

DM 2

Thermodynamique

Exercice 1 : Cycle de Brayton

Cet exercice concerne le cycle moteur de Brayton ainsi qu'une amélioration possible pour augmenter son efficacité. Le gaz utilisé dans la centrale est l'hélium, dont les caractéristiques sont :

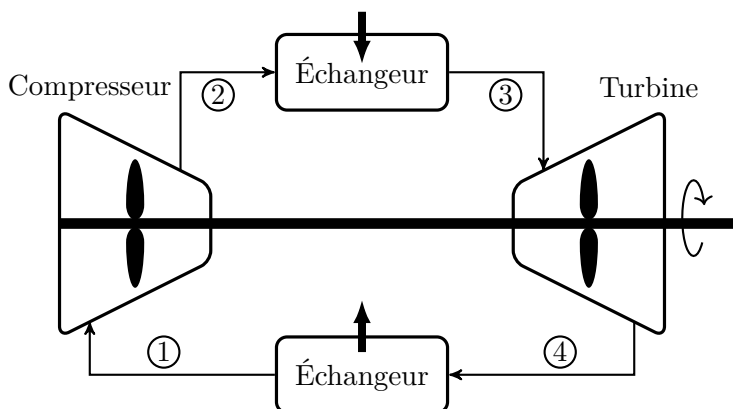
$c_v = \frac{3R}{2}$, $c_p = \frac{5R}{2}$ avec $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{He} = 4,00 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Dans l'ensemble du problème, le gaz est supposé parfait.

I – Cycle de Brayton simple

Le gaz parfait circule dans une installation en échangeant du travail avec l'extérieur dans le compresseur et la turbine. Le travail fourni par le passage du gaz dans la turbine sert d'une part à faire fonctionner le compresseur (turbine et compresseur montés sur le même axe) et d'autre part à fabriquer de l'électricité. Les transferts thermiques ont lieu dans des échangeurs. Le fluide, ici un gaz d'hélium, décrit le cycle de Brayton.

Ce cycle est constitué de deux isobares et de deux isentropiques :

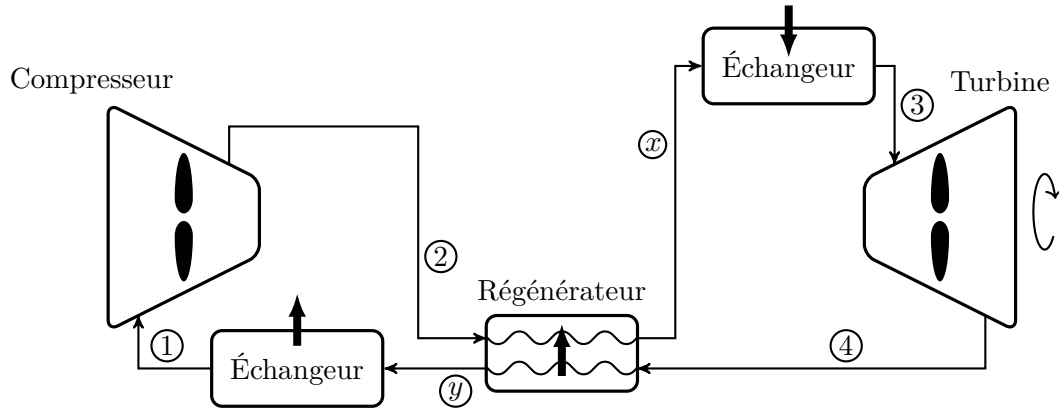
- compression adiabatique réversible du point 1 avec une température $T_1 = 300 \text{ K}$ et une pression $p_1 = 20 \times 10^5 \text{ Pa}$ vers le point 2 à la pression $p_2 = 80 \times 10^5 \text{ Pa}$,
- détente isobare du point 2 vers le point 3 à la température $T_3 = 1300 \text{ K}$,
- détente adiabatique réversible de 3 vers 4 (de $p_3 = p_2$ à $p_4 = p_1$),
- compression isobare de 4 vers 1.



