

DS 2 (2 heures)
Physique statistique, machines thermiques

La calculatrice est autorisée

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être **encadrés**.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

Critère	Indicateur
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire.
Clarté de l'expression	La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture.
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrées.
Identification des questions et pagination	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question. La pagination est correctement effectuée.
Mise en évidence des résultats	Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence.

Nombre de critères non respectés	Palier de Malus	Effet sur la note
0	0	aucun
1–2	1	–3.3%
3–4	2	–6.7%
5–6	3	–10%

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'essentiel des données et formules utiles se trouve dans un formulaire en fin d'énoncé.

Exercice 1 : Étude d'une installation nucléaire REP

Une centrale nucléaire est un site industriel destiné à la production d'électricité, qui utilise comme chaudière un réacteur nucléaire pour produire de la chaleur. Une centrale nucléaire REP (Réacteur à Eau Pressurisée) est constituée de deux grandes zones (voir FIGURE 1) :

- une zone non nucléaire (salle des machines). Dans cette partie, semblable à celle utilisée dans les centrales thermiques classiques, s'écoule de l'eau dans un circuit secondaire. Cette eau est évaporée dans le Générateur de Vapeur (GV) par absorption de la chaleur produite dans la zone nucléaire, puis elle entraîne une turbine (T) couplée à un alternateur produisant de l'électricité, ensuite elle est condensée au contact d'un refroidisseur (rivière ou mer ou atmosphère via une tour aéroréfrigérante) et enfin, elle est comprimée avant d'être renvoyée vers le générateur de vapeur ;
- une zone nucléaire (dans le bâtiment réacteur), où ont lieu les réactions nucléaires de fission, qui produisent de l'énergie thermique et chauffent ainsi l'eau sous pression circulant dans le circuit primaire. Le transfert d'énergie thermique entre le circuit primaire et le circuit secondaire se fait dans le générateur de vapeur, où la surface d'échange entre les deux fluides peut atteindre près de 5000 m^2 (réseau de tubulures).

