

DS 2* (2 heures)
Physique statistique, machines thermiques

La calculatrice est autorisée

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être **encadrés**.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

Critère	Indicateur
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire.
Clarté de l'expression	La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture.
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrées.
Identification des questions et pagination	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question. La pagination est correctement effectuée.
Mise en évidence des résultats	Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence.

Nombre de critères non respectés	Palier de Malus	Effet sur la note
0	0	aucun
1–2	1	–3.3%
3–4	2	–6.7%
5–6	3	–10%

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'essentiel des données et formules utiles se trouve dans un formulaire en fin d'énoncé.

Exercice 1 : Étude d'une installation nucléaire REP

Une centrale nucléaire est un site industriel destiné à la production d'électricité, qui utilise comme chaudière un réacteur nucléaire pour produire de la chaleur. Une centrale nucléaire REP (Réacteur à Eau Pressurisée) est constituée de deux grandes zones (voir FIGURE 1) :

- une zone non nucléaire (salle des machines). Dans cette partie, semblable à celle utilisée dans les centrales thermiques classiques, s'écoule de l'eau dans un circuit secondaire. Cette eau est évaporée dans le Générateur de Vapeur (GV) par absorption de la chaleur produite dans la zone nucléaire, puis elle entraîne une turbine (T) couplée à un alternateur produisant de l'électricité, ensuite elle est condensée au contact d'un refroidisseur (rivière ou mer ou atmosphère via une tour aéroréfrigérante) et enfin, elle est comprimée avant d'être renvoyée vers le générateur de vapeur ;
- une zone nucléaire (dans le bâtiment réacteur), où ont lieu les réactions nucléaires de fission, qui produisent de l'énergie thermique et chauffent ainsi l'eau sous pression circulant dans le circuit primaire. Le transfert d'énergie thermique entre le circuit primaire et le circuit secondaire se fait dans le générateur de vapeur, où la surface d'échange entre les deux fluides peut atteindre près de 5000 m^2 (réseau de tubulures).

