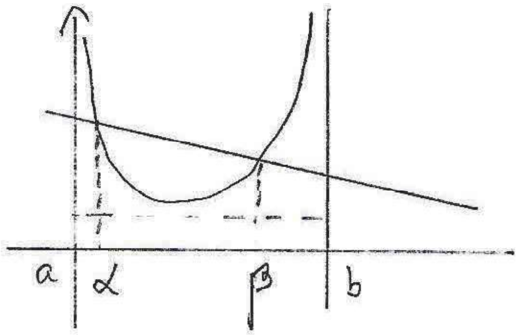
Dm3 : Corrigé

exercice 1



1.

* Soit $a<\alpha<\beta<b$. On sait que f est au dessus de la droite portée par la corde (α,β) à gauche de α et à droite de β.

On a donc $\forall x\in]a,\alpha]$, $f(x)\geqslant A(x-\alpha)+f(\alpha)$ avec $A=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

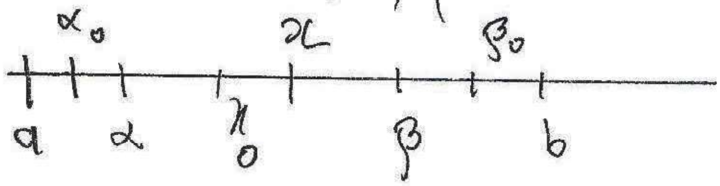
$$\geqslant -|A|\cdot|x-\alpha|-|f(\alpha)|$$
$$\geqslant -|A|\cdot|a-\alpha|-|f(\alpha)|=m_1$$

de même $\forall x\in[\beta,b[$, $f(x)\geqslant A(x-\alpha)+f(\alpha)$

$$\geqslant -|A|\cdot|b-\alpha|-f(\alpha)=m_2$$

On a donc $\forall x\in]a,\alpha]\cup[\beta,b[\ \ f(x)\geqslant \min(m_1,m_2)$

* Montrons que f est continue sur $[\alpha,\beta]$. Pour cela utilisons les 3 pentes :



$\forall x_0\in[\alpha,\beta]$

$\forall x\in[\alpha,\beta]$: $P_{\alpha_0,\alpha}\leqslant P_{x_0,x}\leqslant P_{\beta,\beta_0}$

cqs $\forall x \in [\alpha, \beta]$ $k \leq \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq k'$

avec $k = p_{\alpha_0, \alpha}$ et $k' = p_{\beta_0, \beta}$ indépendants de x

On a donc $f(x) - f(x_0) \underset{x_0}{=} O((x - x_0)) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

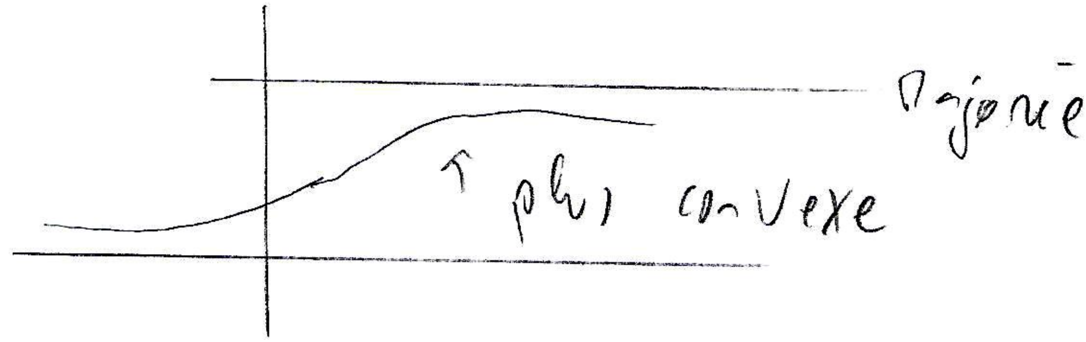
d'où f continue en x_0.