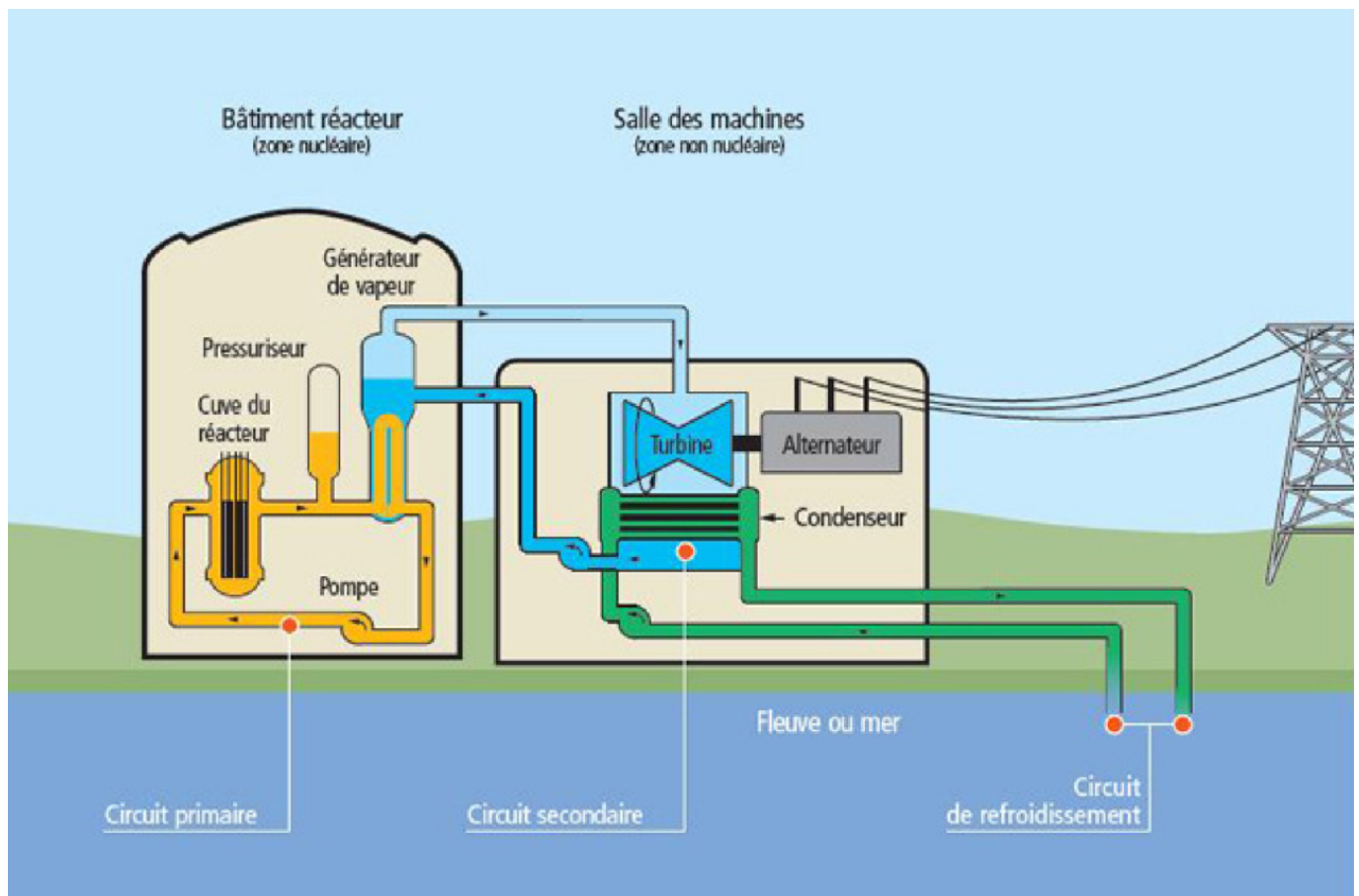


FIGURE 1 – Schéma global d'une centrale nucléaire

Considérons une centrale nucléaire REP produisant une puissance électrique $P_e = 900 \text{ MW}$. Le fluide circulant dans le circuit secondaire est de l'eau, dont l'écoulement est supposé stationnaire. Le cycle thermodynamique décrit par l'eau est un cycle ditherme moteur. L'eau liquide sera supposée incompressible et de capacité thermique massique isobare supposée constante. Le tableau en fin d'énoncé donne diverses données thermodynamiques relatives à l'équilibre liquide-vapeur de l'eau.

I – Cycle de Carnot

Dans une première approche simplifiée, on considère le moteur ditherme de Carnot fonctionnant de manière réversible entre deux sources de température T_{ch} et T_{fr} ($T_{fr} < T_{ch}$).

- Q.1** Donner, en la redémontrant, l'expression du rendement η_c de Carnot associé à ce cycle.
- Q.2** Donner la valeur numérique de ce rendement en prenant $T_{ch} = 543 \text{ K}$ et $T_{fr} = 303 \text{ K}$, les deux températures extrêmes de l'eau dans le circuit secondaire.
- Q.3** Sachant qu'un réacteur REP fournit à l'eau du circuit secondaire, via le générateur de vapeur, une puissance thermique $P_t = 2785 \text{ MW}$, que vaut le rendement thermodynamique réel η_r de l'installation ? On supposera que la puissance mécanique transmise à la turbine est intégralement convertie en puissance électrique. Commenter.

II – Cycle de Rankine

On suppose que l'eau du circuit secondaire subit les transformations suivantes (représentées dans la FIGURE 2) :

- de A à B : dans le générateur de vapeur, échauffement isobare du liquide à la pression $P_2 = 55 \text{ bar}$ jusqu'à un état de liquide saturant (état noté A'), puis vaporisation totale isobare jusqu'à un état de vapeur saturante sèche (état B) ;
- de B à C : détente adiabatique réversible dans la turbine, de la pression P_2 à la pression $P_1 = 43 \text{ mbar}$ (en C , le fluide est diphasé) ;
- de C à D : liquéfaction totale isobare dans le condenseur, jusqu'à un état de liquide saturant ;
- de D à A : compression adiabatique réversible, dans la pompe d'alimentation, de la pression P_1 à la pression P_2 , du liquide saturant sortant du condenseur. On négligera les travaux mis en jeu dans cette pompe (consommé et fourni) devant les autres énergies mises en jeu.

