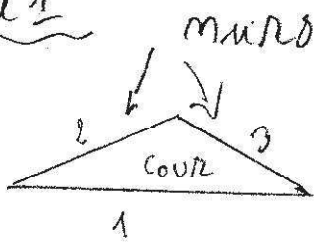


exercice 1

1 i)

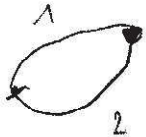


$$\pi_{3,p}$$

$$= p(p-1)(p-2)$$

choix du 2^{ème} mur
choix de la couleur du 1^{er} mur
3^{ème} mur

et

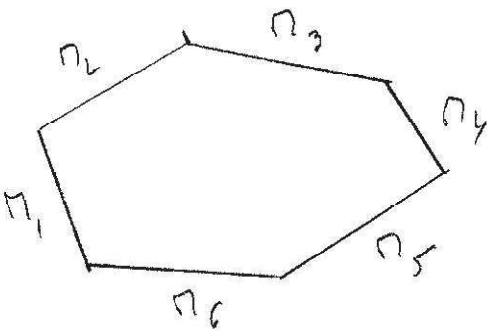


$$\pi_{2,p} = p(p-1)$$

d'

$$\boxed{\pi_{2,p} = p(p-1) \text{ et } \pi_{3,p} = p(p-1)(p-2)}$$

ii)



On souhaite évaluer $\pi_{6,p}$:
notons C_i la couleur du mur n_i .

1^{er} cas : $C_1 \neq C_5$, on pourrait "joindre" n_1 et n_5 :

on obtient une couronne fermée à 5 murs, donc $\pi_{5,p}$ façons de peindre ces 5 murs. Le 6^{ème} mur peut donc être peint avec n'importe quelle couleur mais $\neq$ de C_1 et C_5 : il reste $p-2$ couleurs donc $(p-2)\pi_{5,p}$ pour le 1^{er} cas.

2^{ème} cas : $C_1 = C_5$, alors $C_1 \neq C_6$, on peut "joindre" n_1 et n_4 et il reste $p-1$ couleurs pour n_6 d'où $(p-1)\pi_{4,p}$

le cas général est absolument identique ($\delta = m+2$) ②

$$d' : \boxed{\pi_{m+2,p} = (p-2)\pi_{m+1,p} + (p-1)\pi_{m,p}}$$

iii) On reconnaît une suite récurrente linéaire double, donc

$$r^2 - (p-2)r - (p-1) = 0$$

racine évidente : -1 et avec le produit des racines :

l'autre racine est $p-1 \neq -1$, d'où

$$\forall m \geq 2 : \pi_{m,p} = \lambda(-1)^m + \mu(p-1)^m$$

$$\text{comme } \begin{cases} \pi_{2,p} = p(p-1) = \lambda + \mu(p-1)^2 \\ \pi_{3,p} = p(p-1)(p-2) = -\lambda + \mu(p-1)^3 \end{cases}$$

$$\text{on a } p(p-1) + p(p-1)(p-2) = \mu[(p-1)^2 + (p-1)^3]$$

$$\text{soit } p + p(p-2) = \mu(p-1 + (p-1)^2) = \mu(p^2 - p)$$

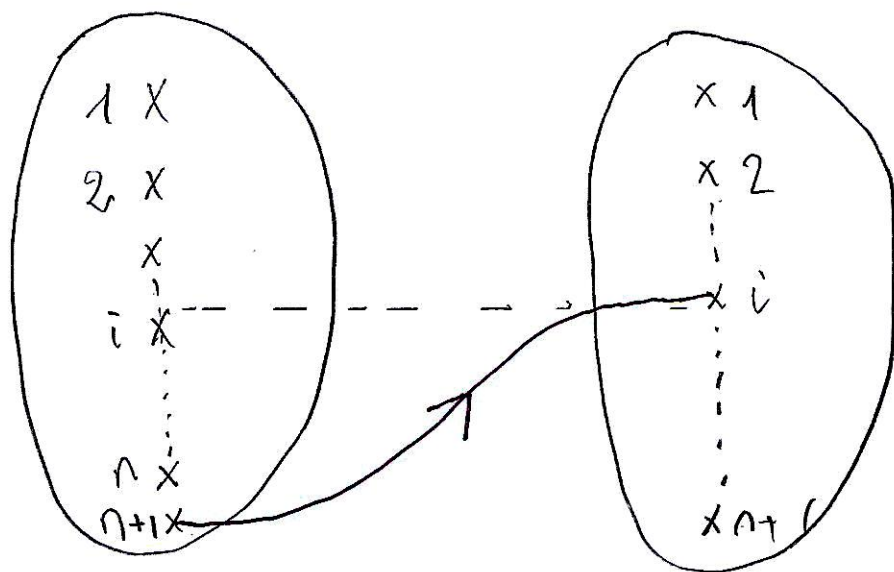
$$\text{donc } \mu = 1 \quad \text{d'où } \lambda = p(p-1) - (p-1)^2 = p-1$$

$$d'' : \boxed{\forall m \geq 2, \forall p \geq 2 : \pi_{m,p} = (p-1)(-1)^m + (p-1)^m}$$