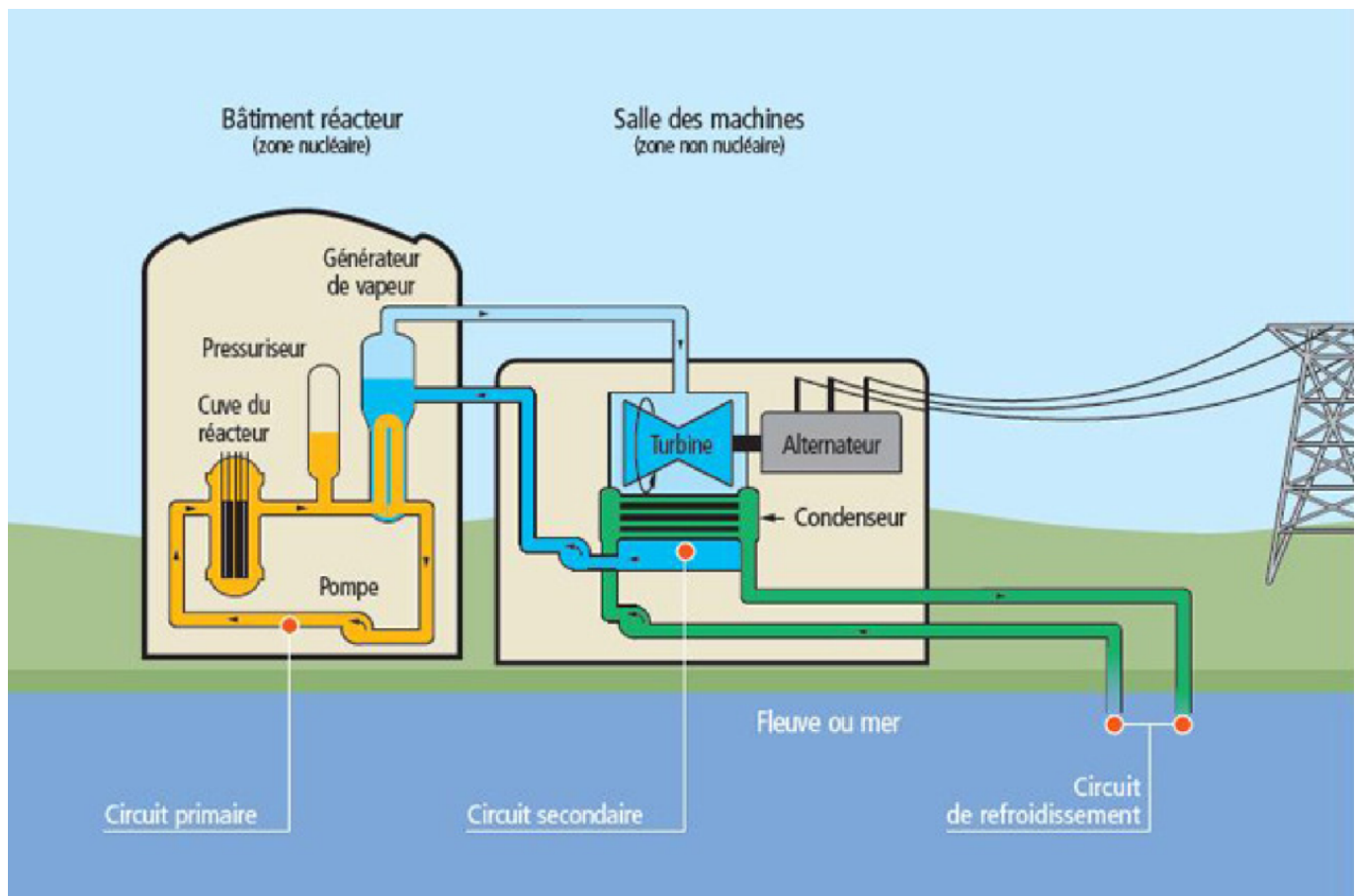


FIGURE 1 – Schéma global d'une centrale nucléaire

Considérons une centrale nucléaire REP produisant une puissance électrique $P_e = 900 \text{ MW}$. Le fluide circulant dans le circuit secondaire est de l'eau, dont l'écoulement est supposé stationnaire. Le cycle thermodynamique décrit par l'eau est un cycle ditherme moteur. L'eau liquide sera supposée incompressible et de capacité thermique massique isobare supposée constante. Le tableau en fin d'énoncé donne diverses données thermodynamiques relatives à l'équilibre liquide-vapeur de l'eau.

I – Cycle de Carnot

Dans une première approche simplifiée, on considère le moteur ditherme de Carnot fonctionnant de manière réversible entre deux sources de température T_{ch} et T_{fr} ($T_{fr} < T_{ch}$).

- Q.1** Donner, en la redémontrant, l'expression du rendement η_c de Carnot associé à ce cycle.
- Q.2** Donner la valeur numérique de ce rendement en prenant $T_{ch} = 543 \text{ K}$ et $T_{fr} = 303 \text{ K}$, les deux températures extrêmes de l'eau dans le circuit secondaire.
- Q.3** Sachant qu'un réacteur REP fournit à l'eau du circuit secondaire, via le générateur de vapeur, une puissance thermique $P_t = 2785 \text{ MW}$, que vaut le rendement thermodynamique réel η_r de l'installation ? On supposera que la puissance mécanique transmise à la turbine est intégralement convertie en puissance électrique. Commenter.

II – Cycle de Rankine

On suppose que l'eau du circuit secondaire subit les transformations suivantes (représentées dans la FIGURE 2) :

- de A à B : dans le générateur de vapeur, échauffement isobare du liquide à la pression $P_2 = 55 \text{ bar}$ jusqu'à un état de liquide saturant (état noté A'), puis vaporisation totale isobare jusqu'à un état de vapeur saturante sèche (état B) ;
- de B à C : détente adiabatique réversible dans la turbine, de la pression P_2 à la pression $P_1 = 43 \text{ mbar}$ (en C , le fluide est diphasé) ;
- de C à D : liquéfaction totale isobare dans le condenseur, jusqu'à un état de liquide saturant ;
- de D à A : compression adiabatique réversible, dans la pompe d'alimentation, de la pression P_1 à la pression P_2 , du liquide saturant sortant du condenseur. On négligera les travaux mis en jeu dans cette pompe (consommé et fourni) devant les autres énergies mises en jeu.

