# DS 3 (4 heures)
## ***Thermodynamique***

La calculatrice est <u>**autorisée**</u>

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

| **Critère** | **Indicateur** |
|---|---|
| Lisibilité de l'écriture | L'écriture ne ralentit pas la lecture. |
| Respect de la langue | La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire. |
| Clarté de l'expression | La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture. |
| Propreté de la copie | La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrées. |
| Identification des questions et pagination | Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question. La pagination est correctement effectuée. |
| Mise en évidence des résultats | Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence. |

| **Nombre de critères non respéctés** | **Palier de Malus** | **Effet sur la note** |
|---|---|---|
| 0 | 0 | aucun |
| 1–2 | 1 | −3.3% |
| 3–4 | 2 | −6.7% |
| 5–6 | 3 | −10% |

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'essentiel des données et formules utiles se trouve dans un formulaire en fin d'énoncé.

# Exercice 1 : Isolation thermique d'une maison

## I – Étude d'un mur simple

Considérons un mur de bâtiment (chalet de montagne en plein hiver par exemple) constitué d'un matériau homogène, isotrope, de masse volumique $\rho$, de capacité thermique massique $c$ et de conductivité thermique $\lambda$, supposées constantes.
Le mur est limité par deux plans $(Oyz)$ parallèles, distants de $e_B$ (FIGURE 1). Les températures constantes $T_{int}$ et $T_{ext}$ (avec $T_{int} > T_{ext}$) sur les deux faces correspondent respectivement aux températures de l'air à l'intérieur et à l'extérieur du bâtiment. L'étude est unidimensionnelle, la chaleur se propageant uniquement dans la direction $Ox$ normale à ces plans.
En un point $M$ d'abscisse $x$ dans le mur, la température est notée $T(x)$. Les dimensions de la surface $S$ du mur dans le plan $(Oyz)$ sont supposées grandes par rapport à son épaisseur et aucune ouverture n'est sensée venir perturber les transferts thermiques dans le mur. L'étude est réalisée en régime permanent. Pour débuter, seuls les phénomènes conductifs sont pris en compte.

**Q.1** Établir, en justifiant chaque étape de votre raisonnement, l'équation différentielle de la diffusion à laquelle obéit la température $T(x)$.

**Q.2** En déduire la loi d'évolution de la température $T(x)$. Commenter.

**Q.3** Exprimer le vecteur flux surfacique (ou vecteur densité de courant thermique) $\vec{j}_Q = J_Q \vec{u}_x$ dans le mur. Justifier son orientation.

**Q.4** Déterminer le flux thermique total $\Phi$ traversant le mur.

**Q.5** Rappeler les grandeurs analogues de $\Phi$ et de $T_{int} - T_{ext}$ en électrocinétique. En déduire l'expression de la résistance thermique surfacique $R_{th} = \dfrac{T_{int} - T_{ext}}{J_Q}$ et préciser son unité.

Les caractéristiques d'un mur en béton armé (épaisseur $e_B = 20\,\text{cm}$ et conductivité thermique $\lambda$) sont mentionnées dans la TABLE 1 relatif aux différents matériaux. Les températures sur les faces intérieure et extérieure du mur valent respectivement $T_{int} = 19\,°\text{C}$ et $T_{ext} = -15\,°\text{C}$.
Le coefficient de transmission surfacique ou coefficient de déperdition thermique noté $U$ évalue la facilité avec laquelle le transfert thermique s'effectue à travers la surface d'échange. Il représente le flux thermique par unité de surface pour une différence de température d'un degré entre les deux milieux extrêmes.

**Q.6** Calculer le flux surfacique $J_Q$ et le coefficient de transmission surfacique $U$ du mur.

**Q.7** Représenter, en annexe sur la FIGURE A (à rendre avec la copie), le profil de température dans le mur en béton armé.

