DM 1
Électronique, physique statistique

Exercice 1 : Effets de moyenne en électronique

I – Préliminaires

Le développement en série de Fourier d'une fonction périodique $f(t)$ peut parfois s'obtenir à l'aide de formules trigonométriques simples. On rappelle la formule de linéarisation suivante :

$$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

Q.1 On considère la fonction périodique $f(t) = \cos(\omega t)\ \cos(\omega t + \varphi)$.
a) Déterminer son développement en série de Fourier et préciser la pulsation fondamentale et les harmoniques éventuels.
b) Que vaut alors la valeur moyenne $< f(t) >$ de ce signal ?

Q.2 On considère maintenant la somme de deux sinusoïdes de même pulsation ω, présentant entre elles un déphasage φ : $g(t) = A\cos(\omega t) + B\cos(\omega t + \varphi)$. Exprimer la moyenne $< g^2(t) >$ du carré de cette somme.

Q.3 On considère deux sinusoïdes de pulsations différentes : ω et Ω. On note $p(t) = \cos(\omega t)\cos(\Omega t + \varphi)$ leur produit et $s(t) = A\cos(\omega t) + B\cos(\Omega t + \varphi)$ leur somme.
a) Exprimer la moyenne $< p(t) >$ du produit de ces deux sinusoïdes.
b) En déduire la moyenne $< s^2(t) >$ du carré de la somme.

II – Effets de moyenne en électrocinétique

Une tension périodique $v(t) = V_0\cos^2(\omega t)$ est appliquée à l'entrée d'un circuit RC série.

Q.4 Démontrer que la tension $u(t)$ mesurée aux bornes du condensateur de capacité C est solution de l'équation différentielle :

$$u + \tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}V_0 + \frac{1}{2}V_0\cos(2\omega t)$$

et préciser l'expression de la constante de temps τ en fonction de R et de C.

La solution de cette équation différentielle en régime forcé (ou établi) peut s'écrire comme la somme des solutions particulières des équations différentielles suivantes :

$$u + \tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}V_0 \quad \text{et} \quad u + \tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}V_0\cos(2\omega t)$$

Q.5 Déterminer la solution en régime établi pour la première équation.

Q.6 A l'aide de la notation complexe, préciser la solution de la deuxième équation en régime établi. Écrire cette solution sous forme réelle et démontrer qu'elle a une amplitude qui tend vers zéro lorsque $RC \gg \dfrac{1}{2\omega}$.

Q.7 Dans le cas où $\omega = 100\pi\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, déterminer la condition, concernant la résistance R, qui permet d'obtenir, en régime établi, aux bornes d'un condensateur de capacité $C = 100\,\mu\mathrm{F}$, une tension telle que l'ondulation ait une amplitude inférieure au centième de la composante continue.

Q.8 Donner l'expression de la solution réelle complète pour $u(t)$ dans le cas général, en supposant que le condensateur ne porte aucune charge à l'instant $t = 0$.

III – Détection synchrone

Un signal harmonique $v(t) = V_0 \cos(\omega t)$ dont on veut mesurer l'amplitude est bruité par un signal parasite $u(t) = U_0 \cos(\Omega t + \varphi)$ de fréquence différente. Alors, la mesure effectivement obtenue se trouve être égale à la somme : $s(t) = V_0 \cos(\omega t) + U_0 \cos(\Omega t + \varphi)$.

Q.9 Au moyen de procédés électroniques connus, on multiplie dans un premier temps le signal $s(t)$ par un signal auxiliaire synchrone au signal d'intérêt : $w(t) = W_0 \cos(\omega t + \phi)$ puis on effectue la moyenne du produit obtenu. Exprimer cette moyenne $\mu = < s(t) \cdot w(t) >$.

Q.10 Pour conclure, on règle à 2 V l'amplitude du signal auxiliaire puis l'on fait varier son déphasage ϕ jusqu'à obtenir une moyenne maximale. Pour quelle valeur de ϕ ce maximum est-il atteint ? Quelle est sa relation avec l'amplitude recherchée ?

Exercice 2 : Contribution électronique à la capacité thermique d'un gaz

La capacité thermique d'un gaz est la somme de contributions provenant des énergies de translation, de rotation et de vibration des molécules, mais également de l'énergie des électrons.