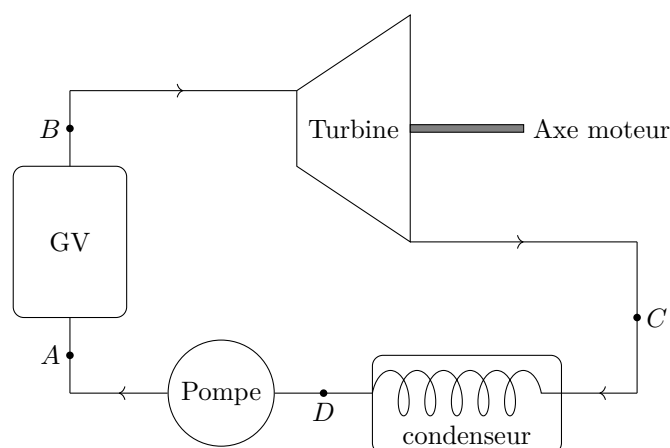


FIGURE 2 – Cycle de Rankine simple

- Q.4** Représenter dans le diagramme de Clapeyron (P, v) l'allure de la courbe de saturation de l'eau, ainsi que les isothermes T_B , T_D et $T_{critique}$, cette dernière température étant celle du point critique de l'eau. Préciser les domaines du liquide, de la vapeur, de la vapeur saturante. Représenter sur ce même diagramme l'allure du cycle décrit par l'eau du circuit secondaire. Indiquer le sens de parcours du cycle et placer les points A , A' , B , C et D .
- Q.5** D'après l'extrait de table thermodynamique donné en fin d'énoncé, quelles sont les valeurs des températures, des enthalpies massiques et des entropies massiques aux points A' , B et D ? On pourra donner les valeurs sous forme de tableau.

Dans toute la suite, on négligera les variations d'énergie cinétique et potentielle dans les bilans énergétiques.

- Q.6** Exprimer alors, sans démonstration, le premier principe de la thermodynamique pour un fluide en écoulement stationnaire recevant de manière algébrique le travail massique utile w_u et le transfert thermique massique q .
- Q.7** La FIGURE A du document réponse représente le diagramme enthalpique P, h de l'eau. Placer, avec soin et à l'échelle, les points A , A' , B , C et D du cycle. On explicitera la méthode.

- Q.8** Exprimer le travail massique w_{BC} reçu par l'eau dans la turbine. Donner sa valeur numérique en s'aidant du diagramme enthalpique.
- Q.9** Exprimer le transfert thermique massique $q_{AA'}$ reçu par l'eau liquide quand elle passe de manière isobare de la température T_A à la température $T_{A'}$ dans le générateur de vapeur. Donner sa valeur numérique. On considérera $T_A \approx T_D$.
- Q.10** Exprimer le transfert thermique massique $q_{A'B}$ reçu par l'eau quand elle se vaporise complètement dans le générateur de vapeur. Donner sa valeur numérique.
- Q.11** Calculer alors le rendement η de ce cycle. Comparer au rendement de Carnot et commenter. Comparer au rendement réel et commenter.
- Q.12** Dans quel état se trouve l'eau à la fin de la détente dans la turbine ? Donner le titre massique en vapeur à l'aide du diagramme enthalpique. En quoi est-ce un inconvénient pour les parties mobiles de la turbine ?

III – Cycle de Rankine avec détente étagée

Le cycle réel est plus compliqué que celui étudié précédemment (voir FIGURE 3). En effet, d'une part, la détente est étagée : elle se fait d'abord dans une turbine *haute pression* puis dans une turbine *basse pression*. D'autre part, entre les deux turbines, l'eau passe dans un *surchauffeur*. Les transformations sont maintenant modélisées par :