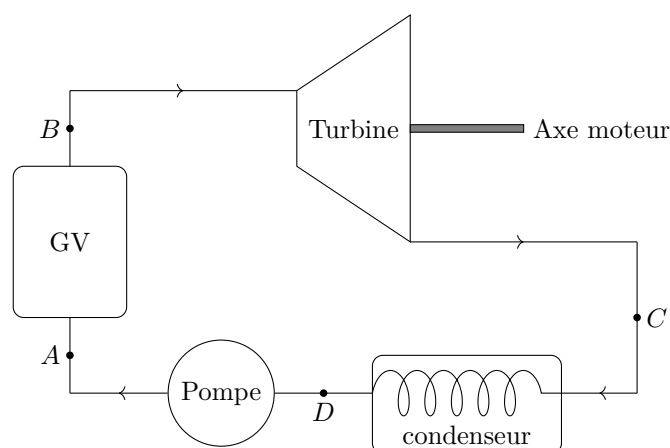


FIGURE 2 – Cycle de Rankine simple

- Q.4** Représenter dans le diagramme de Clapeyron (P, v) l'allure de la courbe de saturation de l'eau, ainsi que les isothermes T_B , T_D et $T_{critique}$, cette dernière température étant celle du point critique de l'eau. Préciser les domaines du liquide, de la vapeur, de la vapeur saturante. Représenter sur ce même diagramme l'allure du cycle décrit par l'eau du circuit secondaire. Indiquer le sens de parcours du cycle et placer les points A , A' , B , C et D .
- Q.5** D'après l'extrait de table thermodynamique donné en fin d'énoncé, quelles sont les valeurs des températures, des enthalpies massiques et des entropies massiques aux points A' , B et D ? On pourra donner les valeurs sous forme de tableau.

Dans toute la suite, on négligera les variations d'énergie cinétique et potentielle dans les bilans énergétiques.

- Q.6** Exprimer alors, sans démonstration, le premier principe de la thermodynamique pour un fluide en écoulement stationnaire recevant de manière algébrique le travail massique utile w_u et le transfert thermique massique q .
- Q.7** La FIGURE A du document réponse représente le diagramme enthalpique P, h de l'eau. Placer, avec soin et à l'échelle, les points A , A' , B , C et D du cycle. On explicitera la méthode.

- Q.8** Exprimer le travail massique w_{BC} reçu par l'eau dans la turbine. Donner sa valeur numérique en s'aidant du diagramme enthalpique.
- Q.9** Exprimer le transfert thermique massique $q_{AA'}$ reçu par l'eau liquide quand elle passe de manière isobare de la température T_A à la température $T_{A'}$ dans le générateur de vapeur. Donner sa valeur numérique. On considérera $T_A \approx T_D$.
- Q.10** Exprimer le transfert thermique massique $q_{A'B}$ reçu par l'eau quand elle se vaporise complètement dans le générateur de vapeur. Donner sa valeur numérique.
- Q.11** Calculer alors le rendement η de ce cycle. Comparer au rendement de Carnot et commenter. Comparer au rendement réel et commenter.
- Q.12** Dans quel état se trouve l'eau à la fin de la détente dans la turbine ? Donner le titre massique en vapeur à l'aide du diagramme enthalpique. En quoi est-ce un inconvénient pour les parties mobiles de la turbine ?

III – Cycle de Rankine avec détente étagée

Le cycle réel est plus compliqué que celui étudié précédemment (voir FIGURE 3). En effet, d'une part, la détente est étagée : elle se fait d'abord dans une turbine *haute pression* puis dans une turbine *basse pression*. D'autre part, entre les deux turbines, l'eau passe dans un *surchauffeur*. Les transformations sont maintenant modélisées par :

- de A à B : dans le générateur de vapeur, échauffement isobare du liquide à la pression $P_2 = 55$ bar, jusqu'à un état de liquide saturant (état noté A'), puis vaporisation totale isobare jusqu'à un état de vapeur saturante sèche (point B) ;
- de B à C' : détente adiabatique réversible dans la turbine *haute pression*, de la pression P_2 à la pression $P_3 = 10$ bar ;
- de C' à B' : échauffement isobare à la pression P_3 , dans le surchauffeur, jusqu'à un état de vapeur saturante sèche (point B') ;
- de B' à C'' : détente adiabatique réversible dans la turbine *basse pression*, de la pression P_3 à la pression $P_1 = 43$ mbar ;
- de C'' à D : liquéfaction totale isobare dans le condenseur, jusqu'à un état de liquide saturant ;
- de D à A : compression adiabatique réversible, dans la pompe d'alimentation, de la pression P_1 à la pression P_2 , du liquide saturant sortant du condenseur. On négligera les travaux mis en jeu dans cette pompe (consommé et fourni) devant les autres énergies mises en jeu.