Les niveaux d'énergie électroniques de l'atome d'hydrogène sont donnés par : $E_n = -\dfrac{13.6}{n^2}$ eV avec n un entier supérieur ou égal à 1.

Q.1 Quelle est la différence d'énergie Δ entre l'état fondamental et le niveau excité ?

Q.2 Le niveau d'énergie E_n comporte $2n^2$ états quantiques différents (sa dégénérescence est $g_n = 2n^2$). Chaque état quantique étant peuplé par l'agitation thermique en suivant la loi de Boltzmann, calculer le rapport $\dfrac{N_2}{N_1}$ du nombre d'atomes d'hydrogène dans le premier niveau sur le nombre d'atomes au niveau fondamental, à l'équilibre à la température $T = 298\,\mathrm{K}$.

Q.3 Quelle est alors l'influence des niveaux d'énergie électroniques sur la capacité thermique de l'hydrogène atomique à température ordinaire ?

La plupart des atomes ont, comme l'atome d'hydrogène, des niveaux d'énergie électroniques trop élevés pour qu'ils soient peuplés par l'agitation thermique aux température ordinaires. Les atomes halogènes font exception : l'atome de chlore possède un niveau électronique fondamental de dégénérescence $g_1 = 4$ et un premier niveau d'énergie de dégénérescence $g_2 = 2$ dont la différence d'énergie est $\Delta = 0{,}109\,\mathrm{eV}$ seulement. On ne tiendra compte dans la suite que de ces deux niveaux d'énergie.

Q.4 Calculer le rapport $\dfrac{N_2}{N_1}$ du nombre d'atomes de chlore dans le premier niveau sur le nombre d'atomes au niveau fondamental, à l'équilibre à la température $T = 298\,\mathrm{K}$. On prendra l'énergie du niveau fondamental nulle.

Q.5 Exprimer, en fonction de Δ et $k_B T$, l'énergie électronique moyenne $\langle E_{el} \rangle$ d'un atome de chlore en équilibre avec un thermostat à la température T.

Q.6 En déduire la contribution, notée C_m^{el}, de l'énergie électronique à la capacité thermique molaire du chlore gazeux. Exprimer cette contribution en fonction de R, T et $\Theta_{el} = \dfrac{\Delta}{k_B}$.

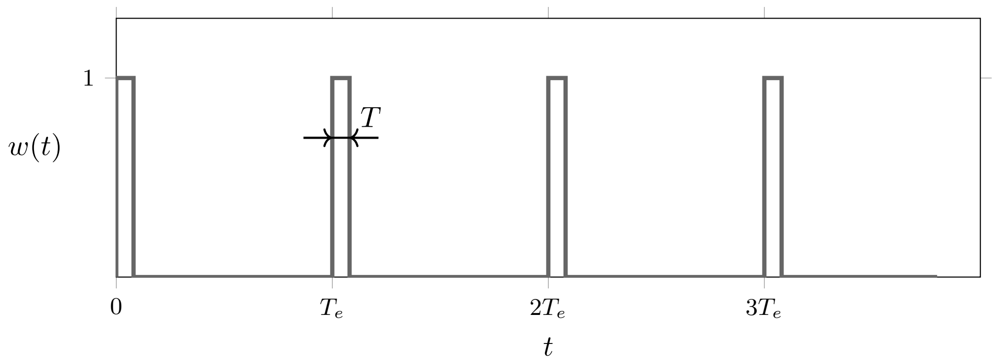
Q.7 Tracer l'évolution de C_m^{el} en fonction de T/Θ_{el}. Verifier que C_m^{el} passe par un maximum pour $T_m \approx 0,45\Theta_{el}$ et calculer numériquement Θ_{el} et $C_m^{el}(T_m)$.

Exercice 3 : Échantillonnage d'un signal électronique (facultatif)

On note $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ un signal sinusoïdal de fréquence f_0 que l'on cherche à numériser. Nous étudierons plus particulièrement l'une des étapes de la numérisation, appelée l'échantillonnage, qui consiste à prélever un ensemble de valeurs prises à des instants discrets.