- Q.1** Pour une transformation isentropique, justifier que la relation entre T et p peut se mettre sous la forme : $\frac{T}{p^\beta} = \text{cste}$. On exprimera β en fonction de γ (avec $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$).
- Q.2** Déterminer les températures T_2 et T_4 . Effectuer l'application numérique.
- Q.3** Tracer le cycle de Brayton sur un diagramme $p = f(v)$.
- Q.4** Calculer les travaux W_{12} et W_{34} échangés avec l'extérieur (travaux utiles reçus) lors des transformations isentropiques 12 et 34. Effectuer l'application numérique pour une mole d'hélium.
- Q.5** Exprimer les transferts thermiques reçus Q_{23} et Q_{41} . Effectuer l'application numérique pour une mole d'hélium.
- Q.6** Montrer que l'efficacité se met sous la forme : $e = 1 - r_p^{-\beta}$ avec $r_p = \frac{p_2}{p_1}$.
- Q.7** Calculer numériquement cette efficacité et comparer à l'efficacité de Carnot obtenue en utilisant les deux températures extrêmes du cycle.
- Q.8** Exprimer le travail reçu au cours d'un cycle à partir des températures extrêmes T_3 et T_1 , de R , de β et du rapport des pressions r_p .
- Q.9** Montrer que la valeur absolue du travail passe par une valeur maximale en fonction du rapport des pressions pour $r_{pm} = \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{1}{2\beta}}$. Calculer numériquement r_{pm} puis l'efficacité dans ce cas.

II – Cycle de Brayton avec régénérateur

L'utilisation d'un régénérateur (ou récupérateur de chaleur) pendant les deux transformations isobares peut se révéler judicieux dans certaines conditions que nous allons déterminer. Si la température à la sortie de la turbine est plus élevée que la température du gaz comprimé à la sortie du compresseur, une partie de l'énergie du gaz sortant de la turbine peut être cédée (en recourant à un régénérateur) au gaz allant vers l'échangeur chaud et ainsi améliorer l'efficacité du cycle de Brayton. On suppose que les transferts thermiques associés au régénérateur sont internes (les parois sont adiabatiques).



Dans le cycle, nous rajoutons deux lettres x et y afin d'isoler la partie échangée dans le régénérateur. Le cycle est donc composé comme indiqué sur la figure ci-dessus :

- compression adiabatique réversible du point 1 vers le point 2,
- détente isobare du point 2 vers le point x dans le régénérateur puis du point x au point 3 en contact avec le thermostat chaud,
- détente adiabatique réversible du point 3 vers le point 4,
- compression isobare du point 4 vers le point y dans le régénérateur puis du point y au point 1 en contact avec le thermostat froid.

En supposant un régénérateur parfait, on a : $T_x = T_4$ et $T_y = T_2$.

Q.10 Calculer algébriquement les transferts thermiques molaires Q_{x3} et Q_{y1} provenant des thermostats (l'application numérique n'est pas demandée).

Q.11 En déduire l'efficacité et la mettre sous la forme : $e = 1 - \left(\frac{T_1}{T_3}\right) r_p^\beta$. Effectuer l'application numérique avec $p_1 = 20 \times 10^5$ Pa et $p_2 = 80 \times 10^5$ Pa.

Q.12 Pour quelle valeur de r_{pe} l'efficacité avec régénérateur est égale à l'efficacité sans régénérateur ? Vérifier alors que $T_2 = T_4$, ce qui veut dire que le régénérateur ne joue plus aucun rôle.

Q.13 Calculer numériquement r_{pe} dans ce cas et expliquer vers quelle valeur devrait tendre r_p pour atteindre l'efficacité de Carnot. Pour y parvenir, les industriels utilisent un étagement de la compression et de la détente, ce qui conduit à un autre cycle nommé cycle d'Ericsson.

Exercice 2 : Analyse de Fourier et diffusion thermique

On considère un matériau homogène assimilable à une répartition unidimensionnelle de matière selon un axe (Ox). On rappelle l'équation de la diffusion thermique unidimensionnelle sans perte et sans terme source, donnant la température $T(x, t)$ à l'abscisse x et au temps t dans le matériau :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

- Q.1** Déterminer l'expression de la constante D en fonction de la masse volumique μ , du coefficient de conductivité thermique λ et de la capacité thermique massique c du matériau considéré. On pourra raisonner par analyse dimensionnelle. En déduire l'expression du temps caractéristique de diffusion τ sur une longueur L . Faire l'application numérique pour une diffusion dans le fer sur une longueur $L = 50$ cm.

