Exercice 1 et 1*

Corrigé des DS3 et DS3*

1°) voir page 5

2°) $\{1, 2, 5\} \in A_6$, $\{1, 3, 4, 6\} \in A_6$

$\{1, 3\} \in B_{10}$, $\emptyset \in B_{10}$, $\{7\} \in B_{10}$, $\{2, 4, 6, 8, 10\} \in B_{10}$

3°) $A_n \subset \mathcal{P}([\![1, n]\!])$ or $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$ fini, de cardinal 2^n

idem pour B_n , d'où $\boxed{|A_n| \leq 2^n \text{ et } |B_n| \leq 2^n}$

Avec la définition de l'énoncé, $X \in A_n$ si on peut trouver dans $[\![1, n]\!]$ 2 entiers consécutifs. On a donc clairement $A_0 = \emptyset$ et $B_0 = \{\emptyset\}$ d'où $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$

4°) $\mathcal{P}([\![1, 1]\!]) = \{\emptyset, \{1\}\}$ donc $\boxed{a_1 = 0 \text{ et } b_1 = 2}$

de même pour 2 et 3 : $\boxed{a_2 = 1 \text{ et } b_2 = 3}$

et $A_3 = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3\}\}$ donc

$\boxed{a_3 = 3 \text{ et } b_3 = 5}$ $\quad (b_3 = 2^3 - a_3)$

5) On a $H \amalg K = B_{n+2}$ ⓶

* Si $X \in H$, il est de la forme : $X = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k < n+2\}$
(avec $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$)

Comme $X \notin A_n$, $\alpha_k \neq n+1$, donc :

$$X = \{\alpha_1 < \dots < \alpha_k \leq n\} \amalg \{n+2\}$$

On a donc bijection entre H et B_n :

$$\phi : H \longrightarrow B_n \quad \text{bijective}$$
$$X \longmapsto \{\alpha_1 < \dots < \alpha_k\}$$

Donc $\underline{|H| = b_n}$

* Si $X \in K$, $X = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \leq n+1\}$

et K en bijection avec B_{n+1} d'où $|K| = b_{n+1}$

$\underline{\text{d}}$ $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* ; \ b_{n+2} = b_{n+1} + b_n}$

6) Comme $\forall n \geq 1$, $a_n = 2^n - b_n$, on en déduit :

$$a_{n+2} = 2^{n+2} - b_{n+2} = 2^{n+2} - b_{n+1} - b_n$$
$$= 2^{n+2} - (2^{n+1} - a_{n+1}) - (2^n - a_n)$$

d'où $\forall n \geq 1$ $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + \underbrace{2^{n+2} - 2^{n+1} - 2^n}_{= 2^n(4-2-1)}$

$$= a_{n+1} + a_n + 2^n$$

Pour $n = 0$, $a_2 = 1$ et $a_1 + a_0 + 2^0 = 0 + 0 + 1 = 1 = a_2$

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 2^n}$

8°) Voir page 5

7°)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	0	0	1	3	8	19	43	94	201
b_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55

9°) Comme la formule "a_n" est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, la formule "b_n" l'est aussi pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a (suite de Fibonacci) : $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ \

$\forall n \in \mathbb{N}$; $b_n = \lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ $(r^2 - r - 1 = 0)$

$b_0 = \lambda + \mu = 1$ et $b_1 = \lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 2$

$$\begin{cases} \mu = 1 - \lambda \\ \lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1 - \lambda \\ \lambda\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] = 2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1 - \lambda \\ \lambda\sqrt{5} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{5}}$ et $\mu = \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{5}}$, comme $a_n = 2^n - b_n$ on conclut :

d) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = 2^n - \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$ (4)

10) On évalue $\frac{a_n}{2^n}$: comme $a_n = 2^n - \lambda r_1^n - \mu r_2^n$ et que $|r_1| < 2$ et $|r_2| < 2$, $\left(\frac{r_i}{2}\right)^n \to 0$, d'où