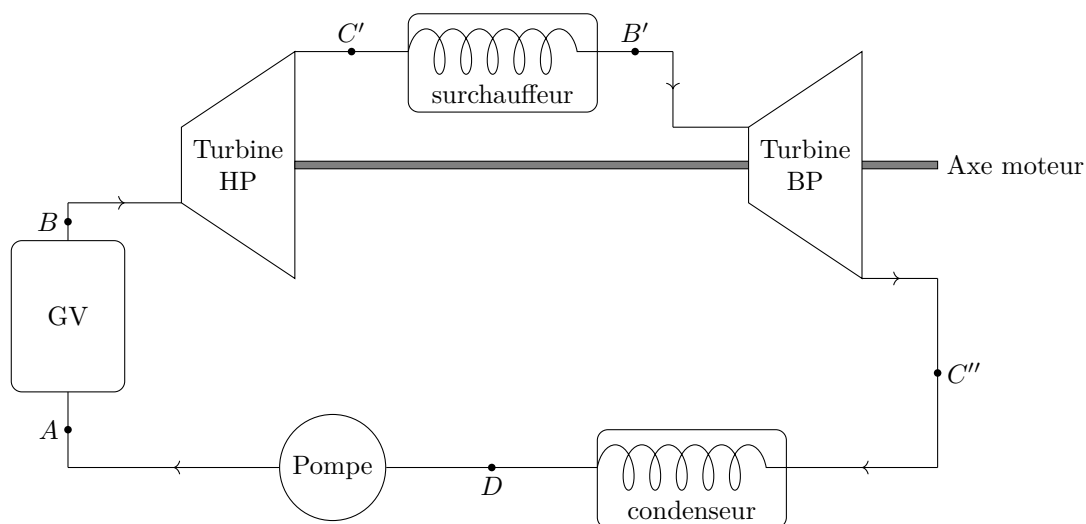


FIGURE 3 – Cycle de Rankine avec détente étagée

- Q.13** Placer les nouveaux points C' , B' et C'' sur le diagramme enthalpique FIGURE A du document réponse.
- Q.14** Comparer les titres massiques en vapeur des points C' et C'' au titre massique en vapeur du point C . Quel est l'intérêt de la surchauffe ?
- Q.15** À l'aide du diagramme enthalpique, déterminer le nouveau rendement η' du cycle. Commenter.

Exercice 2 : Réfrigérateur à détente de gaz

Les premières études des propriétés des systèmes physiques à très basses températures, et en particulier la découverte de la supraconductivité, ont été faites en utilisant des réfrigérateurs à détente de gaz, à la suite des travaux des néerlandais VAN DER WAALS et KAMERLINGH ONNES. Les parties **I** (étude statistique des gaz parfaits), **II** (modèle énergétique de VAN DER WAALS) et **III** (refroidissement par détente) sont indépendantes.

On prendra garde au fait que le modèle utilisé pour la description thermodynamique des fluides n'est pas le même : modèle des gaz parfaits dans la partie I et modèle avec interactions entre molécules dans la suite.

I – Thermodynamique des gaz parfaits

On étudie ici un système thermodynamique formé de N particules réparties sur p niveaux d'énergie ε_j ($j = 1, 2, \dots, p$) non dégénérés. Le système est maintenu à température constante T par contact avec un thermostat et on notera $\beta = 1/k_B T$.

Q.1 Rappeler la loi statistique de Boltzmann. On notera $Z(\beta) = \sum_{j=1}^p e^{-\beta \varepsilon_j}$.

Q.2 Exprimer l'énergie moyenne $\bar{\varepsilon}$ d'une des N particules du milieu en fonction de $Z(\beta)$ et de sa dérivée. En déduire l'expression de l'énergie interne $U(\beta)$ du système (on ne cherchera pas à calculer la dérivée).

Q.3 Montrer qu'on peut exprimer, en fonction de $\bar{\varepsilon}$, l'écart-type σ_{ε} associé à la moyenne $\bar{\varepsilon}$. Quel est l'écart-type σ_U associé ? Que peut-on en déduire ?