exercice 2

①

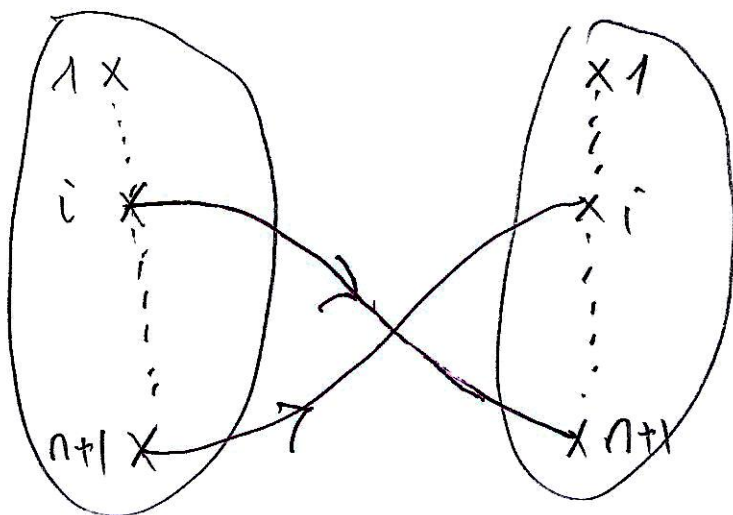
1)



$$\sigma(n+1) = i \neq n+1$$

On "voit" 2 cas : $\sigma(i) = n+1$ ou $\sigma(i) = j \neq n+1$ (et $\neq i$)

1^{er} cas : $\sigma(n+1) = i$ et $\sigma(i) = n+1$



d'abord il y a
n choix pour
 $\sigma(n+1)$

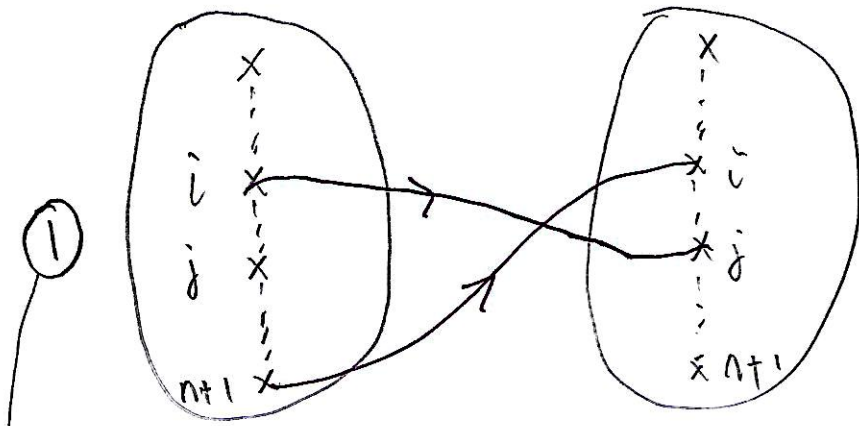
Si considère la restriction de σ sur :

$\llbracket 1, n+1 \rrbracket - \{i, n+1\}$ (on "supprime" les 2 éléments)

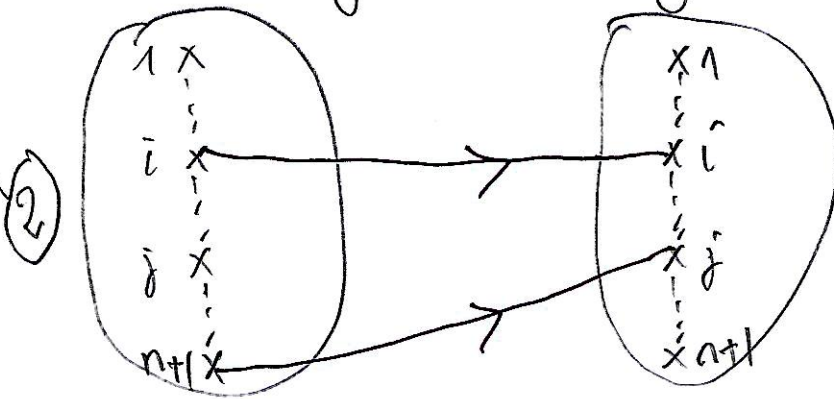
cette restriction doit être sans point fixe, comme il y a $n-1$ elt, le nb de σ du 1^{er} cas est : $n \cdot D_{n-1}$

2^{ème} cas : $\sigma(n+1) = i$ et $\sigma(i) = j \neq n+1$

②



L'idée échanger les images de i et $n+1$:



les autres
étant
inchangés.

On associe donc bijectivement la situation ① à la situation ②. On la situation de ② est une bijection sans pt fixe de $[1, n+1] - \{i\}$.

Il y en a donc $\mathcal{D}_n$, comme il y a toujours

n choix pour $\sigma(n+1)$, le nb de 2^{ème} cas est : $\boxed{n \mathcal{D}_n}$

$$\text{d'où } \boxed{\mathcal{D}_{n+1} = n(\mathcal{D}_n + \mathcal{D}_{n-1})}$$

transposition $i-j$

rem. Rigoureusement la bijection ①-② : $\sigma \mapsto (i j) \circ \sigma$

2) Par récurrence :

(3)

$$D_1 = 0 \text{ et } D_2 = 1, \text{ donc } D_2 = 2 \times D_1 + (-1)^2$$

c'est donc vraie pour $n=2$.

Si c'est vraie pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= n D_n + n D_{n-1} \\ &= n D_n + D_n - (-1)^n \\ &= (n+1) D_n + (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{d } \boxed{\forall n \geq 2, D_n = n D_{n-1} + (-1)^n}$$

3) Divisons la relation de 2) par $n!$:

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!} \quad \text{sommons de 2 à } N:$$

$$\sum_{n=2}^N \left(\frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} \right) = \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^n}{n!} \quad \text{somme télescopique}$$

$$\frac{D_N}{N!} - \frac{D_1}{1!} = \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^n}{n!} \quad ; \quad \frac{D_N}{N!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^N}{N!}$$

$$d^o \quad \boxed{D_n = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)} \quad \forall n \geq 2 \quad (4)$$

$$(ex: D_3 = 2, D_4 = 9, D_5 = 44 \dots)$$

4) On a immédiatement :

$$P_n = \frac{D_n}{n!} \quad (\text{nb de cas favorables / nb de cas possibles})$$

$$\text{Etudions } S_n = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!} \quad (= p_n)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

on reconnaît la partie
"Taylor" du DL de exp.