$a_n \underset{+\infty}{\sim} 2^n$ donc $\frac{a_n}{2^n} \sim 1$ d'où $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2^n} = 1$

donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 \quad \left|\frac{a_n}{2^n} - 1\right| \leq \varepsilon = 0{,}01$

soit $\boxed{\forall n \geq n_0 : \quad \frac{a_n}{2^n} \geq 0{,}99}$ (rem, avec Python on trouve $n_0 = 24$)

11) On s'inspire de Fibo, comme $a_n = 2^n - \lambda r_1^n - \mu r_2^n$, on part de l'équation $(r-2)(r-r_1)(r-r_2)$
$= r^3 - 3r^2 + r + 2$

d'où a_n vérifie : $\boxed{a_{n+3} - 3a_{n+2} + a_{n+1} + 2a_n = 0}$

car on vérifie que (2^n), (r_1^n) et (r_2^n) sont solutions de $(*)$

d'où par combinaison linéaire, (a_n) vérifie aussi $*$.

```python
# Dénombrement des parties de [|1,n|] contenant deeux entiers consécutifs.

from math import *


def test(n,L):
    aux=False
    i=0
    while aux==False and i<n-1:
        if L[i+1]==L[i]+1:
            aux=True
        i=i+1
    return(aux)


def a(n):
    if n<=1:
        return(0)
    else:
        return(a(n-1)+a(n-2)+2**(n-2))

def b(n):
    if n==0:
        return(1)
    elif n==1:
        return(2)
    else:
        return(b(n-1)+b(n-2))



def proportion(n):
    return(a(n)/(2**n))

prop=0
n=1
while prop<0.99:
    prop=proportion(n)
    n=n+1
print("L'entier n à partir duquel la proportion de a_n est au moins de 99% est" ,n)
```

e3a MP 2017

exercice 2

1) $\forall t \in \mathbb{R}$, $H'(t) = 30t^2 + 62t + 71$ $\left(>0 \text{ si } t \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\right)$

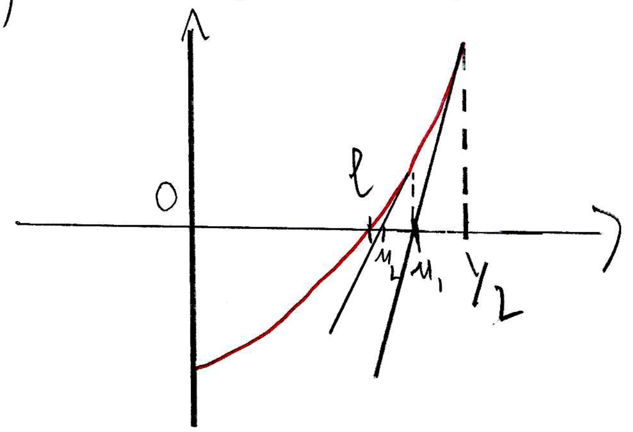
d'où

t	0		$1/2$
H'		$+$	
H	$-a$	$\nearrow$	$\frac{89}{2} - a$

Comme $a \in]0, 29[$, $-a < 0$ et $\frac{89}{2} - a > \underbrace{\frac{89}{2} - 29}_{= 31/2 > 0}$

par le théorème de la bijection : $\boxed{\exists !\, \ell \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\mid H(\ell) = 0}$

2a) Comme $H''(t) = 60t + 62 \geq 0$, H convexe $/]0, 1/2[$



c'est la méthode de Newton.

Tangente au point $(1/2, H(1/2))$:

$$\mathcal{C}_0 / \; y - H(1/2) = H'(1/2)(x - 1/2)$$

cherchons $\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_H$: $0 - H(1/2) = H'(1/2)(x - 1/2)$

comme $H' > 0$ sur $\mathbb{R}^+$, $H'(1/2) > 0$ et $x = \frac{1}{2} - \frac{H(1/2)}{H'(1/2)}$

cqs $u_1 = u_0 - \dfrac{H(u_0)}{H'(u_0)}$ est bien défini, de plus

* $u_1 \leq 1/2$ car $H(u_0) > 0$ et $H'(u_0) > 0$

* Par convexité $H(u_1) \geq 0$ donc $u_1 \geq \ell$

donc $\underline{u_1 \in [\ell, 1/2]}$

Supposons construit $u_n \in [\ell, 1/2]$, alors on fait la m̂ chose pour passer de n à $n+1$:

tg au pt $(u_n, H(u_n))$:

$$T_{g_n} : y - H(u_n) = H'(u_n)(x - u_n)$$

comme $u_n \in [\ell, 1/2]$, $H'(u_n) > 0$ et $\underline{u_{n+1} = u_n - \dfrac{H(u_n)}{H'(u_n)}}$

on a idem u_1, $u_{n+1} \in [\ell, 1/2]$

d° : $\boxed{(u_n) \text{ définie et } \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = u_n - \dfrac{H(u_n)}{H'(u_n)}}$