- de A à B : dans le générateur de vapeur, échauffement isobare du liquide à la pression $P_2 = 55$ bar, jusqu'à un état de liquide saturant (état noté A'), puis vaporisation totale isobare jusqu'à un état de vapeur saturante sèche (point B) ;
- de B à C' : détente adiabatique réversible dans la turbine *haute pression*, de la pression P_2 à la pression $P_3 = 10$ bar ;
- de C' à B' : échauffement isobare à la pression P_3 , dans le surchauffeur, jusqu'à un état de vapeur saturante sèche (point B') ;
- de B' à C'' : détente adiabatique réversible dans la turbine *basse pression*, de la pression P_3 à la pression $P_1 = 43$ mbar ;
- de C'' à D : liquéfaction totale isobare dans le condenseur, jusqu'à un état de liquide saturant ;
- de D à A : compression adiabatique réversible, dans la pompe d'alimentation, de la pression P_1 à la pression P_2 , du liquide saturant sortant du condenseur. On négligera les travaux mis en jeu dans cette pompe (consommé et fourni) devant les autres énergies mises en jeu.

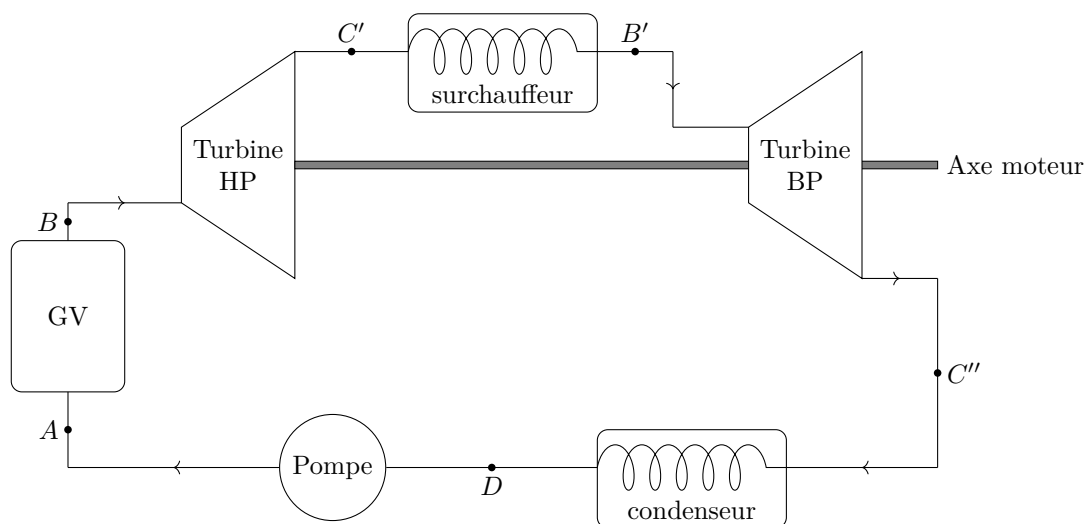


FIGURE 3 – Cycle de Rankine avec détente étagée

- Q.13** Placer les nouveaux points C' , B' et C'' sur le diagramme enthalpique FIGURE A du document réponse.
- Q.14** Comparer les titres massiques en vapeur des points C' et C'' au titre massique en vapeur du point C . Quel est l'intérêt de la surchauffe ?
- Q.15** À l'aide du diagramme enthalpique, déterminer le nouveau rendement η' du cycle. Commenter.

Exercice 2 : Capacité thermique des gaz

La capacité thermique des gaz est une grandeur thermodynamique assez facile à mesurer expérimentalement. Elle a joué un grand rôle dans la compréhension de la nature microscopique des gaz et de la matière en général. Elle a également été un point de questionnement fondamental au moment de la construction de la physique quantique. Dans cette épreuve, on se propose d'expliquer à l'aide de différents modèles théoriques les valeurs mesurées de la capacité thermique de différents gaz parfaits diatomiques à différentes températures.

I – De la molécule à l'oscillateur harmonique

On considère une molécule diatomique dont les deux atomes A et B sont liés par une liaison covalente : l'énergie potentielle d'interaction entre les deux atomes est attractive à longue portée et répulsive à courte portée. L'étude est menée dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On suppose la molécule isolée et on néglige l'interaction gravitationnelle entre les deux atomes devant l'interaction conduisant à la liaison covalente.