Avec I.T.L.,

$$|e - S_n| \leq \frac{(-1-0)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [-1, 0]} |e^{(n+1)t}| = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Par T.E., on conclut :

$$\boxed{\lim p_n = \frac{1}{e} \simeq 0,367 \dots}$$

exercice 3

①

a) Avec I.T.L. pour $\sin$ entre 0 et π

$$\text{l'ordre 2 : } \forall n \in \mathbb{R}^* \quad \left| \sin n - \underbrace{\left(0 + n + 0 \frac{n^2}{2}\right)}_{\text{partie Taylor}} \right| \leq \frac{|n|^3}{3!} \pi_3 /$$

$$\text{avec } \pi_3 = \sup_{t \in [0, \pi]} |\sin''' t|, \text{ or } \sin''' = -\cos, \text{ donc}$$

$$\pi_3 \leq 1, \text{ comme } n > 0, \frac{|n|^3}{3!} = \frac{n^3}{6}$$

$$\text{d'où } \boxed{\forall n > 0 : |\sin n - n| \leq \frac{n^3}{6}}$$

b) On utilise le a) pour $n = \frac{1}{n+k} > 0$, puis on somme de $k=1$ à n :

$$\forall n \geq 1 \quad k \in [1, n] \quad \left| \sin \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k} \right| \leq \frac{1}{6(n+k)^3}$$

$$\text{d'où } \left| \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k} \right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \sin \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k} \right|$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{//} \\ |u_n - v_n|$$

↑
Inégalité triangulaire

$$\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{6(n+k)^3}$$

$$\text{avec } v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

cqs $\forall n \geq 1 \quad |u_n - v_n| \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{6(n+k)^3}$ (2)

$$\leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nb de} \\ \text{termes}}}{n} \times \frac{1}{\underbrace{6(n+1)^3}_{\substack{+ \text{ grand} \\ \text{terme}}}} \quad (\text{"Ticket de caisse"})$$

on $\frac{n}{6(n+1)^3} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{6n^3} \sim \frac{1}{6n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{T.E.})$

d'où, par T.E., $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

2) à stade on ne sait toujours pas si (u_n) cvg!

Mais (fait en classe):

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{somme de Riemann}} \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2$$

D'où, par T.G., $v_n = (u_n - v_n) + v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 + \ln 2$

d (v_n) converge vers ln 2

exercice 4

①

1°) f_n est c' en $\mathbb{R}$ par TG (somme finie).

$$\forall n \in \mathbb{R} \quad f'_n(n) = \sum_{k=1}^n \cos kn = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikn} \right)$$

$$\text{si } n \notin 2\pi\mathbb{Z}, q = e^{in} \neq 1 \text{ et } \sum_{k=1}^n q^k = q \frac{1-q^n}{1-q}, \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}, f'_n(n) &= \operatorname{Re} \left(e^{in} \frac{1-e^{inn}}{1-e^{in}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{in} \frac{e^{i\frac{nn}{2}} (-2i \sin \frac{nn}{2})}{e^{i\frac{n}{2}} (-2i \sin \frac{n}{2})} \right) \\ &= \frac{\sin \frac{nn}{2}}{\sin \frac{n}{2}} \operatorname{Re} \left(e^{i \frac{n+1}{2} n} \right) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \boxed{\forall n \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z} : f'_n(n) = \cos \left(\frac{n+1}{2} n \right) \frac{\sin \left(\frac{nn}{2} \right)}{\sin \left(\frac{n}{2} \right)}}$$

$$\text{De plus } \forall n \in 2\pi\mathbb{Z} \quad f'_n(n) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\cos(kn)}_{=1} = n$$

$$\text{d'où } \boxed{\forall n \in 2\pi\mathbb{Z} \quad f'_n(n) = n}$$

2) Résolvons $f'_n(x) = 0$, pour $x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ (2)

$$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) = 0 \text{ ou } \sin\left(\frac{n}{2}x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{2}x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } \frac{n}{2}x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

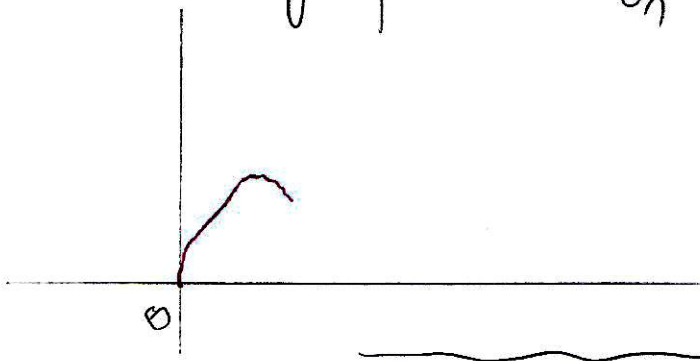
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{n+1} + \frac{2k\pi}{n+1} \text{ ou } x = \frac{2k\pi}{n}$$

La plus petite valeur strictement positive est $\boxed{\frac{\pi}{n+1}}$

$$\text{car } \frac{\pi}{n+1} - \frac{2\pi}{n} = \pi \frac{-n-1}{n(n+1)} < 0,$$

2^{ème} forme avec $k=1$

Au vu du graphe de f_n au voisinage de 0 :



$f_n(0) = 0$, positive
au voisinage de 0
et majorée (par $\sum_{k=1}^n 1 = n$)
sur $\mathbb{R}$; donc il y
aura un 1^{er} sommet.