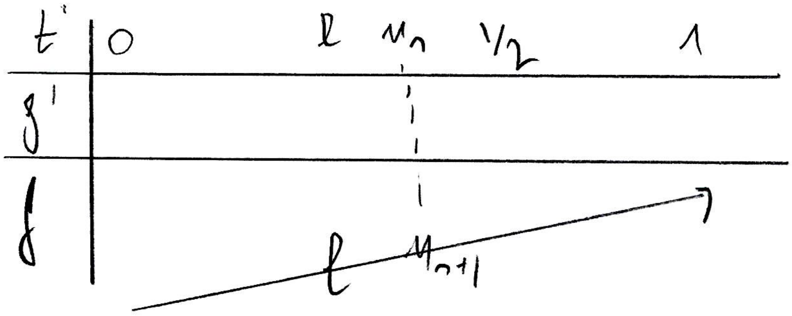
b) $f(t) = t - \dfrac{H(t)}{H'(t)}$ et f $C^1/[0,1]$ ($H' > 0$ et TG)

$$\forall t \in [0,1] : f'(t) = \cancel{1} - \frac{\cancel{H'(t)}}{\cancel{H'(t)}} + \frac{H(t)H''(t)}{H'(t)^2} \geq 0$$

d° $\boxed{f \text{ croissante sur } [0,1]}$

On a déjà vu que $u_n \in [\ell, 1/2]$ et on le retrouve

avec f :



$$u_{n+1} = f(u_n) \in [f(\ell), f(1/2)] = \left[\ell, \frac{1}{2} - \frac{H(1/2)}{H'(1/2)}\right] \subset [\ell, 1/2]$$

Par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in [\ell, 1/2]}$

Remarque : On pouvait se passer de la localisation $u_n \in [\ell, 1/2]$ au a) en remarquant que $\forall t \in \mathbb{R} \ H'(t) \neq 0$

c) On applique ITL pour H entre $u_n = a$ et $\ell = b$:

$$|H(\ell) - H(u_n) - (\ell - u_n) H'(u_n)| \leq \frac{(u_n - \ell)^2}{2!} \sup_{t \in [\ell, u_n]} |H''(t)|$$

Or $H''(t) = 60t^2 + 62t + 71$ et $H'' \nearrow$ sur $[0, 1/2]$.

donc $\forall t \in [\ell, u_n] \subset [0, 1/2]$: $H''(t) \leq H''(1/2) = 92$
$= 2 \times 46$!

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : |H(\ell) - H(u_n) - (\ell - u_n) H'(u_n)| \leq 46 (u_n - \ell)^2}$

d) Comme $H'(u_n) > 0$, on peut multiplier l'inégalité du c) par $\dfrac{1}{H'(u_n)}$. Sachant que $H(l) = 0$, on a :

$$\left| \frac{H(u_n)}{H'(u_n)} - (l - u_n) \right| \leq \frac{46(u_n - l)^2}{H'(u_n)}$$

$$\Leftrightarrow \quad |u_{n+1} - l| \leq \frac{46}{H'(u_n)} (u_n - l)^2$$

Comme H' est positive et croissante sur $\mathbb{R}^+$,

$H'(u_n) \geqslant H'(0) = 71$

d'où $\boxed{|u_{n+1} - l| \leq \dfrac{46}{71} (u_n - l)^2}$

$$\frac{46}{71} - \frac{7}{10} = \frac{460 - 497}{710} = \frac{-37}{710} < 0$$

d'où $\boxed{|u_{n+1} - l| \leq \dfrac{7}{10} |u_n - l|^2}$

e) $|u_2 - l| \leq \dfrac{7}{10} |u_1 - l|^2 \leq \dfrac{7}{10} \left[\dfrac{7}{10} |u_0 - l|^2 \right]^2$