Comme l'image d'un segment est un segment par une fonction continue, $\exists m_3 \in \mathbb{R}$ /

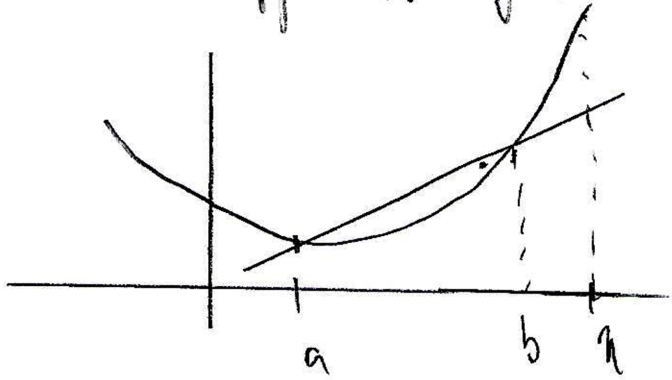
$\forall x \in [\alpha, \beta]$ $f(x) \geq m_3$

$$\text{d}^\circ : \boxed{\begin{array}{c} \forall x \in]a, b[\; ; f(x) \geq \min(m_1, m_2, m_3) \\ \text{et } f \text{ minorée sur }]a, b[\end{array}}$$

2.



* Soit $a < b$ supposons $f(a) < f(b)$ alors



$\forall x > b \quad f(x) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par th. d'encadrement.

Absurde car f majorée$/\mathbb{R}$

De même si $f(a) > f(b)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

d $\boxed{f \text{ est constante sur } \mathbb{R}.}$

exercice 2

1.) $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x - x^2$

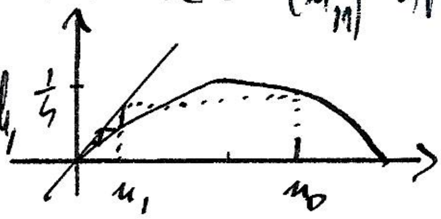
x	0		$1/2$		1
f	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0

$I = [0, \frac{1}{2}]$ stable par f, $u_1 \in I$ $\longrightarrow$ (u_n) est bornée

et f croissante sur I donc (u_n) monotone.

donc (u_n) cvg comme 0 seule limite possible,

d'où : $\boxed{\lim u_n = 0}$



2) $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$ donc $\sum_{n=0}^{N} u_n^2 = u_0 - u_{N+1}$ (telescopique)

d'où $\boxed{\left(\sum u_n^2\right) \text{ cvg et } \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 = u_0}$

3) * $\sum_{n=0}^{N} \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \sum_{n=0}^{N} \ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln u_{N+1} - \ln u_0 \to \ln 0 = -\infty$

d'où $\boxed{\left(\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right) \text{ diverge}}$ (et $\forall n$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 0$ donc $\ln$ existe)

* $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln\left(\frac{u_n - u_n^2}{u_n}\right) = \ln(1 - u_n) \underset{+\infty}{\sim} -u_n$ car $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

d'où $-\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim u_n \geqslant 0$ et comme $\left(\sum \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ dvg :

par TC on a : $\boxed{\left(\sum u_n\right) \text{ diverge}}$

4) Récurrence : H_n : $u_n < \frac{1}{n+1}$

H_0 : oui ! , supposons H_n vraie $u_n < \frac{1}{n+1}$

$u_{n+1} = f(u_n)$ or f croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ donc :

$\forall p \geqslant 1$ $\frac{1}{p+1} \leqslant \frac{1}{2}$

si $n = 0$ H_1 est vraie ($u_1 \leqslant \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$)

si $n \geq 1$ $0 \leq u_n < \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$

donc $g(u_n) = u_{n+1} \leq g\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$

or $\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \frac{1}{n+2} = \frac{-1}{(n+1)^2(n+2)} < 0$

cqs $g\left(\frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{n+2}$ ie H_{n+1} vraie

cl $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < \frac{1}{n+1}}$

* $(n+1)u_{n+1} - n u_n = (n+1)(u_n - u_n^2) - n u_n$

$= u_n\left[(n+1)(1-u_n) - n\right]$

$= u_n\left[1-(n+1)u_n\right] \geqslant 0$ car $u_n \geqslant 0$ et $u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$

cl $(n u_n)$ croissante et majorée par 1 $\left(n u_n \leq \frac{n}{n+1} \leq 1\right)$

donc, TLM: $\boxed{(n u_n) \text{ cvg}}$

5) On a $v_n = L - n u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} L - L = 0$ d'où

la suite (v_n) cvg donc :

cl $\boxed{\left(\sum v_n - v_{n+1}\right) \text{ cvg}}$ par correspondance bijective suite-Σ

