SPE MP ······ 2025-2026 | PROGRAMME DE COLLE 5

COLLE 2 EN 1 : DL et SÉRIES

EXERCICES : DL en tout genre

COURS ET EXERCICES : Séries de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Définition d'une série.

Convergence-Divergence d'une série. Somme d'une série.

Séries géométriques : Savoir par coeur si $|q| < 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

Somme télescopique $\sum_{p=0}^{n} (\alpha_p - \alpha_{p+1})$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (démontré avec ITL (Taylor Lagrange)).

Séries à terme positifs :

Théorème de comparaison : $\leqslant$; $\geqslant$; O ; o ; $\sim$

• : **Règle de d'Alembert**

Comparaison Séries-Intégrales :

• : **Théorème** : Si f est positive,continue et décroissante sur $[n_0, +\infty[$ alors

$(\sum f(n))$ converge **SSI** f est admet une intégrale généralisée sur $[n_0, +\infty[$.

Application fondamentale : Les séries de Riemann : $(\sum \frac{1}{n^\alpha})$ converge **SSI** $\alpha > 1$.

• : **Série Alternées** : **Théorème** fondamental : T.S.A

Abel (c'est hors programme (mais ça tombe souvent aux concours) et cela a été fait en classe) (+dèm.)

Somme des séries à l'aide des séries télescopiques : $\sum_{n=0}^{N} (u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_0$ et **correspondance bijective** entre suites et séries. Applications fondamentales :

• Convergence de la suite $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$

• Démonstration [non exigible : au moins les grande ligne et notamment $\exists \lambda > 0$ tel que $n! \sim \lambda\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$] de l'équivalent de Stirling

Développement décimal (propre et impropre) (révision de MPSI)

• : **Produit de Cauchy** de 2 séries Absolument convergentes (cas positif puis cas complexe)

• : **Sommation des relations de comparaisons : O, o et $\sim$**

Prévisions : Séries doubles, familles sommables et probabilités.