

exercice 1

$$1. \quad \underline{e^{2i\theta} - 1 = e^{i\theta}(2i\sin\theta)}$$

$$2. \quad \underline{\omega_k = e^{2ik\pi/n}}$$

$$3. \quad \text{Si } a = 0 : \underline{S = \{0\}}$$

Si $a \neq 0$: $a = \rho e^{i\theta}$ écriture trigo. de a

Posons $b = \sqrt[n]{\rho} e^{i\theta/n}$ on a $b^n = a$ d'où

$$z^n = a \Leftrightarrow \left(\frac{z}{b}\right)^n = 1 \quad (\text{car } b \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \exists h \in [0, n-1] \mid z = b\omega_h$$

$$\text{d'où } \boxed{S = \{b, b\omega_1, \dots, b\omega_{n-1}\}}$$

$$4. \quad \text{Posons } \underline{b = e^{2ia}}$$
 on a $(z+1)^n = e^{2ian} \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{b}\right)^n = 1$

$$\text{d'où } (z+1)^n = e^{2ian} \Leftrightarrow z+1 = b\omega_h, h \in [0, n-1]$$

$$\text{d'où } \boxed{S = \{b-1, b\omega_1-1, \dots, b\omega_{n-1}-1\} \text{ avec } b = e^{2ia}}$$

$$5. \quad z_k = e^{2ia} \omega_k - 1 = e^{2ia} e^{2ik\pi/n} - 1$$

$$\text{d'où } \boxed{z_k = e^{i(a + k\frac{\pi}{n})} \times 2i\sin\left(a + k\frac{\pi}{n}\right)}$$

6. les racines de P sont les α_i , $i \in \{1, \dots, n\}$

(2)

$$P = X^n - (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \alpha_1 \dots \alpha_n$$

d'où : $A = -a_{n-1}$ et $B = (-1)^n a_0$

7. On considère le polynôme $P = (X+1)^n - e^{2ina}$.

Le produit de ses racines est :

$$B = \prod_{k=0}^{n-1} z_k = \prod_{k=0}^{n-1} e^{i(a + k\frac{\pi}{n})} 2i \sin(a + k\frac{\pi}{n}) \quad (\text{avec la 5°})$$

$$= e^{\sum_{k=0}^{n-1} i(a + k\frac{\pi}{n})} (2i)^n \times Q$$

$$\text{On } \sum_{k=0}^{n-1} i(a + k\frac{\pi}{n}) = ina + \frac{i\pi}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} k$$

$$= ina + \frac{i\pi}{n} \times \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\text{donc } B = e^{ina} e^{i\frac{\pi}{2}(n-1)} (2i)^n \times Q$$

$$= e^{ina} i^{n-1} (2i)^n \times Q$$

$$= 2^n i (-1)^{n-1} e^{ina} Q$$

↑
en développant

$$\text{On sait que } B = (-1)^n a_0 = (-1)^n [1 - e^{2ina}]$$

$$= (-1)^n e^{ina} (-2i \sin na)$$

donc $2^n \underbrace{(-1)^{n-1} e^{ina} Q = (-1)^n e^{ina} (-2i) \sin na}$

d' :
$$Q = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(a + \frac{k\pi}{n} \right)}{2^{n-1}} = \frac{\sin na}{2^{n-1}}$$