6) $v_{n+1} = L - (n+1)u_{n+1} = L - (n+1)(u_n - u_n^2)$

$= L - n u_n - u_n + (n+1)u_n^2$

$= v_n - \left(u_n - (n+1)u_n^2\right)$

donc $v_n - v_{n+1} = u_n - (n+1)u_n^2$

$= u_n\left(1-(n+1)u_n\right) = u_n\left(1 - n u_n - u_n\right)$

si $L \neq 1$ on a $v_n - v_{n+1} \sim u_n(1 - L - 0) = -L u_n$

impossible car $\left(\sum v_n - v_{n+1}\right)$ cvg et $\left(\sum u_n\right)$ dvg et $u_n \geqslant 0$

cqs $L = 1$ i.e. $n u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$ cl $\boxed{u_n \sim \frac{1}{n}}$

7) $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{1-u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ (TG)

Si on pose $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$, $v_n \sim 1 \geqslant 0$ et

comme $(\Sigma 1)$ diverge, le <u>théorème de sommation des relations de comparaison</u> donne $\sum_{p=1}^{n} v_p \sim \sum_{p=1}^{n} 1 = n$

Par <u>somme telescopique</u>, $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_1} \sim n$

d'où (TG) $\frac{1}{n u_{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et donc $\boxed{u_n \sim \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}}$

<u>Rmq</u> : Césaro donnait aussi l'équivalent.

Césaro

$$\frac{\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{u_{p+1}} - \frac{1}{u_p}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

donc $\frac{\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, or $\frac{1}{n u_0} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

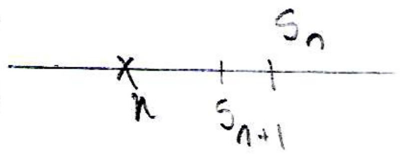
d'où $\frac{1}{n u_n} = \frac{1/n}{u_n} \xrightarrow[+\infty]{} 1$

d° $\boxed{u_n \sim \frac{1}{n}}$

I A 1) Voir annexe python

I A 2) Voir annexe python

On constate que (s_n) converge vers x.

Si $s_n > x$ alors σ_{n+1} est impair et $s_{n+1}\ (< s_n)$ se rapproche de x () par la droite

Si $s_n \leq x$ alors σ_{n+1} est pair et $s_{n+1}\ (> s_n)$ se rapproche de x par la gauche

De plus les suites $(2q_n - 1)$ et $(2p_n)$ décrivent respectivement et dans l'ordre les entiers impairs et pairs.

I B Démontrons les 3 lignes à l'aide d'une récurrence :

$\underline{n=1}$: Si $s_0 = 0 > x$, $q_1 = 1$, $p_1 = 0$ et $\sigma_1 = 1$, puis $s_1 = u_{\sigma_1}$. On a donc * $\{\sigma(1)\} = \{1\} = \emptyset \cup \{2 \times q_1 - 1\}$

* $p_1 + q_1 = 0 + 1 = 1 = n$

* $s_1 = u_{\sigma_1}$

Sinon $s_0 = 0 \leq x$, $q_1 = 0$, $p_1 = 1$ et $\sigma_1 = 2$, puis $s_1 = u_{\sigma(1)}$

et l'on a comme au 1er cas, $\{s(1)\} = \{2\} \cup \emptyset$, $p_1 + q_1 = 1$

et $S_1 = u_{s(1)}$. On a donc <u>H_1 vraie</u>

Si H_n est vraie,

1er cas $S_n > n$ alors $q_{n+1} = 1 + q_n$, $p_{n+1} = p_n$ et $s(n+1) = 2q_{n+1} - 1$

$$* \ \{s(1), \dots, s(n+1)\} = \underbrace{\{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}}_{\text{hyp. de récurrence}} \cup \{s(n+1)\}$$