**Q.8** Déterminer numériquement la profondeur $e_{HG}$ du mur demeurant «hors gel».

| Couche n° | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Matériau | Plâtre | Laine de verre | Béton | Crépis |
| Épaisseur $e_j$ (cm) | 5 | 8 | 20 | 2 |
| Conductivité thermique $\lambda_j$ ($\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$) | 0,30 | 0,04 | 1,75 | 0,90 |

TABLE 1 – Caractéristiques des matériaux utilisés pour la construction des murs

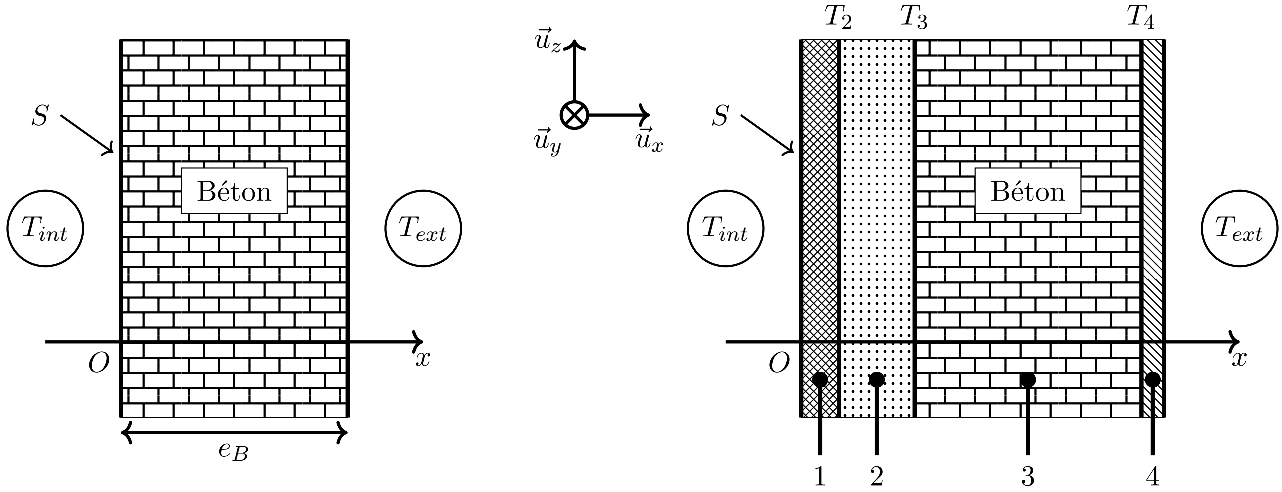



FIGURE 1 – Vue en coupe du mur simple (gauche) et du mur composite (droite)

## II – Étude du mur composite

Le mur a maintenant une structure composite : il comporte quatre matériaux différents (de l'intérieur vers l'extérieur du bâtiment : carreaux de plâtre, laine de verre, béton armé, crépis extérieur). Ces matériaux sont supposés homogènes et isotropes, référencés $j = 1, 2, 3, 4$, d'épaisseur $e_j$, de conductivités thermiques $\lambda_j$. Ils sont en contact parfait et possédent des surfaces limites isothermes (FIGURE 1). Les températures des faces extrêmes sont toujours notées $T_{int}$ et $T_{ext}$ (avec $T_{int} > T_{ext}$). Le régime est permanent et aucune source interne de chaleur n'est présente dans le mur.

**Q.9** Justifier puis traduire la conservation du flux surfacique $J_{Q,C}$ à travers ce mur composite.

**Q.10** Déterminer la résistance thermique surfacique $R_{th,C}$ du mur composite en fonction des $e_j$ et $\lambda_j$. Calculer $R_{th,C}$ en utilisant les données relatives aux matériaux constitutifs.

**Q.11** Exprimer le coefficient de transmission surfacique $U_C$ en fonction de $R_{th,C}$, puis calculer $J_{Q,C}$ et $U_C$, sachant que les milieux extrêmes sont aux températures $T_{int} = 19\,°\mathrm{C}$ et $T_{ext} = -15\,°\mathrm{C}$. Comparer les coefficients $U$ du mur simple et $U_C$ du mur composite.

**Q.12** Calculer les températures intermédiaires $T_2$, $T_3$ et $T_4$ aux interfaces entre les couches, puis représenter, en annexe sur la FIGURE B, le profil de température dans le mur composite. Analyser son évolution par rapport à celui tracé en **Q.7**.

Afin de simplifier l'approche thermique de ce mur, introduisons la notion de conductivité thermique équivalente $\lambda_{eq}$ : c'est celle d'un mur simple et homogène possédant une épaisseur et une résistance thermique respectivement égales à l'épaisseur et à la résistance thermique du mur composite.