①

exercice 2

1) $n=1$ $\{\{a\}\}$ est l'unique partition de X_1 , d'où $\boxed{\pi_1 = 1}$

$n=2$ $\{\{a\}, \{b\}\}$ et $\{\{a, b\}\}$ sont les partitions de X_2

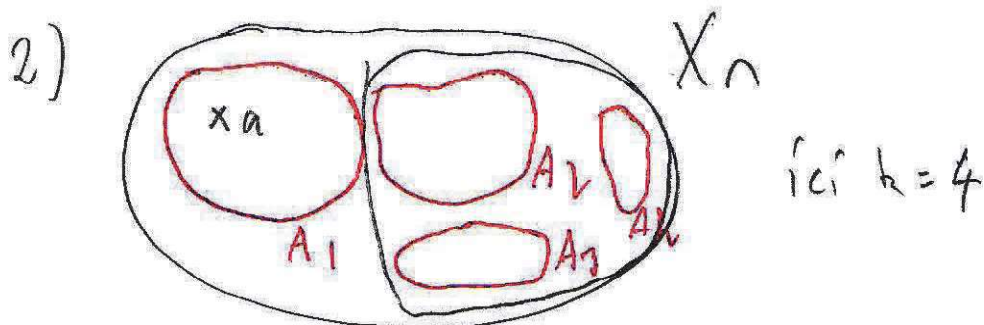
d'où $\boxed{\pi_2 = 2}$

$n=3$ $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$

$\{\{a, b\}, \{c\}\}, \{\{a, c\}, \{b\}\}, \{\{b, c\}, \{a\}\}$

$\{\{a, b, c\}\}$ sont les partitions de X_3

d'où $\boxed{\pi_3 = 5}$



une partition de X_n est à la forme :

$$\underbrace{\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_p\}}_{A_1}, \underbrace{\{a_{p+1}, \dots, a_q\}}_{A_2}, \dots, \underbrace{\{a_q, \dots, a_n\}}_{A_k}$$

① Dans A_1 , on peut donc mettre $\boxed{a}$ avec $p-1$ elt ②
 avec $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (si $p=1$: $A_1 = \{a\}$
 $p=n$: $A_1 = X_n$)

Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on choisit $\binom{n-1}{p-1}$ elt pour
 créer A_1 et avec les elt restants de $X_n - A_1$
 qui sont au nombre de $n-p$, on peut créer
 π_{n-p} partitions.

d'où
$$\pi_n = \sum_{p=1}^n \binom{n-1}{p-1} \pi_{n-p} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \pi_k$$

rem, pour $p=n$, $A_1 = X_n$ et $n-p=0$ et
 comme $\pi_0 = 1$, on a bien 1
 partition avec $A_1 = X_n$.

3) $\pi_4 = \binom{3}{0} \pi_3 + \binom{3}{1} \pi_2 + \binom{3}{2} \pi_1 + \binom{3}{3} \pi_0$
 $= 5 + 3 \times 2 + 3 + 1 = \underline{15}$, de même :

$\pi_5 = \underline{52}$ et donc $\boxed{\pi_6 = 203}$

4) On sait qu'une relation d'équivalence ^③ sur un ensemble E est une partition de E .

Réciproquement soit $\{A_1, \dots, A_h\}$ une partition de E . Associons lui une relation d'équivalence de tel sorte que les classes d'~ soient $A_1, \dots, A_h$:

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x R y \text{ si } \exists i \in [1, h] \mid x \in A_i \text{ et } y \in A_i$$

$$- \forall x \in E \exists i \in [1, h] \mid x \in A_i \quad \text{car } \bigcup_{i=1}^h A_i = E$$

donc R réflexive

- R est clairement symétrique.

$$- \forall (x, y, z) \in E^3 \mid x R y \text{ et } y R z :$$

$$\exists i \in [1, h] \mid x \in A_i \text{ et } y \in A_i$$

$$\exists j \in [1, h] \mid y \in A_j \text{ et } z \in A_j$$

si $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ (partition) , or $y \in A_i \cap A_j$

donc $i = j$ d'où $x \in A_i$ et $z \in A_i$: $x R z$

donc R transitive cqs R relation d'~

En conséquence il y a exactement le même nombre ④
de partitions et de relations d'équivalence sur
l'ensemble $\bar{n}$ est dit π_n .

5)

```
from math import factorial
```

```
def binome(n,p):
```

```
    return(factorial(n)//factorial(n-p)//factorial(p))
```

```
def P(n):
```

```
    if n==0 or n==1:
```

```
        return 1
```

```
    else:
```

```
        som=0
```

```
        for p in range(1,n+1):
```

```
            som=som+binome(n-1,p-1)*P(n-p)
```

```
        return(som)
```

```
for n in range(21):
```

```
    print('P(',n,') = ',P(n))
```

In [4]: (executing lines 1 to 17 of "NombreDeBell(partitions).py")