$$= \{2, 4, \dots, \underbrace{2p_n, 2p_{n+1}}_{=}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_{n+1}\}$$

$$* \ p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + 1 + q_n = n + 1$$

$$* \ S_{n+1} = S_n + u_{s(n+1)} = u_{s(1)} + \dots + u_{s(n+1)}$$

2e cas : identique (rôle quasi-symétrique de p_n et q_n)

donc H_{n+1} vraie

cl° $\boxed{\text{les 3 assertions sont vraies pour tout } n \geq 1}$

cqs $\operatorname{card}\{s(1), \dots, s(n)\} = p_n + q_n = n$, donc $s(1), \dots, s(n)$ sont 2 à 2 distincts, soit $\forall p < n : s(p) \neq s(n)$

d'où $\boxed{s \text{ est injective}}$

IC1) Soit $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, pour $\varepsilon = \frac{1}{4} > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} \mid$

$\forall n \geq N : |u_n - \ell| \leq 1/4$.

Donc $\forall n \geq N : |u_n - u_{n+1}| \leq |u_n - \ell| + |\ell - u_{n+1}| \leq 1/2$

Soit $u_n - u_{n+1} \in [-1/2, 1/2] \cap \underset{u_n \in \mathbb{Z}, \forall n}{\mathbb{Z}} = \{0\}$

cqs $\forall n \geq N : u_n = u_{n+1}$ d'où $\boxed{(u_n) \text{ constante à partir de } N.}$

C2.a) La suite (p_n) est croissante $\left(p_{n+1} = \begin{cases} p_n \\ p_n + 1 \end{cases}\right)$. Si elle est majorée, elle converge et avec IC1), elle est stationnaire : $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N : p_n = p_N$.

D'après la construction du I.A, $\forall n \geq N$: $S_n > x$ (sinon $p_{n+1} = 1 + p_n \neq p_n$) et $q_{n+1} = q_n + 1$. La suite $(q_n)_{n\geq N}$ est donc arithmétique, soit $\forall n \geq N : q_n = q_N + n - N$ et donc

$\forall n \geq N$: * $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1 = 2(q_N + n + 1 - N) - 1$

$= 2q_N + 2n - 2N + 1$

* $S_{n+1} = S_n - \dfrac{1}{2q_N + 2n - 2N + 1}$

On a donc $\forall n \geqslant N+1$:

$$\begin{cases} S_n = S_{n-1} - \dfrac{1}{2q_N + 2(n-1) - 2N+1} \\ \vdots \\ S_{N+1} = S_N - \dfrac{1}{2q_N + 2(N) - 2N+1} \end{cases}$$

Sommons, tous les S_k se telescopent :

$$S_n = S_N - \sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{2q_N + 2k - 2N + 1}$$

d° $\boxed{\text{Avec } n_0 = N \text{, on a bien } \forall n > n_0 : \quad S_n > n \text{ et } S_n = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}}$

Remarque : $S_{n_0} > n$ et la formule $\nearrow$ est valable pour n_0 avec la convention $\sum_{k=n_0}^{n_0-1} \alpha_k = 0$.

Comme $\alpha_k = \dfrac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1} \underset{k\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2k} \geqslant 0$, comme $\left(\sum \frac{1}{k}\right)$ dvg,

par TC $\left(\sum \dfrac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}\right)$ diverge et comme $\alpha_k > 0$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S_{n_0} - \infty = -\infty$: $\boxed{\text{absurde}}$ avec le fait que $\forall n \geqslant n_0$; $S_n > n$.

b) La suite (p_n) n'est donc pas majorée, comme elle est croissante, par TLM, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty}$.