- Q.1** Tracer l'allure du profil d'énergie potentielle E_p de cette molécule en fonction de la longueur $\ell = AB$ de la liaison. On y fera figurer la longueur d'équilibre ℓ_e de la liaison et l'énergie de liaison E_ℓ .
- Q.2** Donner un ordre de grandeur de ℓ_e en nm et de E_ℓ en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.
- Q.3** Compte tenu de l'allure de la courbe de la **Q.1**, et moyennant une hypothèse à préciser, justifier que l'on peut assimiler la liaison covalente à un ressort dont on exprimera la constante de raideur k en fonction d'une dérivée de E_p .

On suppose cette approximation valide dans toute la suite.

- Q.4** Exprimer l'énergie cinétique de la molécule en fonction des vitesses $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ et des masses m_A et m_B des atomes A et B dans le référentiel du laboratoire.
- Q.5** Énoncer le théorème d'équipartition de l'énergie.
- Q.6** Calculer un ordre de grandeur de la vitesse caractéristique des molécules dans l'air à 300 K et sous une pression de 1 atm. On prendra $R = \frac{25}{3} \text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ pour valeur de la constante des gaz parfait et $M_a = 30 \times 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ pour la masse molaire de l'air.

II – Capacité thermique d'un gaz parfait diatomique

On s'intéresse maintenant à un gaz parfait de N molécules diatomiques identiques. On cherche à déterminer l'expression de la capacité thermique de ce gaz en exploitant le modèle développé dans la partie précédente.

- Q.7** Exprimer l'énergie interne U de cet ensemble de particules en fonction de N et de l'énergie moyenne d'une molécule $\langle E_m \rangle$.
- Q.8** Montrer que dans le modèle classique développé dans la première partie, la capacité thermique molaire $c_{V,m}$ du gaz est une constante que l'on exprimera en fonction de R .

La FIGURE 4 présente les relevés expérimentaux de la capacité thermique molaire du dichlore Cl_2 gazeux et du dihydrogène H_2 gazeux à diverses températures.

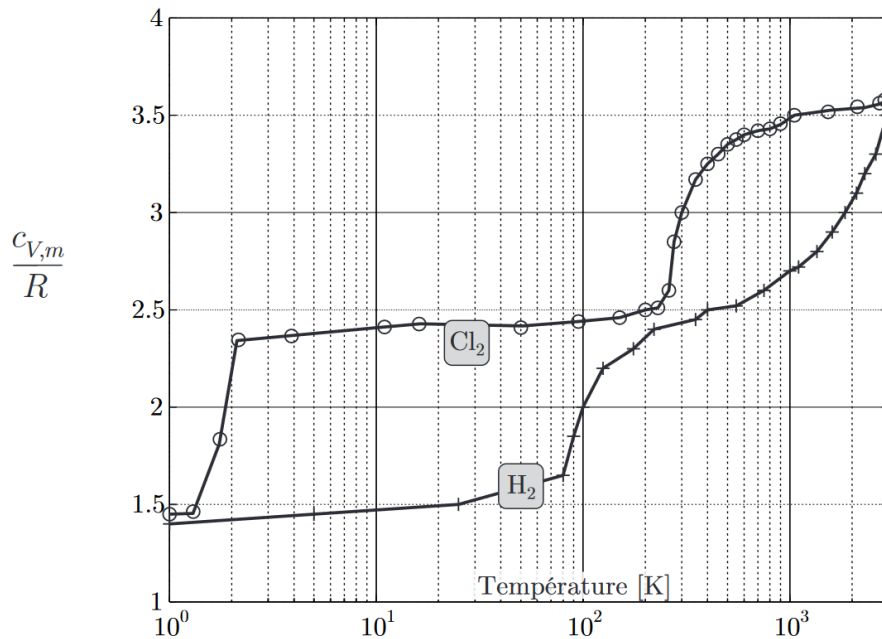


FIGURE 4 – Mesures de la capacité thermique molaire du dichlore (Cl_2) et du dihydrogène (H_2) gazeux en fonction de la température.

Q.9 Commenter les deux courbes de la FIGURE 4 au vu des prédictions théoriques obtenues précédemment.