P(0) = 1

P(1) = 1

P(2) = 2

P(3) = 5

P(4) = 15

P(5) = 52

P(6) = 203

P(7) = 877

P(8) = 4140

P(9) = 21147

P(10) = 115975

P(11) = 678570

P(12) = 4213597

P(13) = 27644437

P(14) = 190899322

P(15) = 1382958545

P(16) = 10480142147

P(17) = 82864869804

P(18) = 682076806159

P(19) = 5832742205057

P(20) = 51724158235372

In [5]:

exercice 3

⑦

1/ $\forall (x, y) \in E^2 \quad x \leq y \text{ ou } y \leq x.$

Si $x \leq y$ alors $\sup\{x, y\} = \max\{x, y\} = y$
 $\inf \quad \quad = \min \quad \quad = x$

idem pour $y \leq x.$ d'où : E est un treillis

2/ $\forall (A, B) \in E^2$

On a $\sup\{A, B\} = A \vee B$ (fait en classe!)

$A \subset A \vee B$ et $B \subset A \vee B$ donc $A \vee B$ majore $\{A, B\}$

Soit Γ un majorant de $\{A, B\}$: $A \subset \Gamma$ et $B \subset \Gamma$

donc $A \vee B \subset \Gamma$ d'où $A \vee B$ plus petit des majorants

de $\{A, B\}$. On a donc $\sup\{A, B\} = A \vee B$

On fait de même $\inf\{A, B\} = A \wedge B$

d'où : $E = \mathcal{P}(X)$ est un treillis

3) La relation d'égalité est une relation d'ordre!

Si $x \neq y$ $\{x, y\}$ n'est même pas majoré.

on a donc $(\mathbb{N}, \leq)$ non trivialis

②

II 1) Non! $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ n'admet pas de borne supérieure ($\mathbb{N}$ non majoré).

2) $E = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ avec l'ordre usuel : toute partie de E non vide est bornée (par 0 et 1) donc possède des bornes sup. et inf. d'où $[0, 1]$ trivialis complet

3) $A = E \subset E$ possède une borne inférieure α_0 et une borne supérieure β_0 .

on a donc $\left| \begin{array}{l} \alpha_0 \leq n \text{ et } n \leq \beta_0, \text{ comme } (n, \beta_0) \in E^2 \\ \forall n \in A = E \end{array} \right.$

on a $\alpha_0 = \min E$ et $\beta_0 = \max E$

4) a) Avec $\alpha_0 = \min E$, on a $\alpha_0 \leq f(n)$ car $f(n) \in E$
donc $\alpha_0 \in A \neq \emptyset$

b) $\forall n \in A$ $n \leq \alpha$ donc $f(n) \leq f(\alpha)$ car f croissante

Comme $n \in A: n \leq f(n)$, par transitivité;

(3)

$$\underline{n \leq f(n)}$$

d'o: $f(n)$ majore A

c) α + petit des majorants donc $\alpha \leq f(\alpha): \boxed{\alpha \in A}$

d) on a $\alpha = \sup A$. Comme $\alpha \leq f(\alpha)$, $f(\alpha) \leq f(f(\alpha))$
(f croissante)

donc $f(\alpha) \in A$ d'où $f(\alpha) \leq \alpha$

car $\alpha \leq f(\alpha)$ et $f(\alpha) \leq \alpha$ d'o: $\boxed{f(\alpha) = \alpha}$

voir 2')

e) $[0, 1]$ avec l'ordre usuel $\leq$ est un trichotomique complet

or f est croissante de $E = [0, 1]$ dans E (somme de fonctions croissantes ou avec la dérivée)

$$\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline f & \frac{47}{60} \leq 1 \\ & \frac{1}{3} \geq 0 \end{array}$$

d'o: $\boxed{f \text{ admet un pt fixe de } [0, 1]}$

5) Soit $\mathcal{A} \subset E = \mathcal{P}(X)$, on montre (faites l'1) comme au I 2) que $\sup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ et $\inf \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$.

II.1.1. $\ast B_1'(t) = 1 \cdot B_0(t) = 1$ donc $B_1(t) = t + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 B_1(t) dt = \int_0^1 (t + \alpha) dt = \frac{1}{2} + \alpha = 0 \quad \text{d'où} \quad \alpha = -\frac{1}{2}$$

csq : $B_1(t) = t - \frac{1}{2}$

$\ast B_2'(t) = 2(t - \frac{1}{2}) = 2t - 1$ donc $B_2(t) = t^2 - t + \alpha$
 $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 B_2(t) dt = \int_0^1 (t^2 - t + \alpha) dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{6}$$

csq : $B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$

de la même manière : $B_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{t}{2}$

II.1.2. $b_0 = 1, b_1 = -\frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{6}, b_3 = 0$
 $B_0(1) = 1, B_1(1) = \frac{1}{2}, B_2(1) = \frac{1}{6}, B_3(1) = 0$ } donc égaux
sur $n=1$.

