ par

$$f(x,y)=\frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

Exo **24** Résoudre en passant en coordonnées polaires l'équation aux dérivées partielles suivante

$$(E)\quad x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}$$

avec $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R})$.

Exo **25** (a) On rappelle que la fonction Γ est définie pour tout $x>0$ par $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Montrer que

$$\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$$

(b) Étudier l'existence éventuelle d'un minimum de la fonction f définie par

$$f(a,b)=\int_0^{+\infty}(t^2+at+b)^2e^{-t}\,dt$$

et le calculer.

Exo **26** Déterminer les fonctions $\varphi:]-1;1[\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que la fonction f définie par $f(x,y)=\varphi\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right)$ sur $U=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ soit harmonique c'est-à-dire

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

Exo **27** (a) On considère le plan muni de sa structure euclidienne canonique et on notera $\mathcal{B}$ sa base canonique. Étant donnés trois points A, B et C du plan, justifier que l'aire $\mathcal{S}$ du triangle ABC vaut

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\left|\det{}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|$$

(b) Soit Γ un cercle donné. Quels sont les triangles d'aire maximale inscrits dans Γ ?

Exo **28** Soit $K : [0;1]^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$K(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si} \quad x \leqslant y \\ y(1-x) & \text{si} \quad x \geqslant y \end{cases}$$

(a) A chaque fonction continue $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, on associe la fonction $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0;1]\,,\ g(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0;1]$ et que $g'' = -f$, $g(0) = g(1) = 0$.

(b) Montrer que l'application $T : f \mapsto g$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0([0;1]\,, \mathbb{R})$ et déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

SURFACES

Exo **1** Donner l'équation paramétrique du cône de révolution autour de l'axe $(0z)$ engendré par la rotation de la droite $\mathcal{D}\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-3y+z=0 \end{cases}$ autour de l'axe $(0z)$.

Exo **2** Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $z = x^3 + y^4$. Déterminer le plan tangent au point $M(1,2,9)$.

Exo **3** Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $\mathcal{C}\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = 1 - \cos 2t \\ z = 2\cos t \end{cases}$

(a) Montrer que $\mathcal{C}$ est inclus dans une sphère.

(b) Tracer les projections de $\mathcal{C}$ sur les plans (xy) , (xz) et (yz).

(c) Dessiner $\mathcal{C}$ et la visualiser mentalement dans l'espace.

FIN

TABLE DES MATIÈRES