$\leq \dfrac{7}{10} \times \dfrac{49}{100} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^4$ car $|u_0 - l| \leq \left|\dfrac{1}{2} - 0\right|$

$$\frac{7 \times 49}{16 \times 1000} - 0{,}03 = \frac{7 \times 49}{16000} - \frac{30 \times 16}{1000 \times 16} = \alpha$$

or $7 \times 49 = 343$ et $30 \times 16 = 480$ donc $\alpha = \dfrac{-137}{16000} < 0$

d°) $\boxed{|u_2 - \ell| \leqslant 0{,}03}$

(5)

Remarque : $|u_5 - \ell| \leqslant 3.10^{-15}$! Donc cvg rapide !

3)

```
def H(a,t):
    return 10*t**3+31*t**2+71*t-a

def dH(a,t):
    return 30*t**2+62*t+71

def u(a,n):
    if n==0:
        return 1/2
    else:
        return u(a,n-1)-H(a,u(a,n-1))/dH(a,u(a,n-1))

def suite(a,n):
    return [u(a,i) for i in range(n+1)]

In [2]: suite(13,10)
Out[2]:
[0.5,
 0.2123287671232877,
 0.17059833894759255,
 0.16981786497056808,
 0.16981759800743482,
 0.1698175980074036,
 0.1698175980074036,
 0.1698175980074036,
 0.1698175980074036,
 0.1698175980074036,
 0.1698175980074036]
```

plus de différence !

exercice 3 et 2*

1°) Tout d'abord comme $f(K) \subset K$, si $x_n \in K$, $x_{n+1} = f(x_n) \in K$

Comme $x_0 \in K$, par récurrence : $\boxed{(x_n) \text{ bien définie}}$

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n > p$. Effectuons une récurrence "finie" :

$$\begin{cases} H_i : |x_0 - x_{n-p}| \leq |x_i - x_{n-p+i}| \\ i \in [\![0, p]\!] \end{cases}$$

* $i = 0$: $|x_0 - x_{n-p}| \leq |x_0 - x_{n-p+0}|$; vraie !

* Supposons H_i vraie et $i < p$, on a alors :

$$|x_0 - x_{n-p}| \leq |x_i - x_{n-p+i}| \leq |f(x_i) - f(x_{n-p+i})|$$

$$\leq |x_{i+1} - x_{n-p+i+1}| \text{ donc } H_{i+1} \text{ vraie}$$

csq : H_p est vraie. cl : $\boxed{\forall n > p : |x_0 - x_{n-p}| \leq |x_n - x_p|}$

2°a) (Idem B.W. du C !)

Comme (x_n) est une suite du segment $K = [a, b]$, elle est bornée, donc par B.W., $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ str $\nearrow$ tel que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers λ. De plus, $\lambda \in K = [a, b]$

$(\forall n \quad a \leq x_{\varphi(n)} \leq b)$

②

Ensuite on considère $(y_{\varphi_1(n)})$: c'est une suite de K

d'où $\exists \mu \in K$ et $\exists \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ st $\nearrow$ tel que $(y_{\varphi_1 \circ \psi(n)})$

cvg vers μ. Posons $\underline{\varphi = \varphi_1 \circ \psi}$, on a $\underline{\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ st} \nearrow}$

et $\boxed{(x_{\varphi(n)}) \text{ et } (y_{\varphi(n)}) \text{ convergent dans } K.}$

b) on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ donc avec le 1°), on a :

$$0 \leqslant |x_0 - x_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}| \leqslant |x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}| \xrightarrow[n\to\infty]{} |\lambda - \lambda|.$$

Par théorème d'encadrement, on a $\boxed{(x_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}) \text{ cvg vers } x.}$