II.1.3. $\forall p \geq 1 \quad 0 = \int_0^1 B_p(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{p+1} B_{p+1}'(t) dt$
 $= \frac{1}{p+1} (B_{p+1}(1) - B_{p+1}(0))$

d'où $\forall q \geq 2 \quad B_q(0) = B_q(1)$

(7)

II.2.1] i) $\tilde{\beta}_0(t) = (-1)^0 \beta_0(1-t) = 1$

ii) $\tilde{\beta}'_p(t) = (-1)^p \beta'_p(1-t) \times (-1)$
 $= (-1)^{p-1} p \beta_{p-1}(1-t)$
 $= p \tilde{\beta}_{p-1}(t)$

et $\int_0^1 \tilde{\beta}_p(t) dt = (-1)^p \int_0^1 \beta_p(1-t) dt$. Effectuons

le changement de variable : $1-t=u$ ($-dt=du$) :

$$\int_0^1 \tilde{\beta}_p(t) dt = (-1)^p \int_1^0 \beta_p(u) (-du) = -0 \times (-1)^p = 0$$

d1 : $\boxed{(\tilde{\beta}_p) \text{ satisfait (i) et (ii)}}$

Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N} \quad \tilde{\beta}_p = \beta_p$

- vrai pour $p=0$

- si $\tilde{\beta}_{p-1} = \beta_{p-1}$ alors $\tilde{\beta}'_p = \beta'_p$ donc : $\exists c \in \mathbb{R}$

$$\tilde{\beta}_p = \beta_p + c \quad \text{d'où} \quad \int_0^1 \tilde{\beta}_p = \int_0^1 \beta_p + \int_0^1 c = 0 = 0 + c \Rightarrow \underline{c=0}$$

c) q : $\underline{\tilde{\beta}_p = \beta_p}$

d2 : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \quad \tilde{\beta}_p = \beta_p}$

II 2.2] on a $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $B_{2p+1}(t) = -B_{2p+1}(1-t)$ ⑧

d'où à $t=0$ on a $B_{2p+1}(0) = -B_{2p+1}(1)$ et
comme $2p+1 \geq 2$ avec le II 13 on a :

$$B_{2p+1}(0) = -B_{2p+1}(0) \text{ d'où } \boxed{B_{2p+1}(0) = b_{2p+1} = 0}$$

II 3.1] Effectuons une Intégration/Partie (I.P.P.) :

$$\int_0^1 \underbrace{B_1(t)}_u \underbrace{f'(t)}_{v'} dt = \left[B_1(t) f(t) \right]_0^1 - \int_0^1 B_1'(t) f(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} f(1) + \frac{1}{2} f(0) - \int_0^1 f(t) dt$$

$$\text{d'où } \boxed{\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} (f(0) + f(1)) - \int_0^1 B_1(t) f'(t) dt}$$

II 3.2] Montrons cette égalité par récurrence sur n .

* Pour $n=2$:

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{B_2(t)}{2}}_u \underbrace{f''(t)}_{v'} dt = \left[\frac{B_2(t)}{2} f'(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{B_2'(t)}{2} f'(t) dt \quad (\text{I.P.P.})$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{B_2(t)}{2} f''(t) dt = \frac{b_2}{2} (f'(1) - f'(0)) - \int_0^1 B_1(t) f'(t) dt$$

$$= \text{---} - \left[\frac{1}{2} (f(0) + f(1)) - \int_0^1 f(t) dt \right]$$

d'où $\frac{1}{2} (f(0) + f(1)) = \int_0^1 f(t) dt + (-1)^2 \frac{b_2}{2!} (f'(1) - f'(0)) + (-1)^3 \int_0^1 \frac{B_2(t)}{2} f''(t) dt$

c'est pile H_2 !