Les états possibles du système étant très nombreux, les sommes exprimant $Z(\beta)$ et donc $U(\beta)$ explicitées ci-dessus sont remplacées par des intégrales : le nombre dg d'états distincts correspondant à un intervalle d'énergie $d\varepsilon$ s'exprime alors sous la forme $dg = q(\varepsilon)d\varepsilon$ où $q(\varepsilon)$ est la densité d'états. On adoptera l'expression $Z(\beta) = \int q(\varepsilon)e^{-\beta \varepsilon} d\varepsilon$ où l'intégrale est étendue à toutes les valeurs possibles de l'énergie ε .

Q.4 Préciser l'unité (ou la dimension) de la densité d'états $q(\varepsilon)$.

On étudie maintenant les propriétés thermodynamiques d'un gaz parfait monoatomique formé de N atomes identiques, décrits dans le cadre de la mécanique classique : un atome de masse m a pour vecteur position $\vec{r}(t)$ et pour vitesse $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ relativement au référentiel d'étude, supposé galiléen et lié au récipient fixe, de volume V , qui contient ce gaz. L'énergie des molécules est purement cinétique donc $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. On admet que $q(\varepsilon)$ est proportionnel à $\sqrt{\varepsilon}$. Pour la suite, on pourra poser $q(\varepsilon) = Q\sqrt{\varepsilon}$ sans préciser la constante Q .

Q.5 En déduire l'expression de $Z(\beta)$ en fonction de ε , Q et de l'intégrale $A = \int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x} dx$ (il est aussi inutile de calculer A).

Q.6 Déterminer enfin l'énergie interne U du gaz, en fonction de N et ε . Commenter le résultat obtenu.

II – Le modèle de van der Waals

On peut raffiner le modèle du gaz parfait en considérant maintenant le modèle d'un fluide $\mathcal{F}$ constitué de molécules assimilées à des sphères de rayon r_0 en interactions : l'énergie potentielle d'interaction entre deux molécules est attractive, ne dépend que de la distance r entre leurs centres et s'écrit $\varepsilon_p = -\frac{\alpha}{r^6}$ où $r > 2r_0$ et α est une constante. Le volume total occupé par le fluide est V , la température T et l'énergie cinétique moyenne du gaz sera notée $\bar{E}_c = \frac{Nk_B}{\gamma - 1}T$.

Q.7 Quelle est la nature des interactions décrites ici ? Quel est le signe de α ?

Pour le calcul de l'interaction entre une molécule donnée de centre O (à l'origine des coordonnées) et le reste du gaz, on admet que les $N - 1$ autres molécules sont réparties uniformément en fonction de la distance r avec une densité particulière $n^* = \frac{N}{V}$ uniforme pour $r > 2r_0$ (voir FIGURE 4).

Q.8 Quel est le nombre (moyen) dN de molécules dont le centre est situé à une distance de O comprise entre r et $r + dr$? En calculant une intégrale, déduire l'énergie potentielle d'interaction moyenne $\bar{\varepsilon}_1$ de la molécule centrée sur O avec toutes les autres. On pourra considérer que $V \gg r_0^3$ pour évaluer les bornes d'intégration.

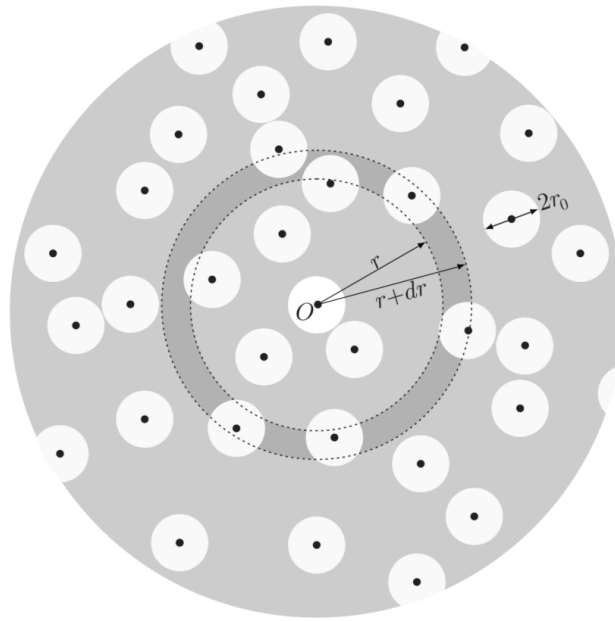


FIGURE 4 – Interaction d'une molécule avec le reste du gaz

Q.9 En déduire que l'expression de l'énergie interne du fluide $\mathcal{F}$ se met sous la forme :

$$U = \frac{Nk_B}{\gamma - 1}T - \frac{aN^2}{V}$$

dans laquelle on exprimera la constante a en fonction de α et r_0 .