On fait de même pour (y_n) : $\boxed{(y_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}) \text{ cvg vers } y}$

c) * On a $|x-y| = |x_0 - y_0| \leqslant |f(x_0) - f(y_0)| = |x_1 - y_1|$

donc $\underline{|x-y| \leqslant |x_1 - y_1|}$

* Par récurrence on montre que $\forall i \in \mathbb{N}^*$: $|x_1 - y_1| \leqslant |x_i - y_i|$

et on applique ceci pour $\left| \begin{array}{l} i = \varphi(n+1) - \varphi(n) \in \mathbb{N}^* \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$:

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_1 - y_1| \leq |x_{\varphi(n+1)-\varphi(n)} - y_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}|$

Tout cvg, qd $n \to +\infty$, il vient $\underline{|x_1 - y_1| \leq |x - y|}$

d'où : $\boxed{|x - y| = |x_1 - y_1|}$

3°) on a donc $\forall (x,y) \in K^2 \ |f(x) - f(y)| = |x - y|$: f est donc une $\boxed{\text{isométrie}}$ (elle <u>conserve les distances</u>)

$\forall a \in K, \forall \varepsilon > 0, \underline{\exists \alpha = \varepsilon > 0} \ | \ \forall x \in K : |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

d'où : $\boxed{f \text{ est } C^0 \text{ sur } K}$ (c'est la démo. de lipschitz. $\Rightarrow C^0$)

4°) voir page 5

5°) a) $\forall (x,y) \in K^2$: $f(x) = f(y) \Rightarrow |x - y| = |f(x) - f(y)| = 0$

$\Rightarrow x = y$ d'où : $\boxed{f \text{ injective}}$

b) Soit $g : K \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$x \longmapsto |f(x) - x_0|$ $\quad g$ est $\underline{C^0 \text{ sur } K}$ par TG et le 3°)

d'où $g(K) = [m, M]$ image d'1 segment par g $C^0/_K$

on a $[m, M] \subset \mathbb{R}^+$. Supposons $m = 0$ donc $0 \in g(K)$:

$\exists c \in K \mid m = 0 = g(c)$ donc $f(c) = x_0$; on en déduit que $x_0 = f(c) \in f(K)$; Absurde.

d : $\boxed{m > 0. \text{ Posons } \alpha = m > 0 \; ; \; \forall x \in K \; |f(x) - x_0| = g(x) \geq \alpha}$

c) En effectuant la même récurrence qu'au 1°) (et en remplaçant $\leq$ par $=$), on a $\forall n > p : |u_0 - u_{n-p}| = |u_n - u_p|$

Comme $u_0 = x_0$ et n & p jouent des rôles symétriques :

$$\boxed{\forall n \neq p : \; |u_n - u_p| = |x_0 - u_{|n-p|}| \geq \alpha}$$

($|n-p| \geq 1$ donc $u_{|n-p|} = f(x)$ avec $x = u_{|n-p|-1}$)

d) Par B.W. $\exists \lambda \in K \; \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ st.↗ $\mid u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} \lambda$.

d'où $|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}| \xrightarrow[n \to \infty]{} |\lambda - \lambda| = 0$; Absurde car $\forall n \in \mathbb{N}$; $\varphi(n+1) \neq \varphi(n)$ donc $\forall n$; $|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}| \geq \alpha$ $(0 \geq \alpha)$

On a donc $x_0 \in K \Rightarrow x_0 \in f(K)$; $\exists t \in K_0 \mid x_0 = f(t)$;

f est donc surjective avec le a) : d' : $\boxed{f \text{ est bijective de } K \text{ dans } K}$

e) Grâce aux accroissements finis :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \ x<y \quad \exists c \in \underbrace{]x,y[}_{\subset \mathbb{R}^+} \setminus e^y - e^x = (y-x)e^c$$

Comme $c \geq 0$, $e^c \geq 1$ d'où $|e^y - e^x| \geq |y-x|$

Par rôles symétriques de x et y :

$$\boxed{\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \quad |e^x - e^y| \geq |x-y|}$$ (valable aussi si $x=y$)

<u>Malgré cela, on n'a pas</u> :

$$\underline{\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \quad |e^x - e^y| = |x-y|}$$

Sinon pour $y=0$: $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad e^x - 1 = x$ soit

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = 1 + x$: absurde (par exemple en dérivant 2 fois).