⑨

Supposons H_{n-1} vraie, alors on a I.P.P. :

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{B_n(t)}{n!}}_u \underbrace{f^{(n)}(t)}_{v'} dt \stackrel{\text{I.P.P.}}{=} \left[\frac{B_n(t)}{n!} f^{(n-1)}(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{B_n'(t)}{n!} f^{(n-1)}(t) dt$$

$$= \frac{b_n}{n!} (f^{(n-1)}(1) - f^{(n-1)}(0)) - \int_0^1 \frac{B_{n-1}(t)}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t) dt$$

D'autre part H_{n-1} donne :

$$\frac{1}{2} (f(0) + f(1)) = \int_0^1 f(t) dt + \sum_{p=2}^{n-1} (-1)^p \frac{b_p}{p!} (f^{(p-1)}(1) - f^{(p-1)}(0))$$

$$+ (-1)^n \underbrace{\int_0^1 \frac{B_{n-1}(t)}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t) dt}_u$$

$$= \int_0^1 f(t) dt + \sum_{p=2}^{n-1} (-1)^p \frac{b_p}{p!} (f^{(p-1)}(1) - f^{(p-1)}(0))$$

$$+ (-1)^n \left[\frac{b_n}{n!} (f^{(n-1)}(1) - f^{(n-1)}(0)) - \int_0^1 \frac{B_n(t)}{n!} f^{(n)}(t) dt \right]$$

$$= \int_0^1 f(t) dt + \sum_{p=2}^n \frac{b_p}{p!} (f^{(p-1)}(1) - f^{(p-1)}(0)) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{B_n(t)}{n!} f^{(n)}(t) dt$$

c'est "pile" H_n !

Il s'agit d'égalité et vraie pour tout $n \geq 2$

II.3.3] L'égalité demandée découle directement de : (10)
 * l'égalité de II.3.2, * $(-1)^{q+1} = (-1)^{2h+1} = -1$, * $b_{2p+1} = 0, \forall p \geq 1$

II.4.1] Posons $p = \lfloor t \rfloor$, $p+1 \leq t+1 < p+1+1$ et comme $p+1 \in \mathbb{Z}$, $\lfloor t+1 \rfloor = \lfloor t \rfloor + 1$.

On en déduit :

$$\mathcal{D}_p(t+1) = B_p(t+1 - (\lfloor t \rfloor + 1)) = B_p(t - \lfloor t \rfloor) = \mathcal{D}_p(t)$$

$\mathcal{D}_p$ est 1-périodique

* $\forall t \in [0, 1[$ $\mathcal{D}_p(t) = B_p(t)$ donc $\mathcal{D}_p$ est C^∞ sur $]0, 1[$

et $\mathcal{D}_p$ admet des dérivées à droite à toutes ordres

$$\text{en } 0 : (\mathcal{D}_p)^{(h)}_d(0) = B_p^{(h)}(0)$$

$\forall t \in [-\frac{1}{2}, 0[$ $\mathcal{D}_p(t) = B_p(t+1)$ donc $\mathcal{D}_p^{(h)}$ admet

une limite, pour tout h , en 0 à gauche : $\lim_{t \nearrow 0} \mathcal{D}_p^{(h)}(0) = B_p^{(h)}(1)$

$\mathcal{D}_p$ est C^∞ par morceaux sur $\mathbb{R}$

II.4.2] f_q est C^∞ sur $[0, 1)$ comme composée de fonction C^∞ .

$$\text{Et } \forall q \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad f_q^{(m)}(t) = f^{(m)}(t+q-1)$$

$$\text{donc } f_1^{(m)}(0) = f^{(m)}(0+1-0) = f^{(m)}(1)$$

$$f_q^{(m)}(0) = f^{(m)}(q-1) = f^{(m)}(0+q-1) = f_{q-1}^{(m)}(0)$$

$$f_N^{(m)}(1) = f^{(m)}(1+N-1) = f^{(m)}(N)$$

$$\text{cf } \boxed{f_1^{(m)}(0) = f^{(m)}(0), f_q^{(m)}(0) = f_{q-1}^{(m)}(1), f_N^{(m)}(1) = f^{(m)}(N)}$$