Elle $\frac{\pi}{n+1}$ est effectivement un
maximum de f_n .

$$f'_n\left(\frac{\pi}{n+1} + t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{n+1}{2}t\right) \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2(n+1)} + \frac{nt}{2}\right)}{\sin \frac{\pi}{2(n+1)}}$$

$$\underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\left(\frac{n+1}{2}\right)t \frac{\sin \frac{n\pi}{2(n+1)}}{\sin \frac{\pi}{2(n+1)}} = -\lambda t \quad \text{avec :}$$

$$\lambda = -\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{\sin \frac{n\pi}{2(n+1)}}{\sin \frac{\pi}{2(n+1)}} < 0$$

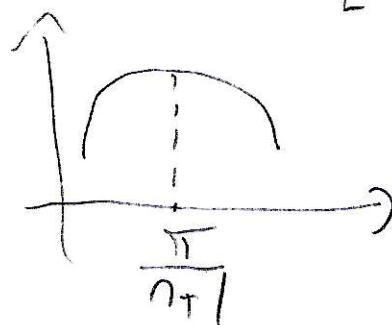
$$\text{car } 0 < \frac{n\pi}{2(n+1)} < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \frac{\pi}{2(n+1)} < \frac{\pi}{2}$$

cas au voisinage de $\frac{\pi}{n+1}$

t	-ε	0	ε
$f'_n\left(\frac{\pi}{n+1}+t\right)$	+	-	
$f_n\left(\frac{\pi}{n+1}+t\right)$	↗		↘

← signe de $-\lambda t$ sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$



$\mathcal{D}^0$ $\frac{\pi}{n+1}$ plus petit réel
 x_n strictement positif en lequel f_n
 atteint un maximum local.

$$\begin{aligned} 2) f_n(x_n) &= \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n+1}}{k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n+1}}{\frac{k}{n+1}} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \quad \text{avec } g(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t=0 \end{cases} \end{aligned}$$

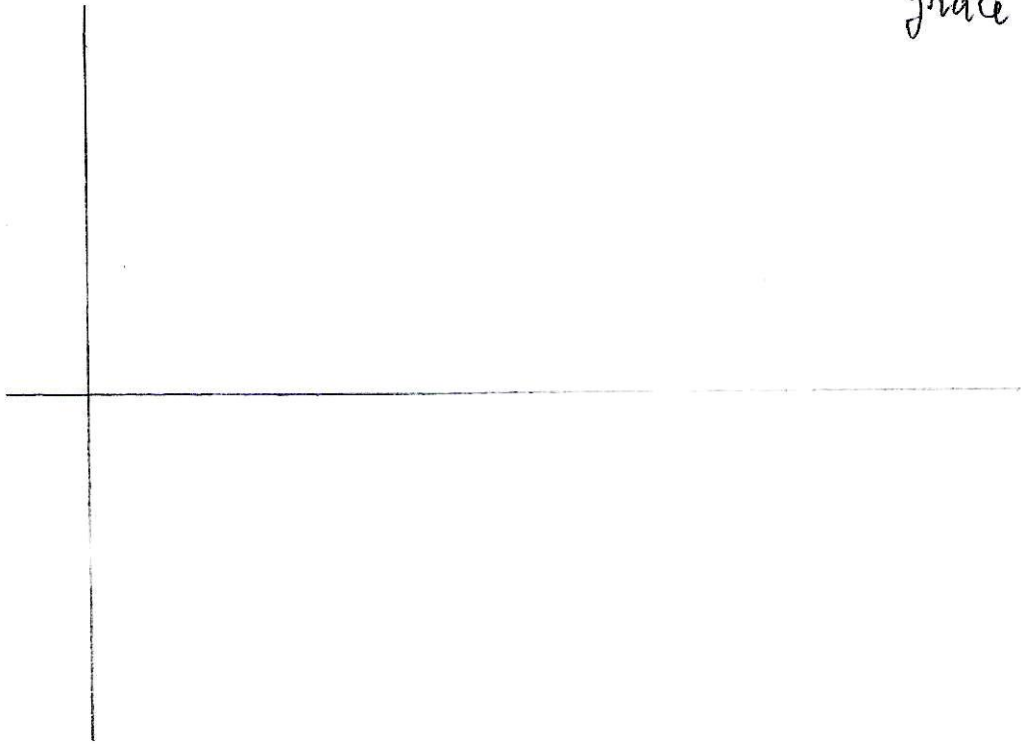
C'est à peu de chose près une somme de

Riemann / il "manque" $k=0$, donc

$$f_n(x_n) = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n g\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} g(0) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} g(t) dt = 0$$

pour que g
 soit C^0 sur $[0, \pi]$.
 ↑ par T.G.

d° $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \simeq 1,8519 \dots$ (4)
grâce à Maple.