**Q.13** Déterminer puis calculer la conductivité thermique équivalente $\lambda_{eq}$ pour le mur composite.

## III – Mur composite avec transferts thermiques convectifs et radiatifs

Le mur composite précédent est au contact, de part et d'autre, de l'air intérieur et de l'air extérieur. Ce fluide est aux températures respectives $T_{f,i}$ et $T_{f,e}$ (avec $T_{f,i} > T_{f,e}$). Deux types de transferts thermiques superficiels interviennent alors : les échanges convectifs liés au déplacement de l'air et les échanges radiatifs dus au rayonnement thermique.
Ces deux modes de transfert entre les parois du mur et l'atmosphère environnante sont régis, pour un transfert de chaleur algébrique de la paroi (d'aire $S$) au fluide, par la loi globalisée :

$$\Phi_{rcc} = h\,S\,(T_{paroi} - T_{fluide})$$

avec $h$ le coefficient surfacique d'échange, positif. Ce coefficient d'échange tient en compte à la fois des transferts thermiques conducto-convectifs et des transferts par rayonnement aux interfaces air – paroi. Il est noté $h_i = 10\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$ pour la paroi interne à la température $T_{p,i}$ au contact de l'air intérieur à la température $T_{int} = 19\,°\mathrm{C}$ et $h_e = 30\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$ pour la paroi externe à la température $T_{p,e}$ au contact de l'air extérieur à $T_{ext} = -15\,°\mathrm{C}$.

**Q.14** Déterminer les nouvelles expressions des flux surfaciques $J_{Q,i}$ et $J_{Q,e}$ et des résistances thermiques surfacique $R_{th,i}$ et $R_{th,e}$ aux deux interfaces air – mur. Calculer la résistance thermique surfacique $R_{tot}$ de l'ensemble du mur composite et des interfaces.

**Q.15** Exprimer puis calculer les températures de paroi $T_{p,i}$ et $T_{p,e}$. Commenter.

**Q.16** Compléter la FIGURE B en annexe en indiquant le profil de température au voisinage des parois murales (intérieure et extérieure). Discuter des paramètres (climatiques entre autres) qui pourraient influencer ces évolutions du profil thermique.

## Exercice 2 : Principe d'une route chauffante

**Routes chauffantes**

*Extrait de l'émission de télévision BFM Business du 22/01/2019 (propos d'Anthony Morel)*

La technologie s'invite dans l'infrastructure routière. Une société française a testé une route auto–déneigeante. Celle-ci emmagasine la chaleur en période chaude et va la restituer pour faire fondre la neige et le verglas. Sous le revêtement sont placés des tuyaux dans lesquels peuvent circuler des fluides caloporteurs qui vont pouvoir stocker et/ou faire circuler l'énergie thermique. Lors d'une période neigeuse, une pompe à chaleur va s'activer et les cristaux de glace vont fondre. Ces routes "radiateurs" sont actuellement en expérimentation dans le Doubs sur un parking de lycée et dans les Yvelines sur $500\,\mathrm{m^2}$ de l'autoroute A10.

### Données

- La loi de Newton relative à la conducto-convection permet d'écrire que le vecteur densité de courant thermique est de la forme $\vec{j}_Q = h(T_{\text{solide}} - T_{\text{fluide}})\vec{n}$ avec $T_{\text{solide}}$ la température de surface du solide, $T_{\text{fluide}}$ la température du fluide en écoulement sur le solide et $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à la surface orienté du solide vers le fluide.
- Le gradient d'une fonction $U(r)$ ne dépendant que de la coordonnée radiale en coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$ est égal à : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}U(r) = \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$.
- Pour un fluide incompressible de masse volumique $\mu$, le débit massique est donné par $D_m = \mu D_v$ avec $D_v$ le débit volumique.
- Dans une conduite cylindrique de rayon $a$, le débit volumique peut se calculer grâce à $D_v = \pi a^2 v$ avec $v$ la vitesse du fluide.

Le fluide caloporteur est l'eau avec du glycol qui sert d'antigel. La quantité de glycol est suffisamment faible pour qu'on assimile le fluide caloporteur à de l'eau de masse volumique $\mu = 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et de capacité thermique massique $C = 4{,}2\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ supposées indépendantes de la température.

Il y a deux réseaux de tubes dans lesquels le fluide circule : un réseau dit de surface et un réseau enfoui.