II.4.3] Appliquons la formule (1) à $f_1, \dots, f_N$ et
sommons ces égalités: $\hookrightarrow$ voir II.3.3

$$\sum_{q=1}^N \frac{1}{2} [f_q(0) + f_q(1)] = \sum_{q=1}^N \int_0^1 f_q(t) dt + \sum_{q=1}^N \sum_{p=1}^h \frac{b_{2p}}{(2p)!} \left(f_q^{(2p-1)}(1) - f_q^{(2p-1)}(0) \right) \\ - \sum_{q=1}^N \int_0^1 \frac{B_{2k}(t)}{(2k)!} f_q^{(2k)}(t) dt$$

or (*) $\sum_{q=1}^N \frac{1}{2} (f_q(0) + f_q(1)) = \sum_{q=1}^N \frac{1}{2} f(q-1) + \sum_{q=1}^N \frac{1}{2} f(q)$
 $= \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{N-1} f(q) + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^N f(q) = \frac{1}{2} f(0) + \sum_{q=1}^{N-1} f(q) + \frac{1}{2} f(N)$

(*) $\sum_{q=1}^N \int_0^1 f_q(t) dt = \sum_{q=1}^N \int_0^1 f(t+q-1) dt = \sum_{q=1}^N \int_{q-1}^q f(u) du$
 $= \int_0^N f(u) du$ (Rel. de Chasles) (changement de variable $t+q-1=u$)

(*) $\sum_{q=1}^N \sum_{p=1}^h \frac{b_{2p}}{(2p)!} (f_q^{(2p-1)}(1) - f_q^{(2p-1)}(0)) = \sum_{p=1}^h \frac{b_{2p}}{(2p)!} \sum_{q=1}^N (f_q^{(2p-1)}(1) - f_{q-1}^{(2p-1)}(1))$
 $\hookrightarrow$

$$\text{et } \sum_{q=1}^N \alpha_q - \alpha_{q-1} = \underbrace{\alpha_1 - \alpha_0}_{\text{1}} + \underbrace{\alpha_2 - \alpha_1}_{\text{2}} + \underbrace{\alpha_3 - \alpha_2}_{\text{3}} + \dots + \underbrace{\alpha_N - \alpha_{N-1}}_{\text{N}} \quad (12)$$

$$= \alpha_N - \alpha_0 \quad \text{que l'on applique avec:}$$

$$\alpha_q = f^{(2p-1)}_q(1) \quad \text{donc ;}$$

$$\sum_{q=1}^N \sum_{p=1}^h \frac{b_{2p}}{(2p)!} \left(f^{(2p-1)}_q(1) - f^{(2p-1)}_q(0) \right) = \sum_{p=1}^h \frac{b_{2p}}{(2p)!} \left(f^{(2p-1)}(N) - f^{(2p-1)}(0) \right)$$

$$(*) \quad \sum_{q=1}^N \int_0^1 \frac{\beta_{2h}(t)}{(2h)!} f^{(2h)}_q(t) dt = \sum_{q=1}^N \int_0^1 \frac{\beta_{2h}(t)}{(2h)!} f^{(2h)}(t+q-1) dt$$

$$= \sum_{q=1}^N \int_{q-1}^q \frac{\beta_{2h}(u-(q-1))}{(2h)!} f^{(2h)}(u) du \quad \text{cdv : } t+q-1=u$$

$$\text{or } \forall u \in [q-1, q[\quad \beta_{2h}(u-(q-1)) = \beta_{2h}(u-E(u)) = D_{2h}(u)$$

$$\text{donc } \sum_{q=1}^N \int_0^1 \frac{\beta_{2h}(t)}{(2h)!} f^{(2h)}_q(t) dt = \int_0^N \frac{D_{2h}(u)}{(2h)!} f^{(2h)}(u) du$$

↑ avec Rel. de Runge

on revient à 4 étoiles $(*)_{1 \leq i \leq 4}$ qui donne E. 10-2 :

$$\frac{1}{2} f(0) + \sum_{q=1}^{N-1} f(q) + f(1) = \int_0^1 f(t) dt + \sum_{p=1}^h \frac{b_{2p}}{(2p)!} \left(f^{(2p-1)}(N) - f^{(2p-1)}(0) \right) - \int_0^N \frac{D_{2h}(t)}{(2h)!} f^{(2h)}(t) dt$$