Q.1 On s'intéresse tout d'abord à l'opération consistant à multiplier le signal $x(t)$ par la fonction $p(t) = \cos(2\pi f_1 t)$, de fréquence $f_1 > f_0$. Représenter sur un même diagramme les spectres respectifs des signaux $x(t)$ et $x_e(t) = x(t) \times p(t)$.

On cherche maintenant à échantillonner le signal $x(t)$. Pour cela, on introduit la fonction périodique $w(t)$ représentée ci-dessous. On considère que $T \ll T_e$, ainsi le signal $x_e(t) = x(t) \times w(t)$ n'est différent de zéro que sur des intervalles de temps très courts assimilables à des instants discrets $t_k = kT_e$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Pour chacun de ces instants, on a $x_e(t_k) = x(t_k)$. On dit que $x_e(t)$ constitue un échantillonnage du signal $x(t)$ et on appelle fréquence d'échantillonnage la grandeur $f_e = 1/T_e$.



Q.2 Représenter le signal $x_e(t)$ pour $f_e = 4f_0$, $f_e = 2f_0$ et $f_e = \frac{4}{3}f_0$. Montrer qualitativement que, dans l'un des cas, le signal échantillonné n'est pas représentatif du signal analogique de départ.

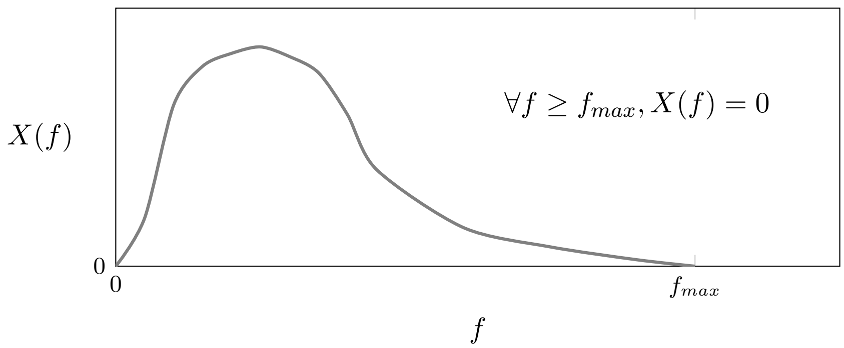
Du fait de sa périodicité, le signal $w(t)$ est décomposable en série de Fourier, de la forme

$$w(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f_e t)$$

Q.3 Représenter, par analogie avec la première question, le spectre du signal $x_e(t) = x(t) \times w(t)$ pour $f_e = 4f_0$ puis $f_e = \frac{4}{3}f_0$ (on se limitera aux valeurs de k telles que $0 \leq k \leq 2$). Montrer que, dans l'un des cas, les motifs fréquentiels se chevauchent (on parle de repliement de spectre). En considérant seulement la fenêtre fréquentielle $[0, f_e]$, indiquer autour de quelle fréquence a lieu le repliement.

Q.4 En s'inspirant des questions 2 et 3, proposer une relation entre f_e et f_0 permettant d'assurer un bon échantillonnage du signal $x(t)$. Cette relation est appelée *critère de Shannon-Nyquist*.

On considère dorénavant un signal temporel $X(t)$ dont le spectre en fréquence $X(f)$, représenté ci-dessous, fait apparaître une fréquence maximale f_{max}.



Q.5 Que devient le critère de Shannon-Nyquist dans cette situation ? Représenter le spectre du signal échantillonné selon que ce critère soit ou non vérifié. Pour un signal sonore audible, proposer des valeurs raisonnables de f_{max} et f_e.

Q.6 Sur l'exemple de la question précédente montrer que, lorsque le critère de Shannon-Nyquist est vérifié, un filtrage approprié permet de retrouver le signal analogique de départ. On donnera les caractéristiques du filtre à utiliser.

Q.7 La durée d'enregistrement d'un CD audio est de $\Delta t = 75\,\text{min}$. L'échantillonnage se fait à une fréquence $f_e = 44{,}1\,\text{kHz}$ et avec résolution de 16 bits. De plus, l'enregistrement est fait sur deux voies séparées en stéréo. Déterminer la taille minimale du fichier musical. On donnera le résultat en mégaoctets (Mo), un octet correspondant à 8 bits.