III – Capacité thermique et quantification

Comme dans la seconde partie, on s'intéresse à un ensemble de N molécules diatomiques identiques. Ce gaz est à l'équilibre thermique à la température T . La probabilité $\pi(E_n)$ qu'une molécule de ce gaz se trouve dans un état d'énergie E_n s'écrit :

$$\pi(E_n) = A e^{-\beta E_n}$$

où β est une fonction de k_B et de T uniquement. Contrairement à la seconde partie où l'on avait utilisé l'expression classique de l'énergie, on utilise maintenant l'expression de l'énergie de l'oscillateur harmonique :

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{avec } n \in \mathbb{N} \text{ et } \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

On appelle constante de Planck réduite la grandeur $\hbar$, telle que $2\pi\hbar = h$. C'est Albert Einstein qui eût cette idée le premier en 1907 afin de tenter de régler certains problèmes de la physique classique dans le traitement du comportement des solides à basse température. L'idée est ici la même, mais rend compte de la vibration des molécules diatomiques.

Q.10 Exprimer β en fonction de k_B et de T puis la constante A en fonction de $\hbar$, ω et β .

Q.11 En déduire l'expression de l'énergie moyenne $\langle E \rangle$ de l'ensemble de ces N particules en fonction de $\hbar$, ω , β et N .

Q.12 Montrer que la capacité thermique molaire à volume constant $c_{V,m}$ de ce gaz s'écrit :

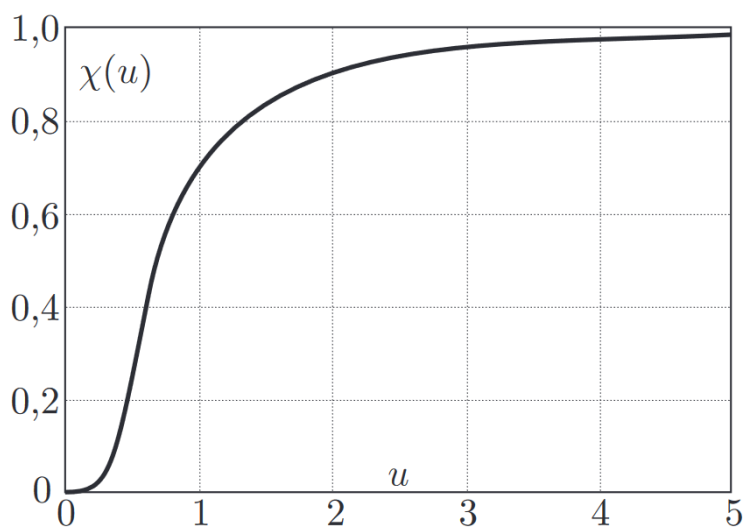
$$c_{V,m} = R \frac{\xi^2}{\sinh^2(\xi)} \quad \text{avec } \xi = \frac{\beta\hbar\omega}{2}$$

On désigne par T_v la température, dite de vibration, caractéristique des vibrations de la molécule qui est telle que $T_v = \frac{\hbar\omega}{k_B}$.

Q.13 Réécrire l'expression de $c_{V,m}$ en fonction de T_v et T .

Q.14 La table ci-dessous fournit la température de vibration de quelques molécules diatomiques. Quelle partie des mesures présentées sur la FIGURE 4 le modèle est-il censé représenter ? La théorie est-elle en accord avec l'expérience ? On pourra s'aider de la FIGURE 5 ci-dessous qui représente l'allure de la fonction $\chi(u) = \frac{u^{-2}}{\sinh^2(u^{-1})}$.

Molécule	T_v en K
$^1\text{H}_2$	6220
$^2\text{H}_2$	4390
$^1\text{H} - ^2\text{H}$	5380
Cl_2	808
Br_2	463
HCl	4230
HBr	3790

FIGURE 5 – Graphe de $\chi(u)$.

Données

Constantes diverses

Capacité thermique massique isobare de l'eau $c = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Constante des gaz parfaits $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

On prendra $0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$

Extrait de table thermodynamique relatif à l'équilibre liquide-vapeur de l'eau

θ ($^\circ\text{C}$)	P_{sat} (bar)	Liquide saturant			Vapeur sèche saturante		
		v_l ($\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$)	h_l ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$)	s_l ($\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$)	v_v ($\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$)	h_v ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$)	s_v ($\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$)
30	0,043	1,0047	125,22	0,4348	32,892	2555,92	8,4530
180	10	1,1276	763,18	2,1395	0,119 404	2777,84	6,5854
270	55	1,3053	1190,10	2,9853	0,035 05	2788,46	5,9226

avec :