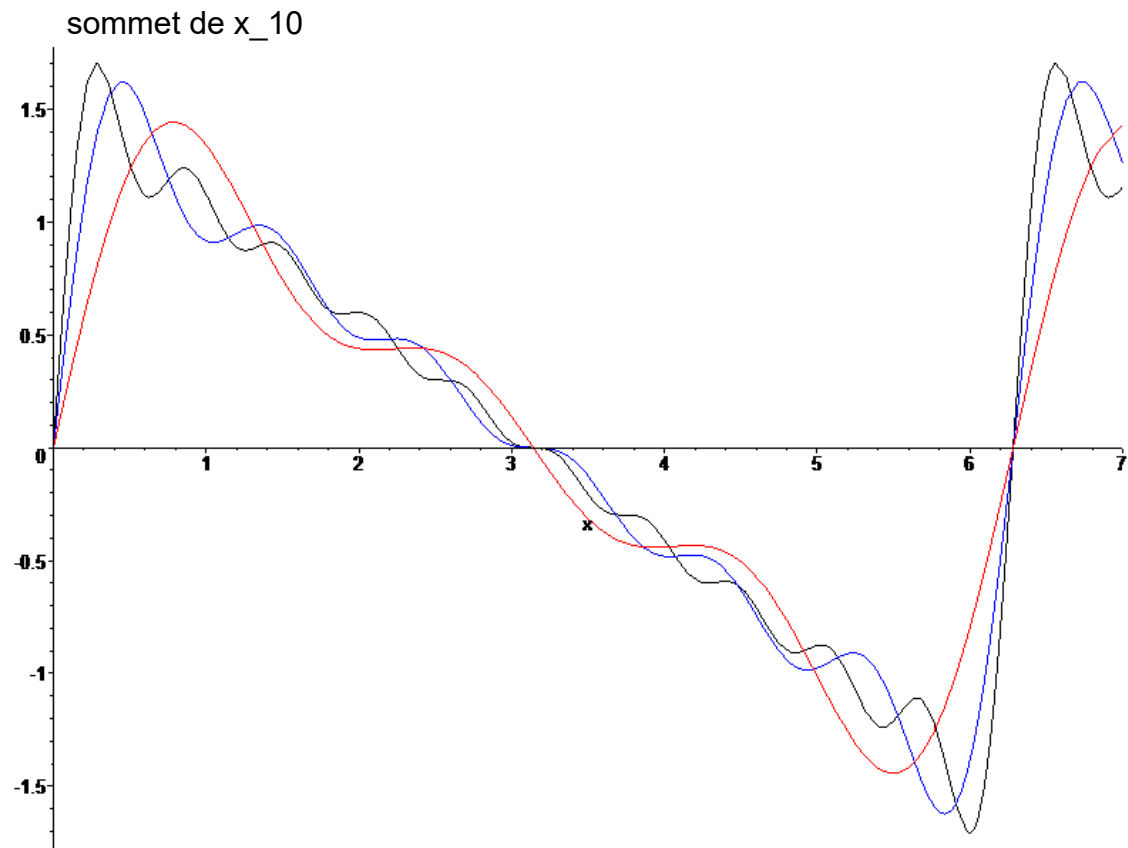
voir les graphes p (5)

on y voit le phénomène de Gibbs.

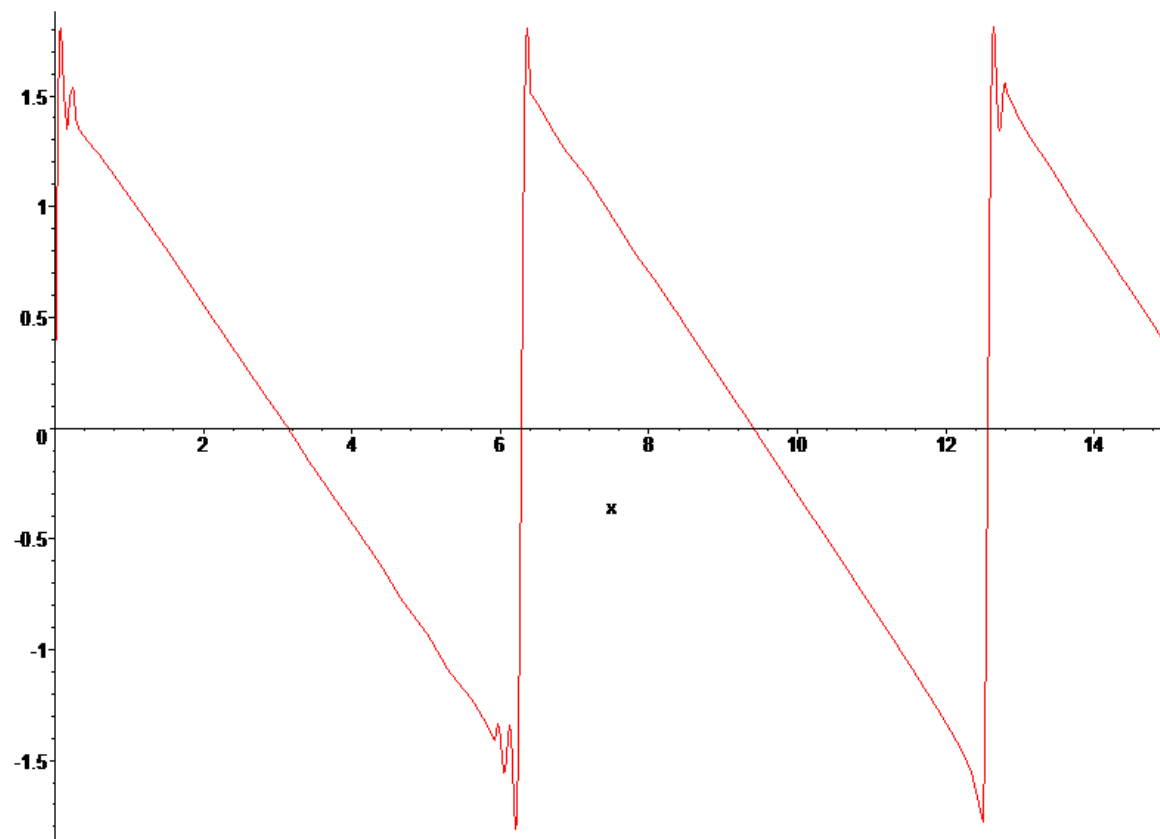
Tracé de f_3 sur l'intervalle $[0,7]$ en rouge,