<u>Remarque</u> : si on note $K = \mathbb{R}^+$, on a $f(K) \subset K$

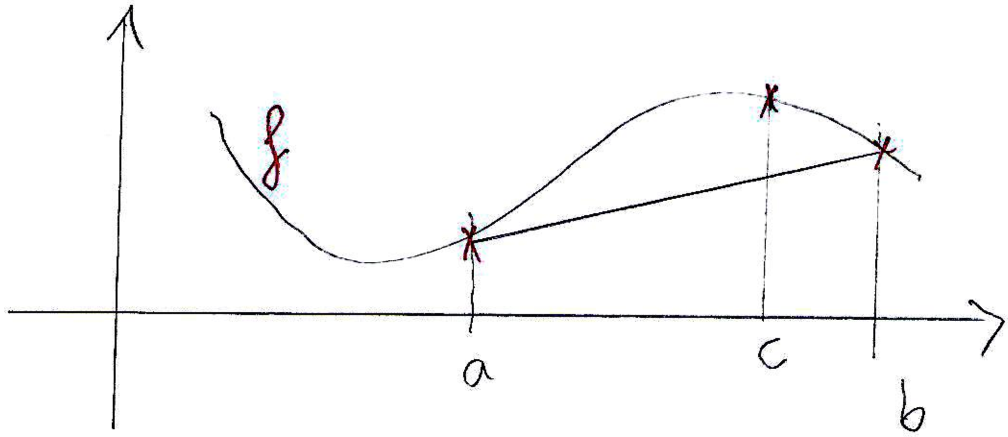
Pour avoir le 3), il est essentiel que K soit un segment (compact).

Exercice 3*

1) Pour $t = \frac{1}{2} \in [0,1]$ $(1-t)x + ty = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$

donc $\boxed{f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}}$

2)



3) a) Par TG, g est continue sur $\mathbb{R}$ $(b-a \neq 0)$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}$:

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(\frac{x+y}{2} - a\right) + f(a)\right]$$

l'idée (banquette) $a = \frac{a+a}{2}$

$$= f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(\frac{x-a}{2} + \frac{y-a}{2}\right) + \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(a)\right]$$

$$= \underbrace{f\left(\frac{x+y}{2}\right)}_{\leq \frac{f(x)+f(y)}{2}} - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)\right] - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(y-a) + f(a)\right)\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}g(y)$$

d° $\boxed{g\ C^0 \text{ et semi-convexe sur } \mathbb{R}}$

b) $g(a)=0$, $g(b)=0$ et $g(c)=f(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)-f(a)$

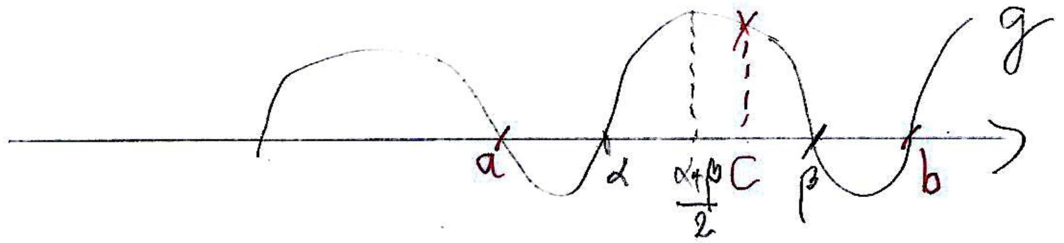
or comme $c=(1-t)a+tb$, $t=\frac{c-a}{b-a}$

donc $g(c)=f(c)-t(f(b)-f(a))-f(a)$

$= f(c)-(1-t)f(a)-tf(b)>0$

d° $\boxed{g(a)=0,\ g(b)=0 \text{ et } g(c)>0}$

4°)



* G est borné par a et C
* $a\in G$ donc $\underline{G\neq\emptyset}$

cqs $\alpha=\sup G$ existe et $\alpha\in[a,c]$

* Mq $\alpha\in G$: $\exists (u_n)$ suite de G telle que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$, par critère séquentiel de la continuité de g en α ;