Un modèle un peu plus élaboré de physique statistique permet également d'obtenir l'entropie de la même quantité de fluide $\mathcal{F}$, elle s'écrit :

$$S = S_0 + k_B N \ln \left(\frac{T^c (V - u)}{T_0^c (V_0 - u)} \right)$$

où l'exposant c ainsi que S_0 , T_0 , V_0 sont des constantes et $u = \frac{4}{3}\pi N(2r_0)^3$.

Q.10 Justifier physiquement le signe de c .

Pour toute évolution infinitésimale d'un système fluide de température T et à la pression P , on indique la relation $dU = TdS - PdV$ entre les variations dU , dS et dV de l'énergie interne, de l'entropie et du volume.

Q.11 En déduire c en fonction de γ ainsi que l'équation d'état $P = f(T, V, N)$ du fluide $\mathcal{F}$. Commenter.

III – Refroidissement par détente adiabatique

Dans cette dernière partie, les grandeurs thermodynamiques utilisées sont toujours les mêmes que dans les parties précédentes mais elle s'entendent pour une mole de fluide. On étudie les évolutions d'un fluide $\mathcal{F}$ caractérisé par l'énergie interne molaire (admise) :

$$U = \frac{RT}{\gamma - 1} - \frac{A}{V}$$

et par l'équation d'état molaire de VAN DER WAALS (également admise) : $\left(P + \frac{A}{V^2}\right)(V - B) = RT$, où A et B sont des constantes strictement positives (leurs valeurs numériques pour N_2 et H_2 figurent en fin d'énoncé) et $\gamma > 1$. Enfin, le modèle constitue une correction par rapport au modèle du gaz parfait. En particulier, on se limitera partout au corrections du premier ordre en fonction des constantes A et B .

Q.12 Montrer que l'enthalpie molaire $H(T, P)$ du fluide s'écrit $H = C_P T - KP \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_r} \right)$ où $RT_r = \frac{2A}{B}$ et $C_P > 0$ et $K > 0$ sont des constantes que l'on exprimera en fonction des données.

Q.13 Comment nomme-t-on la détente adiabatique et isenthalpique d'un fluide ? La transformation ainsi décrite est-elle réversible ? À quelle condition une détente de ce type permet-elle un refroidissement ? Faire l'application numérique pour N_2 et H_2 et conclure.

Données

Constantes diverses

Capacité thermique massique isobare de l'eau	$c = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
On prendra	$0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$

Extrait de table thermodynamique relatif à l'équilibre liquide-vapeur de l'eau

θ (°C)	P_{sat} (bar)	Liquide saturant			Vapeur sèche saturante		
		v_l ($\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$)	h_l ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$)	s_l ($\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$)	v_v ($\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$)	h_v ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$)	s_v ($\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$)
30	0,043	1,0047	125,22	0,4348	32,892	2555,92	8,4530
180	10	1,1276	763,18	2,1395	0,119 404	2777,84	6,5854
270	55	1,3053	1190,10	2,9853	0,035 05	2788,46	5,9226

avec :

θ	la température du fluide	s_l	l'entropie massique du liquide saturant
P_{sat}	la pression de vapeur saturante	v_v	le volume massique de la vapeur saturante sèche
v_l	le volume massique du liquide saturant	h_v	l'enthalpie massique de la vapeur saturante sèche
h_l	l'enthalpie massique du liquide saturant	s_v	l'entropie massique de la vapeur saturante sèche

Coefficients de l'équation d'état de Van der Waals

Pour le diazote N_2 $A = 1,4 \times 10^{-1} \text{ SI}$ et $B = 3,9 \times 10^{-5} \text{ SI}$

Pour le dihydrogène H_2 $A = 2,5 \times 10^{-2} \text{ SI}$ et $B = 2,7 \times 10^{-5} \text{ SI}$

● ● ● FIN ● ● ●

Annexe du DS 2*
(À détacher et à rendre avec la copie)

Q.7 et Q.13 de l'Exercice 1

