II. POLYNÔMES-ANNEAUX-ARITHMÉTIQUE DES POLYNÔMES : tout

POLYNÔMES : Tout le programme de colle n°1+

Polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$.

• Factorisation dans $\mathbb{K}[X]$,

Relation coefficients-racines.

ANNEAUX-ARITHMÉTIQUE DES POLYNÔMES

Anneaux - sous anneaux - morphismes d'anneaux - groupe des éléments inversibles.
Idéaux d'un anneau.
Divisibilité dans un anneau commutatif et intègre.
ARITHMÉTIQUE DES POLYNÔMES :

• **Théorème fondamental de structure des idéaux de $\mathbb{K}[X]$** :

Idéaux de $\mathbb{K}[X]$: ils sont tous de la forme $P_0\mathbb{K}[X]$ avec P_0 unique et normalisé

PGCD et PPCM :
Soit $A_1,\dots,A_n$, n polynômes de $\mathbb{K}[X]$.
• On appelle **PGCD** de $A_1,\dots,A_n$ le **générateur normalisé** de l'idéal $A_1\mathbb{K}[X]+\cdots+A_n\mathbb{K}[X]$. Notation : $D = A_1\wedge\cdots\wedge A_n$.
On a donc $A_1\mathbb{K}[X]+\cdots+A_n\mathbb{K}[X] = D\mathbb{K}[X]$.
• On a pour tout $P\in\mathbb{K}[X]$, $[\ \forall i\in[\![1,n]\!] : P|A_i \iff P|D\ ]$
• On appelle **PPCM** de $A_1,\dots,A_n$ le **générateur normalisé** de l'idéal $A_1\mathbb{K}[X]\cap\cdots\cap A_n\mathbb{K}[X]$. Notation : $M = A_1\vee\cdots\vee A_n$.
On a donc $A_1\mathbb{K}[X]\cap\cdots\cap A_n\mathbb{K}[X] = M\mathbb{K}[X]$.
• On a pour tout $P\in\mathbb{K}[X]$, $[\ \forall i\in[\![1,n]\!] : A_i|P \iff M|P\ ]$
On retrouve donc bien lorsque $n=2$, les définitions de MPSI.
Bezout - Gauss
Résolution **complète** de l'équation $AU+BV=C$.

Polynôme d'interpolation de Lagrange :

• Connaitre par coeur la formule $L=\sum_{i=1}^{n} b_i \prod_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{X-a_j}{a_i-a_j}$, sa démonstration et la détermination de tous les polynômes P en fonction de L tels que pour tout $i\in[1,n]$, $P(a_i)=b_i$.

2. COURS ET EXERCICES SUR LE DÉNOMBREMENT

1. **Cardinal d'un ensemble fini**
   • Si $f : X \longrightarrow Y$ avec $|X|=|Y|$ alors
   $[f$ est bijective$] \iff [f$ est injective$] \iff [f$ est surjective$]$ **et sa démonstration**.
   Opération sur les ensembles finis : Soient E et F deux ensembles finis.
   (a) Si $E\cap F=\emptyset$ (on dit que E et F sont disjoints) alors : $\mathrm{Card}(E\cup F)=\mathrm{Card}E+\mathrm{Card}F$.
   Généralisation : si $A_1, A_2, ..., A_p$ sont des parties de E, 2 à 2 disjointes, alors
   $\mathrm{Card}(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_p)=\mathrm{Card}A_1+\mathrm{Card}A_2+\cdots+\mathrm{Card}A_p$.
   (b) • $\mathrm{Card}(E\cup F)=\mathrm{Card}E+\mathrm{Card}F-\mathrm{Card}(E\cap F)$ **et sa démonstration**.
   (c) $|E\times F|=|E|\cdot|F|$, généralisation avec $|E_1\times E_2\times ...\times E_p|$
2. **p-listes** :
   Soit E un ensemble fini, et $p\in\mathbb{N}^*$.
   Définition : Une p-liste de E (ou un p-uplet) est un élément de E^p
   Si $\mathrm{Card}E=n$, nombre de p-listes de E et **conséquence** : $|\mathcal{F}(E,F)|$.
   Si $\mathrm{Card}E=n$, et $p\leqslant n$, nombre de p-listes d'éléments distincts de E.
   On note parfois ce nombre A_n^p et on parle d'arrangements de E.
   conséquence : Nombre d'applications injectives de X_p à p éléments dans Y_n à n éléments.
   A savoir : pour $n\geqslant 1$, $A_n^p=n(n-1)\cdots(n-p+1)$.
   Permutation de n éléments , nombre de permutations de n éléments.
3. **Combinaisons** :

(a) Si Card$E = n$, nombre de parties à p éléments (distincts) de E notation $\binom{n}{p}$.

$\boxed{\bullet}$ Formule de Pascal **et sa démonstration (que) combinatoire** .

Formule du binôme de Newton **et sa démonstration (récurrence ou combinatoire)**

$\boxed{\bullet}$ Formule de Vandermonde **et sa démonstration** :

$$\forall (a, b, n) \in \mathbb{N}^3 \quad : \quad \binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}$$

4. **Applications faites en classe à savoir refaire**

(a) Si X_p a p éléments et Y_n n éléments, nombre des applications strictement croissantes de X_p dans Y_n.

(b) Si X_p a p éléments et Y_n n éléments, alors le nombre des applications croissantes de X_p dans Y_n.

(c) $|S|$ avec $S = \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tel que $x_1 + \cdots + x_p = n\}$.
Nombre de façons de ranger k boules indiscernables dans b boites discernables.

1. EXERCICES SUR LE DÉNOMBREMENT

Tous les nombres et cardinaux usuelles.
On a fait notamment en classe :
- les dérangements,
- les surjections,
- le poker,
- le nombre de couples (A, B) tels que $A \cup B = E$ où $|E| = n$.

Prévisions : Suites réelles et complexes.