Joseph Fourier a étudié la diffusion thermique le long d'un anneau de fer torique, de rayon moyen $R = 16$ cm et de section carrée de côté $a \ll R$. L'anneau est chauffé en un point pris comme origine des angles $\theta = 0$ dans une base cylindrique puis on suit l'évolution de la température à différents instants et pour différentes valeurs de l'angle θ .

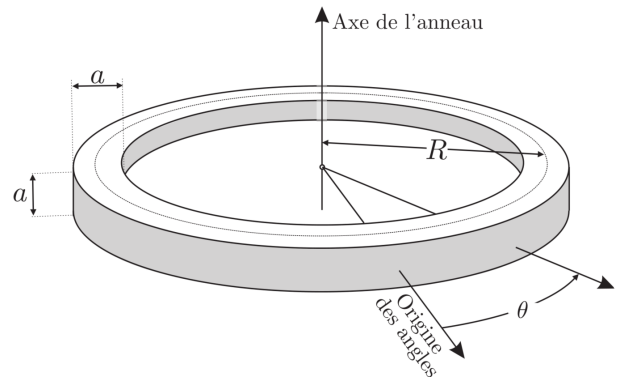
On notera $T(\theta, t)$ la température de l'anneau, supposée uniforme sur une section droite. On choisira $\theta \in]-\pi; \pi]$ et on admettra que, par symétrie, $T(-\theta, t) = T(\theta, t)$.

Le flux thermique conducto-convectif $\delta\Phi$ sortant à travers une surface dS de l'anneau de fer vers l'air environnant (de température T_e constante) est modélisé par la loi de Newton :

$$\delta\Phi = h(T(\theta, t) - T_e)dS$$

dans laquelle le coefficient d'échange thermique h est supposé constant. On rappelle finalement l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}}T = \frac{\partial T}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{u}_z$$



- Q.2** Rappeler la loi de Fourier pour la diffusion thermique. En déduire l'expression du vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_{th}$ puis dessiner l'allure des lignes de champ le long de l'anneau, en précisant leur orientation.

Pour établir l'équation décrivant l'évolution de la fonction $T(\theta, t)$ dans l'anneau, on considère le volume élémentaire dV compris entre deux sections de surface a^2 de l'anneau, repérées par les angles θ et $\theta + d\theta$.

- Q.3** Déterminer les expressions approchées de dV ainsi défini et de la surface élémentaire dS_{lat} de son contact avec l'air. On rappelle que $a \ll R$. En déduire que $T(\theta, t)$ vérifie l'équation :

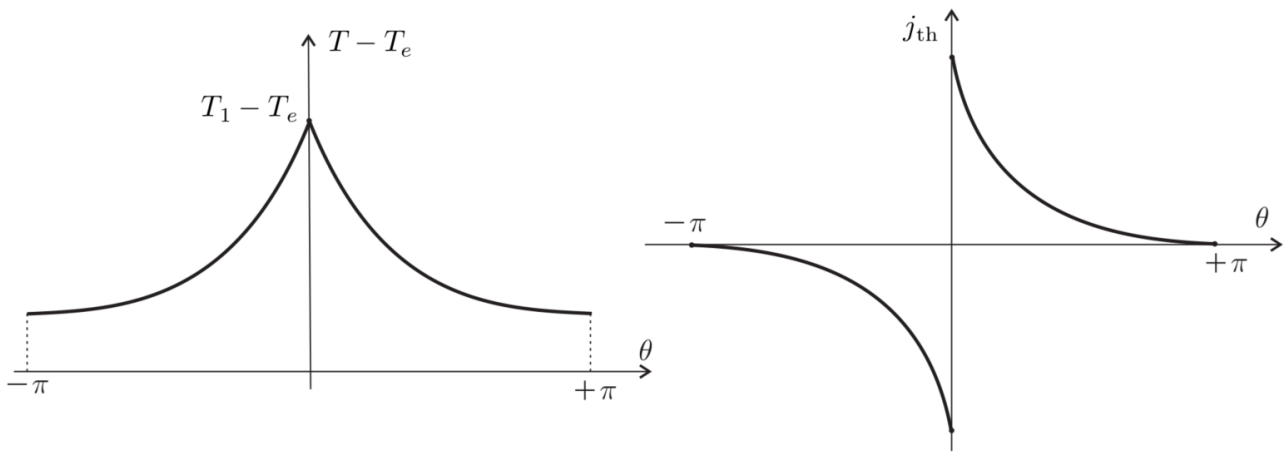
$$\frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{4h}{a}(T - T_e) = \mu c \frac{\partial T}{\partial t}$$