IC3) Par le rôle quasi-symétrique de (p_n) et (q_n), (q_n) croissante non majorée (même m̂ absurdité $s_n < n$ et $s_n = s_{n_0} + \underbrace{\Sigma \ldots}_{\to+\infty}$)

d'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty}$

IC4) $\forall N \in \mathbb{N}$

1er cas $N = 2m$, comme (p_n) tend vers l'infini, il existe $n \in \mathbb{N} \setminus p_n \geqslant m$, donc $2m \in \{2, 4, \ldots, 2m, \ldots, 2p_n\} \subset \{s(1), \ldots, s(n)\}$

IB

d'où $\underline{\exists k \in [\![1, n]\!] \setminus n = 2m = s(k)}$

2ème cas $N = 2m+1$, on fait de m̂ :

$$2m+1 \in \{1, 3, \ldots, 2q_n - 1\} \subset \{s(1), \ldots, s(n)\}$$

d'où $\exists k \in [\![1, n]\!] \setminus n = 2m+1 = s(k)$

d'où $\boxed{s \text{ est injective et surjective donc bijective de } \mathbb{N}^* \text{ à } \mathbb{N}^*}$

I.D.1) Avec les notations du I.A, $S_{n+1} = S_n + u_{s_n+1}$.

Si $S_n > x$, $u_{s_{n+1}} < 0$, $S_{n+1} < S_n$

Si $x < S_{n+1} < S_n$ alors $|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x|$

sinon $S_{n+1} \leq x < S_n$ et donc $|S_{n+1} - x| \leq |S_{n+1} - S_n| = |u_{s_{n+1}}|$.

Sinon $S_n \leq x$, $u_{s_{n+1}} > 0$, $S_{n+1} > S_n$

Si $S_n < S_{n+1} \leq x$ alors $|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x|$

sinon $S_n \leq x < S_{n+1}$ alors $|S_{n+1} - x| \leq |S_{n+1} - S_n| = |u_{s_{n+1}}|$.

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : |S_{n+1} - x| \leq |S_n - x| \text{ ou } |S_{n+1} - x| \leq |u_{s_{n+1}}|}$

I D 2) Au vu du I D 1, s'il existait un entier N tel que

$\forall n \geq N : |S_{n+1} - x| > |u_{s_{n+1}}|$, alors on aurait (par l'absurde):

$[\forall n \geq N \quad x < S_n \text{ ou } \forall n \geq N \quad x > S_n]$ et comme au I C 2 a)

on aboutit à une contradiction,

d'où $\boxed{\forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N \ | \ |S_{n+1} - x| \leq |u_{s_{n+1}}|}$

I D 3) Comme $p_n \longrightarrow +\infty$ et $q_n \longrightarrow +\infty$, pour $A = 1$, $\exists (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$

tel que $\forall n \geq n_1 : p_n \geq 1$ et $\forall n \geq n_2 : q_n \geq 1$

Posons $\boxed{n_0 = \max(n_1, n_2) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad p_n \geq 1 \text{ et } q_n \geq 1}$

I.D.4) Soit $n \geq n_0$, on a :

* $|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x| \leq v_n = \max(\ldots)$

ou $|S_{n+1} - x| \leq |u_{\sigma(n+1)}|$ or $\sigma(n+1) = 2p_{n+1}$ ou $2q_{n+1} - 1$

donc $|S_{n+1} - x| \leq v_n$

* $|u_{2p_{n+2}}| \leq |u_{2p_{n+1}}|$ car (p_n) croissante

$\leq v_n$ de même pour $u_{2q_{n+2}-1}$

Cqs v_n majore $\{|S_{n+1} - x|, |u_{2p_{n+2}}|, |u_{2q_{n+2}-1}|\} = X$

d'où $v_{n+1} = \max X \leq v_n$ d'où $\boxed{(v_n)_{n \geq n_0} \text{ décroissante}}$

Comme (v_n) est minorée par 0, par T.L.M., elle converge vers une limite finie $\ell \geq 0$. Montrons que $\ell = 0$.

Avec le I.D, $\forall N \geq n_0 : \exists n > N \setminus |S_{n+1} - x| \leq |u_{\sigma(n+1)}|$.