Tracé de f_6 sur l'intervalle $[0,7]$ en bleu,

Tracé de f_{10} sur l'intervalle $[0,7]$ en noir,



Tracé de f_{40} sur l'intervalle $[0,15]$



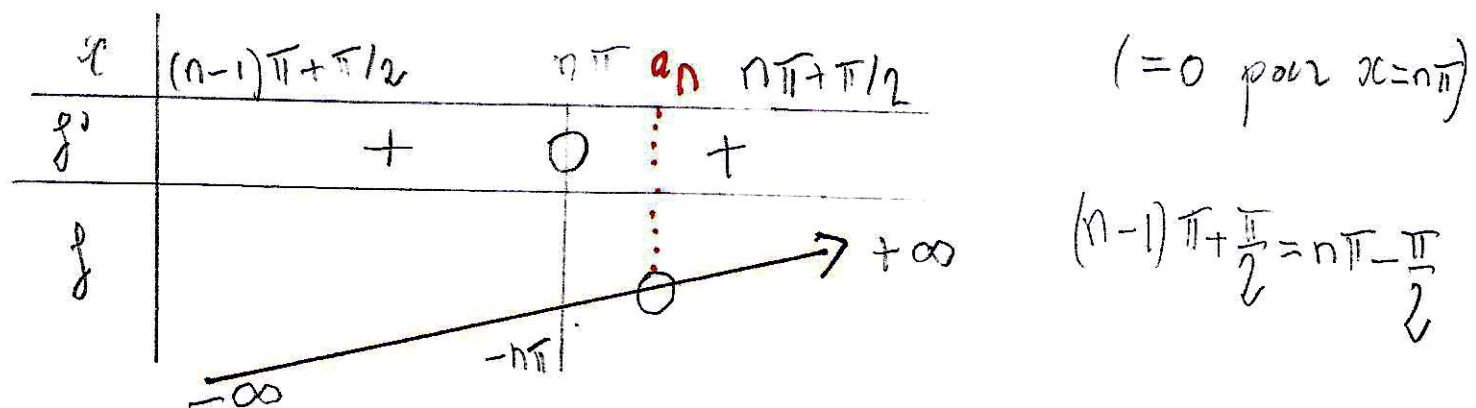
exercice 5 :

(1)

1) Posons $f(x) = \tan x - x$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f \in C^1$ sur

$$I_n =](n-1)\pi + \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[\text{ par T.G, et :}$$

$$\forall x \in I_n : f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x \geq 0$$



$$\lim_{x \rightarrow (n-1)\pi + \pi/2} f(x) = \lim_{x \rightarrow n\pi - \pi/2} f(x) = -\infty - (n\pi - \pi/2) = -\infty$$

idem $x \rightarrow +\infty$

Comme $f \in C^0$ et str $\nearrow$ de I_n dans $\mathbb{R}$, par le théorème de la bijection, $\exists ! a_n \in I_n \setminus f(a_n) = 0$

$$d^r_1 : \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! a_n \in I_n \text{ tq } \tan a_n = a_n}$$

$$\text{Comme } \forall n \geq 1 : 0 < n\pi - \frac{\pi}{2} \leq a_n \leq n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \frac{n\pi - \pi/2}{n\pi} \leq \frac{a_n}{n\pi} \leq 1 + \frac{\pi}{2n\pi}$$

$n \rightarrow \infty \rightarrow 1 \leftarrow$ T.E.

q5 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n\pi} = 1$ d'où $\boxed{a_n \sim n\pi}$

(2)

2') Pour comparer a_n et $a_{n-1} + \pi$, voyons déjà si $a_{n-1} + \pi \in I_n$, comme $a_{n-1} \in I_{n-1}$,

$$(n-1)\pi - \frac{\pi}{2} < a_{n-1} < (n-1)\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$n\pi - \frac{\pi}{2} < \pi + a_{n-1} < n\pi + \frac{\pi}{2} : \underline{a_{n-1} + \pi \in I_n}$$

Evaluons $f(a_{n-1} + \pi) = \tan(a_{n-1} + \pi) - a_{n-1} - \pi$
 $= \tan a_{n-1} - a_{n-1} - \pi$
 $= -\pi < 0 = f(a_n)$

Comme f est $\nearrow$ sur I_n , f^{-1} est $\nearrow$ de $\mathbb{R}$ vers I_n ,

donc $f(a_{n-1} + \pi) < f(a_n) \Rightarrow f^{-1}(f(a_{n-1} + \pi)) < f^{-1}(f(a_n))$
 $\Rightarrow a_{n-1} + \pi < a_n$

d'où $\boxed{\forall n \geq 2 \quad a_n > \pi + a_{n-1}}$

3') $\forall n \geq 2 \quad b_n - b_{n-1} = a_n - a_{n-1} - \pi > 0$ avec 2'),

donc (b_n) croissante, comme $a_n \in I_n$, $b_n < 0$: (b_n) majorée

Par TLN, d'où (b_n) converge

③

$$4) * \tan a_n = \tan(b_n + n\pi + \frac{\pi}{2}) = \tan(b_n + \frac{\pi}{2})$$

$$\text{or } b_n < 0 \text{ et } b_n > n\pi - \frac{\pi}{2} - n\pi - \frac{\pi}{2} = -\pi$$

$$\text{donc } b_n + \frac{\pi}{2} \in]0, \pi/2[, \text{ d'où } \sin(b_n + \pi/2) \neq 0 \text{ et}$$

$$\tan(b_n + \pi/2) = \frac{\sin(b_n + \pi/2)}{\cos(b_n + \pi/2)} = \frac{\cos b_n}{-\sin b_n} = \frac{-1}{\tan b_n}$$

exp. 1

$$* \tan a_n = a_n = \underbrace{b_n + n\pi + \frac{\pi}{2}}_{\text{exp. 2}}, \text{ d'où}$$

$$b_n + n\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{-1}{\tan b_n}$$

$$\text{Comme } (b_n) \text{ bornée } (b_n \in]-\pi, 0[), \quad b_n + n\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$$

$$\text{donc } \frac{-1}{\tan b_n} = \tan(b_n + \frac{\pi}{2}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$$