- Q.4** Donner, en régime stationnaire, et en fonction de T_e , R , θ et de $\delta = \sqrt{\frac{a\lambda}{4h}}$, la forme de la solution $T(\theta)$. On introduira deux constantes d'intégration A et B sans chercher à les déterminer pour l'instant. Préciser, en le justifiant, la dimension de la grandeur δ .

On donne sur la figure ci-dessous l'allure de la représentation graphique associée aux solutions $T(\theta)$ et $j_{th}(\theta)$ (pour r fixé). On note $T_1 = T(\theta = 0)$ la valeur, imposée par le chauffage, en $\theta = 0$.

- Q.5** Commenter ces deux graphes puis les exploiter judicieusement pour déterminer, sur l'intervalle $[0, +\pi]$, les constantes A et B introduites précédemment, en fonction de T_1 , T_e , R et δ . En déduire la solution $T(\theta)$ sur l'intervalle $[0, +\pi]$.

- Q.6** Sur les relevés expérimentaux de Joseph Fourier du 31 juillet 1806, on lit que deux heures après le début du chauffage, les valeurs de températures des différentes sections de l'anneau sont stationnaires. Montrer que cet ordre de grandeur était prévisible à condition de supposer le phénomène de diffusion prépondérant en régime transitoire.



C'est en étudiant la diffusion thermique dans le dispositif expérimental décrit précédemment que Joseph Fourier découvrit les séries trigonométriques, dites « séries de Fourier ». L'anneau est chauffé comme précédemment en $\theta = 0$ puis enfoui presque complètement dans du sable, excellent isolant thermique. On suppose qu'il n'y a aucune fuite thermique par la surface latérale de l'anneau une fois que celui-ci est enfoui dans le sable et que la température reste de la forme $T(\theta, t)$. On s'intéresse toujours au domaine $\theta \in]-\pi; \pi]$, avec $T(-\theta, t) = T(\theta, t)$ par symétrie.

Q.7 Donner l'équation vérifiée par $T(\theta, t)$. On cherche les solutions à variables séparées de la forme $T_n(\theta, t) = f_n(\theta)g_n(t)$. L'interprétation de l'indice n apparaîtra dans la donnée de la condition initiale nécessaire à la résolution complète de l'équation. Déterminer les expressions générales de $f_n(\theta)$ et $g_n(t)$ puis montrer que $T_n(\theta, t)$ s'écrit sous la forme

$$T_n(\theta, t) = B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right) e^{-t/\tau_n}$$

On donnera la relation entre τ_n et d_n et on précisera leurs dimensions respectives.

Q.8 À l'instant $t = 0$, la température initiale d'une section repérée par l'angle θ est une fonction $T_0(\theta)$, symétrique, de période 2π et dont le développement en série de Fourier est de la forme :

$$T_0(\theta) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\theta)$$

Les coefficients b_n sont supposés connus. Que représente la constante T_m ? Justifier précisément pourquoi la solution générale $T(\theta, t)$ peut se mettre sous la forme

$$T(\theta, t) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\theta, t)$$

Expliciter B_n , d_n et τ_n en fonction de b_n , n , R , μ , c et λ .

Q.9 Joseph Fourier remarque, en mesurant la température en fonction du temps en différents points de l'anneau, que $T(\theta, t) - T_m$ devient rapidement proportionnel à $\cos(\theta)$. Commenter cette constatation.

Données numériques

- Capacité thermique massique du fer : $c = 4,0 \times 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Masse volumique du fer : $\mu = 7,9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Conductivité thermique du fer : $\lambda = 80 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$
- Coefficient conducto-convectif à l'interface fer-air : $h = 10 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$