Donc $v_{n+1} \leq \operatorname{Max}(|u_{\sigma(n+1)}|, |u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}}|)$

Or $\sigma(n+1) = 2p_{n+1}$ ou $2q_{n+1} - 1$

On a donc $\forall N \geq n_0,\ \exists n > N \mid \ell \leq v_{n+1} \leq \max(|u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}-1}|)$

Soit $\varepsilon > 0$

Comme $p_n \to +\infty$ et $q_n \to +\infty$: $\exists N_0 \in \mathbb{N} \mid$

$\forall n > N_0 \quad |u_{2p_{n+1}}| = \frac{1}{2p_{n+1}} \leq \varepsilon$ et $|u_{2q_{n+1}-1}| \leq \varepsilon$

rem. : ceci prouve que 0 est val. d'adhérence de (v_n)

Pour $N = \max(n_0, N_0)$: $\exists n > N_0 \mid \ell \leq v_{n+1} \leq \varepsilon$

cqs $\forall \varepsilon > 0$: $0 \leq \ell \leq \varepsilon$

on fait tendre ε vers 0 : $\ell = 0$

d'où $\boxed{(v_n) \text{ cvg vers } 0}$

I.D.5) Comme $\forall n \geq n_0 \quad 0 \leq |S_n - x| \leq v_n$, par le théorème d'encadrement, $|S_n - x| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ soit $\boxed{(S_n) \text{ cvg vers } x}$

Par définition de la somme d'une série et la I.B) :

d'où $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_{\sigma(n)} = x}$

I.E.1) Posons $\alpha_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$

$\alpha_n - \alpha_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$= \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Comme $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ cvg et $\frac{1}{n^2} \geq 0$, par TC,

$\left(\sum \alpha_{n-1} - \alpha_n\right)$ cvg, d'où par correspondance bijective suite-série (C.B.S.S.), la suite (α_n) cvg vers un réel

$\gamma \in \mathbb{R}$: $\alpha_n - \gamma \longrightarrow 0$ soit $\alpha_n - \gamma = o(1)$

d'où $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)}$

I.E.2) Posons $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $\sigma_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$,

donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sigma_{2n} - \frac{1}{2}\sigma_n = \ln 2n + \gamma + o(1) - \frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\gamma + o(1)$

$= \frac{1}{2}\ln n + \ln 2 + \frac{1}{2}\gamma + o(1)$

d'où $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2}\ln n + \ln 2 + \frac{1}{2}\gamma + o(1)}$

I.E.3.a) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus p_n \geq 1$ et $q_n \geq 1$, on a avec le I B) :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_{\sigma(i)} = \underbrace{\sum_{k \in \{2, \dots, 2p_n\}} u_k + \sum_{k \in \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}} u_k}_{\text{réunion disjointe}}$$

d'où $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}}$

b) $S_n = \frac{1}{2}\left(\ln p_n + \gamma + o(1)\right) - \frac{1}{2}\ln q_n - \ln 2 - \cancel{\frac{\gamma}{2}} + o(1)$ avec II E1) et II E2)

$= \frac{1}{2}\ln\frac{p_n}{q_n} - \ln 2 + o(1)$ or $p_n + q_n = n$ (I B)

d'où $\boxed{S_n = \frac{1}{2}\ln\frac{p_n}{n-p_n} - \ln 2 + o(1)}$

c) On a donc $\frac{1}{2}\ln\frac{p_n}{n-p_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x + \ln 2$

soit $\frac{p_n}{n-p_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{2x+2\ln 2}$ (crit. séq.)

d'où $\frac{n-p_n}{p_n} = \frac{n}{p_n} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-2x-\ln 4} = \frac{e^{-2x}}{4}$

cqs $\frac{n}{p_n} \sim 1 + \frac{e^{-2x}}{4}$, donc $p_n \sim \frac{n}{1+\frac{e^{-2x}}{4}}$

d'où $\boxed{p_n \sim \frac{4}{4+e^{-2x}}n}$

Comme $q_n = n - p_n$, $\frac{q_n}{n} = 1 - \frac{p_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \frac{1}{1+\frac{e^{-2x}}{4}} = \frac{e^{-2x}}{4+e^{-2x}}$

d'où $\boxed{q_n \sim \frac{e^{-2x}}{4+e^{-2x}}n}$

d) $|u_1| + \dots + |u_n| = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \sim \ln n$ avec le I E1).

$$|u_{\sigma(1)}|+\cdots+|u_{\sigma(n)}| = \sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{q_n}\frac{1}{2k-1}$$ d'après la démo. du I E 3 a).

$$= \frac{1}{2}\left[\ln p_n + \gamma + o(1)\right] + \frac{1}{2}\ln q_n + \ln 2 + \frac{1}{2}\gamma + o(1)$$ car p_n et $q_n \to +\infty$.