$$\text{Comme } b_n + \frac{\pi}{2} \in]0, \pi/2[, \quad \text{Arctan}(\tan(b_n + \frac{\pi}{2})) = b_n + \frac{\pi}{2}$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Arctan } u = \pi/2$$

critère séquentiel

$$d^o \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0}$$

$$5^o) \text{ On reprend } \underbrace{b_n + n\pi + \frac{\pi}{2}}_{\sim n\pi} = \underbrace{-\frac{1}{\tan b_n}}_{\sim \frac{1}{b_n}}$$

$$d^o \quad \boxed{b_n \sim \frac{-1}{n\pi}}$$

$$6^o) \text{ on a donc } b_n = \frac{-1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et comme}$$

$$a_n = b_n + n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$d^o \quad \boxed{a_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Remarque : On a bien $-\frac{1}{n\pi} \ll \frac{\pi}{2} \ll n\pi$

Numériquement, cela se "voit" bien :

$$\text{Avec Maple : } a_{10} \simeq 32,9563 \dots$$

$$10\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{20\pi} \simeq 32,9548 \dots$$

impressionnant!

Exercice *

on notera ③

Exercice

$$L(x) = E(x)$$

① On a $\forall n \in \mathbb{N}$

$$* x_{n+1} = x_n + \frac{1}{q_0 \dots q_{n+1}} \geq x_n$$

donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante

$$* x_n \leq \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0^2} + \dots + \frac{1}{q_0^{n+1}} = \frac{1 - (\frac{1}{q_0})^{n+1}}{1 - \frac{1}{q_0}} \text{ car } q_0 \neq 1$$

$\leq \frac{1}{q_0 - 1}$ donc (x_n) est majorée

et (x_n) est convergente

② $\forall n \in \mathbb{N} * x_n \geq x_0 = \frac{1}{q_0} > 0$ donc $l \geq x_0 > 0$
 $\Rightarrow l > 0$

$$* x_n \leq \frac{1}{q_0 - 1} < \frac{1}{2-1} = 1 \text{ donc } l \leq 1$$

$$l \in]0, 1[$$

2°) Posons $\varphi: S \rightarrow]0, 1[$
 $(q_n) \mapsto l$

injectivité soit $((q_n)_{n \in \mathbb{N}}, (q'_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in S^2$
 $\varphi((q_n)) = \varphi((q'_n))$

supposons $(q_n) \neq (q'_n)$ donc $\exists n_1 \in \mathbb{N} \setminus q_{n_1} \neq q'_{n_1}$
 soit $I = \{n \in \mathbb{N} \setminus q_n \neq q'_n\}$

on a $I \subset \mathbb{N}$ et $I \neq \emptyset$ ($n_1 \in I$)

soit k le plus petit élément de I

$$\text{on a } q_k \neq q'_k$$

$\forall n$ la symétrie de (q_n) et (q'_n) on peut

supposer que $q_k < q'_k$

$$\text{d'où } \boxed{q_k + 1 \leq q'_k} \text{ (car } q_k \text{ et } q'_k \in \mathbb{N})$$

soit (y_n) la suite associée à (q'_n)

$$(y_n) = \frac{1}{(q_n)}$$

on a $\forall n \geq k$

$$y_n = \frac{1}{q'_0} + \dots + \frac{1}{q'_0 \dots q'_{k-1}} + \frac{1}{q'_0 \dots q'_k} + \dots + \frac{1}{q'_0 \dots q'_n}$$

$$\leq \frac{1}{q_0} + \dots + \frac{1}{q_0 \dots q_{k-1}} + \frac{1}{q_0 \dots q_k} + \dots + \frac{1}{q_0 \dots q_n}$$

$$\leq x_{k-1} + \frac{1}{q_0 \dots q_{k-1} (q_k + 1)} \left[1 + \frac{1}{q_k + 1} + \dots + \frac{1}{(q_k + 1)^{n-k}} \right]$$

$$\leq x_{k-1} + \frac{1}{q_0 \dots q_{k-1} (q_k + 1)} \frac{1 - (\frac{1}{q_k + 1})^{n-k+1}}{1 - \frac{1}{q_k + 1}} < x_{k-1} + \frac{1}{q_k + 1} < x_k$$

$$\leq x_{k-1} + \frac{1}{q_0 \dots q_{k-1} (q_k + 1)} - \frac{1}{q_k + 1}$$

$$\leq x_{k-1} + \frac{1}{q_0 \dots q_{k-1} (q_k + 1)} - \frac{q_k + 1}{q_k}$$

$\leq x_k$

dans $\forall n \geq k+1 \quad y_n \leq x_k < x_{k+1} \leq x_n$

$\uparrow \quad \text{car } (x_n) \text{ st } \nearrow$

or $\varphi(q_n) = \lim x_n$ et $\varphi(q'_n) = \lim y_n$

d'où $\varphi(q'_n) \leq x_k < x_{k+1} \leq \varphi(q_n)$

$\Rightarrow \varphi(q'_n) \neq \varphi(q_n) \Rightarrow$ seconde

cl 1 φ injective

surjectivité

soit $y \in]0, 1[$

analyse on doit construire (q_n) tel $\lim x_n = y$

on (x_n) donc on doit avoir $\forall n \quad x_n \leq y$

ici $x_0 \leq y \Rightarrow \frac{1}{q_0} \leq y \Rightarrow q_0 \geq \frac{1}{y}$

$\Rightarrow q_0 \geq E(\frac{1}{y}) + 1$ oui mais les-elles??