$g(u_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} g(\alpha)$, or $\forall n\in\mathbb{N}$ $g(u_n)=0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

par unicité de la limite, $\underline{g(\alpha)=0}$ d° $\boxed{\alpha\in G}$

On en déduit que $\underline{g(\alpha) = g(\beta) = 0} = \underline{\dfrac{g(\alpha)+g(\beta)}{2}}$

Comme $\alpha \leqslant c$ car $\alpha \in G$ et $\alpha \neq c$ car $g(\alpha) = 0$ et $g(c) > 0$

donc $\alpha < c$ et de même $c < \beta$. : $c \in]\alpha, \beta[$

D'autre part $\forall x \in]\alpha, \beta[\; g(x) \neq 0$, or $\dfrac{\alpha+\beta}{2} \in]\alpha, \beta[$.

Si $g\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) < 0$, par T.V.I. il existerait

γ entre $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ et c tel que $g(\gamma) = 0$: Absurde

donc $\underline{g\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)} > 0 = \dfrac{g(\alpha)+g(\beta)}{2}$: $\underline{\text{absurde}}$ car g

est $\underline{\text{demi convexe}}$ $\left(g\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \leqslant \dfrac{g(\alpha)+g(\beta)}{2}\right)$

5) En conséquence $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0,1]$:

$$f((1-t)a + tb) \leqslant (1-t)f(a) + tf(b)$$

cl° $\boxed{f \text{ convexe sur } \mathbb{R}}$

exercice 4*

1/ * Par T.G. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-0+0=1$

* Rien du tout (cas limite de d'Alembert)!

2) $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{-a}{n}$

donc à partir d'1 certain rg n_0,

$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$ et $\frac{-a}{n}$ sont de même signe.

Comme $a>0$: $\forall n \geq n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \leq 0$

c'est à dire ($u_n > 0$) :

$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} \leq u_n$ cqs (u_n) décroissante

De plus (u_n) est minorée par 0

cl $\boxed{(u_n) \text{ cvg}}$ et $\lim_{n\to\infty} u_n \geq 0$

3) On reprend les notations du 2/ avec $a<0$

on a : $\forall n \geq n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \geq 0$

d'où $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} \geq u_n$

<u>cqs</u> $\forall n \geq n_0 \quad u_n \geq u_{n_0} > 0 \; (*)$

Si (u_n) convergeait vers l on aurait avec $(*)$

$l \geq u_{n_0} > 0$ donc $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \neq 0$

<u>cl</u> $\boxed{(\sum u_n) \text{ diverge grossièrement}}$

4) $x_n = \ln\left(\frac{(n+1)^a u_{n+1}}{n^a u_n}\right) = a \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

$= a\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \ln\left(1 - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$= \cancel{\frac{a}{n}} - \frac{a}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cancel{\frac{a}{n}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$, à vérifier

Comme $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$, $\left(\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ et $\left(\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ sont des séries convergentes par T.C. on a :

$\boxed{(\sum x_n) \text{ est une série convergente}}$

5) On en déduit que la <u>suite</u> (S_n) par $S_n = x_1 + \dots + x_n$ est convergente. Or

$S_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \ln v_{p+1} - \ln v_p = \ln v_{n+1} - \ln v_1$

donc $\ln v_{n+1} = S_n + \ln v_1$ d'où par T.G. :

$(\ln v_{n+1})$ converge (et $\lim\limits_{n \to \infty} \ln v_{n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} S_n + \ln v_1$)

Posons $l = \lim\limits_{n\to\infty} (\ln v_n)$, on a : ③

$\lim\limits_{n\to\infty} v_n = e^l$ posons $\lambda = e^l \neq 0$ d'où :

$v_n \sim \lambda$ et donc $\boxed{u_n \sim \frac{\lambda}{n^a}}$

6°) cqs $\boxed{(\sum u_n) \text{ cvg} \Leftrightarrow a > 1}$ (Par T.C. et Riemann)

7°) $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}{2\times 4\cdots\times(2n+2)} \times \frac{2\times 4\times\cdots\times 2n}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}$$

$$= \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}}$$

$$= \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= 1 - \frac{1/2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$ (bien vérifier le O)

d'où avec $a = \frac{1}{2} < 1$: $\boxed{(\sum u_n) \text{ est dvg}}$