$\sim \frac{1}{2}\ln(p_n q_n)$ (le reste est négligeable / à l'infini)

⚠ interdit de composer les $\sim$, cependant si $\alpha_n \sim \beta_n$ et $\beta_n \to +\infty$, alors :

$$\alpha_n = \beta_n(1+o(1)) \text{, donc } \ln \alpha_n = \underbrace{\ln \beta_n}_{\to\infty} + \underbrace{\ln(1+o(1))}_{\to 0} \sim \ln \beta_n.$$

Donc $$|u_{\sigma(1)}|+\cdots+|u_{\sigma(n)}| \sim \frac{1}{2}\ln\Bigg(\underbrace{\frac{4}{4+e^{-2n}}n \times \frac{e^{-2n}}{4+e^{-2n}}n}_{=\gamma' n^2 \ (\gamma' : \text{constante})}\Bigg)$$

$$\sim \underbrace{\frac{1}{2}\ln n^2}_{\to\infty} + \underbrace{\frac{1}{2}\ln \gamma'}_{cste}$$

d'où $|u_{\sigma(1)}|+\cdots+|u_{\sigma(n)}| \sim \ln n$

d'où $$\boxed{\lim \frac{|u_{\sigma(1)}|+\cdots+|u_{\sigma(n)}|}{|u_1|+\cdots+|u_n|} = 1}$$

```
import numpy as np
import pylab as pl

def u(n):
    return (-1)**n/n

def suite(x,n):
    p=[0]
    q=[0]
    S=[0]
    s=[0]
    for i in range(1,n+1):
        if S[i-1]>x:
            q.append(1+q[i-1])
            p.append(p[i-1])
            s.append(2*q[i]-1)
        else:
            q.append(q[i-1])
            p.append(1+p[i-1])
            s.append(2*p[i])
        S.append(S[i-1]+u(s[i]))
    return s,S # ici on renvoie s et S pour "visualiser" l'état de S_n

def suiteDessin(x,n):
    p=[0]
    q=[0]
    S=[0]
    s=[0]
    for i in range(1,n+1):
        if S[i-1]>x:
            q.append(1+q[i-1])
            p.append(p[i-1])
            s.append(2*q[i]-1)
            #print('>x',s[i])
        else:
            q.append(q[i-1])
            p.append(1+p[i-1])
            s.append(2*p[i])
            #print('<=x',s[i])
        S.append(S[i-1]+u(s[i]))
    abscisse=list(range(n+1))
    axex=(n+1)*[x]
    pl.xlabel('abscisses')
    pl.plot(abscisse,axex,linewidth=1,color='green')
    pl.scatter(abscisse,S,s=5)
    pl.show()
```

```
>>> suite(-1,30)
([0, 1, 2, 3, 5, 4, 7, 9, 6, 11, 13, 8, 15, 17, 10, 19, 21, 12, 23, 25,
 14, 27, 16, 29, 31, 18, 33, 35, 20, 37, 39],
[0, -1.0, -0.5, -0.8333333333333333, -1.0333333333333332, -0.7833333333333332,
-0.926190476190476, -1.0373015873015872, -0.8706349206349205,
-0.9615440115440115, -1.0384670884670884, -0.9134670884670884,
-0.980133755133755, -1.0389572845455197, -0.9389572845455197,
-0.9915888634928882, -1.039207911111936, -0.9558745777786025,
-0.9993528386481677, -1.0393528386481676, -0.9679242672195962,
-1.0049613042566332, -0.9424613042566332, -0.9769440628773228,
-1.009202127393452, -0.9536465718378964, -0.9839496021409266,
-1.012521030712355, -0.9625210307123551, -0.989548057739382, -1.0151890833804076])
                                          #au dessus S_30=-1.01518... : proche de-1


>>> suiteDessin(-1,70)
```