on a vu que $\forall n \quad x_n \leq \frac{1}{q_{n-1}}$ il faut donc

$$\frac{1}{q_{n-1}} \geq y$$

sinon $\lim x_n \leq \frac{1}{q_{n-1}} < y$ impossible

$$\text{d'où} \quad q_{n-1} \leq \frac{1}{y} \leq q_n$$

$$\text{donc il faut} \quad q_0 = E\left(\frac{1}{y}\right) + 1$$

$$(E(n) = \lfloor n \rfloor)$$

de même il faut avoir $\frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} < y$

donc $\frac{1}{q_1} < q_0(y - \frac{1}{q_0})$ et de la même

manière on prendrait $q_1 = E\left(\frac{1}{q_0(y - \frac{1}{q_0})}\right) + 1$

etc...

synthèse

constructions par récurrence q_n et x_n

new $y \neq 0$ poson $q_0 = E\left(\frac{1}{y}\right) + 1$

$$x_0 = \frac{1}{q_0}$$

on a $x_0 < y$

* $0 < y \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{y} \geq 1 \Rightarrow E\left(\frac{1}{y}\right) \geq 1$

$$\Rightarrow q_0 \geq 2$$

$$* y < \frac{1}{q_{n-1}} \Rightarrow y \leq \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0^2} - \frac{1}{q_0} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0^2}$$

donc $x_0 < y \leq x_0 + \frac{1}{q_0(q_0-1)}$ et $q_0 \geq 2$

⑤ 3

$n=1$ posons $q_1 = E\left(\frac{1}{q_0(y-x_0)}\right) + 1$

$x_1 = x_0 + \frac{1}{q_0 q_1}$

or $a \neq q_1$, bien définie, car $q_0(y-x_0) \neq 0$

* $q_1^{-1} \leq \frac{1}{q_0(y-x_0)} < q_1$

$\Rightarrow \frac{1}{q_1} < q_0(y-x_0) \leq \frac{1}{q_1^{-1}} - 1$

$\Rightarrow \frac{1}{q_0 q_1} < y - x_0 \leq \frac{1}{q_0(q_1 - 1)}$

$\Rightarrow x_1 < y \leq x_1 + \frac{1}{q_0(q_1 - 1)} - \frac{1}{q_0 q_1}$

$\Rightarrow x_1 < y \leq x_1 + \frac{1}{q_0 q_1(q_1 - 1)}$

* $\frac{1}{q_1(y-x_1)} - q_0 \geq \frac{1}{q_0} \frac{1}{y-x_0} - q_0 = -1$ (car $\frac{1}{y-x_0} \leq \frac{1}{q_0(q_1-1)}$)

$\Rightarrow q_1 > q_0 - 1 \Rightarrow q_1 \geq q_0$

donc $x_1 < y < x_1 + \frac{1}{q_0 q_1(q_1 - 1)}$ et $q_1 \geq q_0$

supposons maintenant que x_i jusqu'à n converge
tel que :

* $q_n = E\left(\frac{1}{q_0 q_1 \dots q_{n-1} (y - x_{n-1})}\right) + 1$

* $x_n < y \leq x_n + \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_{n-1} (q_n - 1)}$

* $q_n \geq q_{n-1} \geq \dots \geq q_0 \geq 2$

considérons q_{n+1} et x_{n+1} :

posons $q_{n+1} = E\left(\frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n (y - x_n)}\right) + 1$ et $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{q_0 \dots q_{n+1}}$

bien définie car $y - x_n > 0$ et $q_n \neq 0$

* $q_{n+1}^{-1} \leq \frac{1}{q_0 \dots q_n (y - x_n)} < q_{n+1}$

$\Rightarrow x_{n+1} < y \leq x_{n+1} + \frac{1}{q_0 \dots q_{n+1} (q_{n+1} - 1)}$
(idem que $n=1$)

* $y - x_n \leq \frac{1}{q_0 \dots q_n (q_{n+1} - 1)}$

$\Rightarrow \frac{1}{y - x_n} \geq q_0 \dots q_n (q_{n+1} - 1)$

$\Rightarrow \frac{1}{q_0 \dots q_n (y - x_n)} \geq q_{n+1} - 1$

$\Rightarrow q_{n+1} > q_n - 1 \Rightarrow q_{n+1} \geq q_n$

⑥ 3

est on a une suite $(q_n) \in S$ et (x_n) vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < y < x_{n+1} + \frac{1}{q_0 \dots q_n (q_{n+1})} \leq x_{n+1} + \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad y - \frac{1}{2^n} < x_{n+1} < y$$

le théorème d'encadrement donne

(x_n) cvg vers y

d'où $\varphi((q_n)) = y$ et φ surjective

φ bijective de S dans $[p, 1]$

3°) $\Leftarrow$ si $\exists n_0 \in \mathbb{N} \exists q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \forall n \geq n_0 \quad q_n = q$

on a $\forall n \geq n_0$

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{q_0 \dots q_{n-1}} \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^n} \right)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_{n-1} + \frac{1}{q_0 \dots q_{n-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} \in \mathbb{Q}$$

donc $\varphi((q_n)) \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ soit $y \in \mathbb{Q}$

si $y = \frac{1}{b}$ on a $y = \varphi((q_n))$ avec $q_n = b+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

si $y = \frac{p}{q} = \frac{2}{2b+1}$ (irréductible)

$$= \frac{1}{b+1} + \frac{1}{b+1} \left(\frac{1}{2b+1} \right) = \frac{1}{b+1} + \frac{1}{b^2+1} y$$

et on est ramené au cas précédent avec y'

$$y_1 = \varphi((q_n)) \quad \text{on pose}$$

$$q_0 = b'+1$$

$$\forall n, q_n = n_{n+1}$$

on a $y = \varphi((q_n))$ et (q_n) suite majorée

exigé: la suite (q_n) est général : l'acte d'une récurrence et de la division euclidienne de dénominateur par le numérateur.

φ stationnaire $\Leftrightarrow \varphi((q_n)) \in \mathbb{Q}$