θ la température du fluide

P_{sat} la pression de vapeur saturante

v_l le volume massique du liquide saturant

h_l l'enthalpie massique du liquide saturant

s_l l'entropie massique du liquide saturant

v_v le volume massique de la vapeur saturante sèche

h_v l'enthalpie massique de la vapeur saturante sèche

s_v l'entropie massique de la vapeur saturante sèche

• • • FIN • • •

Annexe du DS 2

(À détacher et à rendre avec la copie)

Q.7 et Q.13 de l'Exercice 1

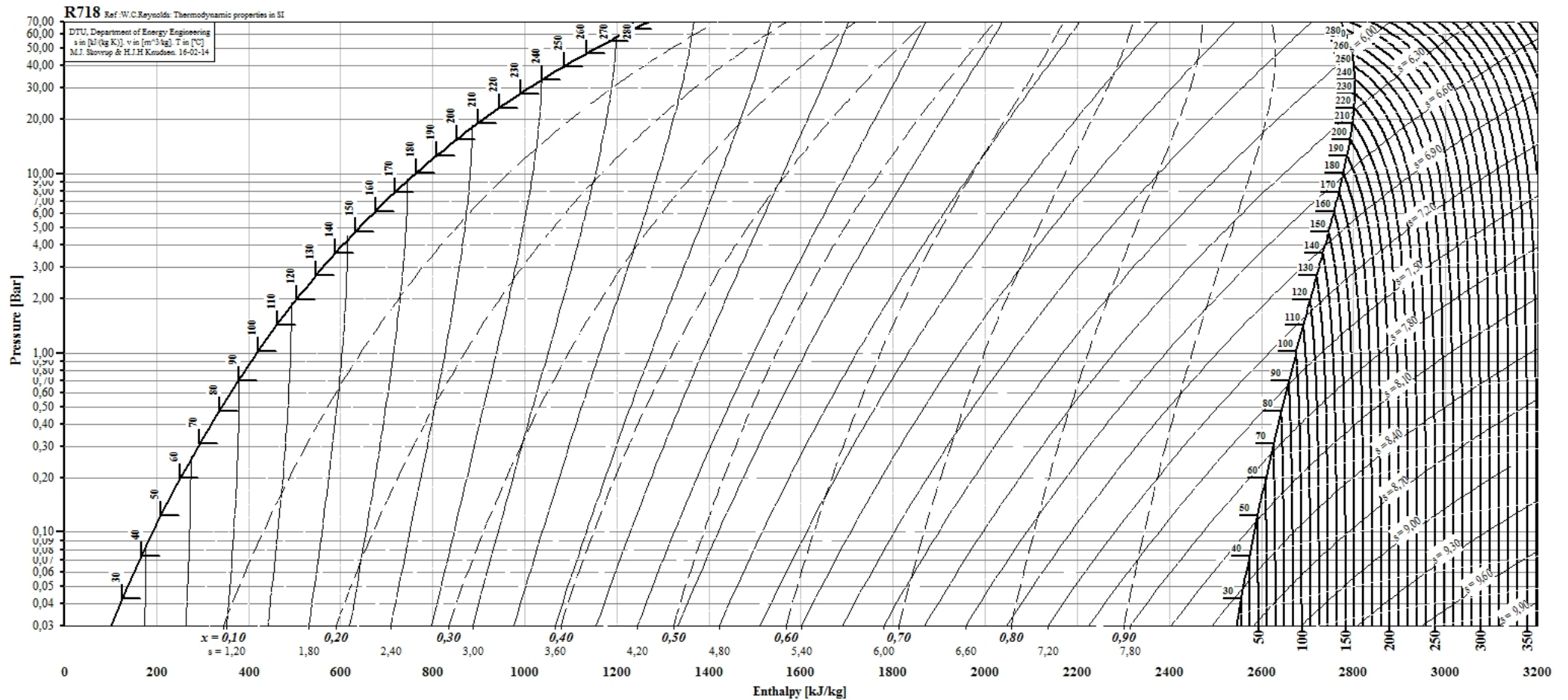


FIGURE A – Diagramme enthalpique de l'eau (les températures sont en °C)