- Dans le réseau de surface, le fluide circule dans des tubes cylindriques de longueur $L = 60\,\mathrm{m}$, de faible rayon et peu épais (rayon intérieur $R = 1\,\mathrm{cm}$ et épaisseur $e = 0{,}5\,\mathrm{mm}$), fabriqués en polymère recyclable et placés à environ $10\,\mathrm{cm}$ de profondeur dans le revêtement.
- Dans le second réseau (dit enfoui), les tubes (de plus grand diamètre et plus épais), aux parois isolées, sont placés à au moins $1\,\mathrm{m}$ sous terre.

Les deux réseaux sont reliés. Dans l'épaisseur des tuyaux des réseaux, on suppose que la température ne dépend que de la variable $r$ des coordonnées cylindriques.

**Q.1** Déterminer la résistance thermique $\Gamma_c$, associée au phénomène de conduction thermique, d'un tuyau cylindrique creux de longueur $L$, de rayon intérieur $R$ et d'épaisseur $e$ et de conductivité thermique $\lambda$.

**Q.2** En fait, au niveau du rayon intérieur des tuyaux du réseau de surface, le mouvement du fluide caloporteur entraîne une différence de température entre le rayon intérieur et le fluide caloporteur en obéissant à une loi de Newton de coefficient $h$. Exprimer la résistance thermique totale $\Gamma$ d'un tuyau du réseau de surface en fonction de $h$, $\lambda$, $R$, $L$ et $e$.

**Q.3** Calculer la valeur numérique de la conductance linéique $G_\ell$ sachant que la conductivité thermique du polymère vaut $\lambda = 0{,}25\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ et que le coefficient conducto–convectif du réseau de surface vaut $h = 150\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-2}$.

En période chaude, le revêtement routier peut être à une température uniforme de $\theta_c = 70\,°\mathrm{C}$. L'eau en écoulement, dont la température ne dépend que de $z$, a une température d'entrée dans le réseau de surface égale à $\theta_e = 20\,°\mathrm{C}$ et on cherche à atteindre une température de sortie du réseau de surface égale à $\theta_s = 65\,°\mathrm{C}$.

**Q.4** Exprimer le premier principe pour l'écoulement en système ouvert qui correspond à la tranche comprise entre $z$ et $z + \mathrm{d}z$ du réseau de surface. On pourra négliger ici les variations d'énergies cinétique et potentielle massiques.

**Q.5** En déduire le débit massique $D_m$ de l'eau en écoulement. Réaliser l'application numérique.

Ce débit massique de fluide est obtenu grâce à une pompe. Lors du passage dans la pompe, la température du fluide reste constante et on néglige la variation d'énergie potentielle massique. On suppose par ailleurs que le fluide a une vitesse nulle en entrée de la pompe et que la transformation subie est adiabatique.

**Q.6** Exprimer la puissance que doit apporter la pompe au fluide en fonction de $\mu$, $R$ et $D_m$. Réaliser l'application numérique et commenter.

L'eau ainsi chauffée est envoyée dans le réseau enfoui dans le sol de température constante $\theta_0 = 15\,°\mathrm{C}$. On « stocke » ainsi son énergie thermique en remplissant le réseau enfoui. On note $\Gamma'$ la résistance thermique du réseau enfoui.

**Q.7** Les tuyaux du réseau enfoui doivent pouvoir contenir l'équivalent de l'eau issue du réseau de surface après un mois (30 jours) de chauffe. Quel volume $V$ d'eau doit contenir le réseau enfoui ?

**Q.8** Pendant la période de stockage de l'eau enfouie, sa température évolue du fait des pertes thermiques à travers les parois du réseau de stockage. Déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de la température de l'eau stockée.

**Q.9** On souhaite que les pertes thermiques subies par le fluide en 4 mois de stockage entraînent une diminution de la température d'au plus $5\,°\mathrm{C}$. Quelle doit-être la résistance thermique minimale $\Gamma'_{\min}$ du réseau enfoui pour satisfaire cette condition ?

On suppose cette condition vérifiée dans la suite, c'est-à dire que l'eau stockée est maintenant à la température $\theta'_e = 60\,°\mathrm{C}$. Elle est renvoyée dans le réseau de surface dont la température extérieure est $\theta_f = -5\,°\mathrm{C}$. Le débit massique est $D_m$, identique à celui précédemment calculé. L'équation différentielle à laquelle satisfait la température $\theta$ dans les tuyaux s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z} = \frac{G_\ell}{CD_m}(\theta_f - \theta)$$

**Q.10** Déterminer l'évolution de la température en fonction de $z$ puis tracer le grahique associé. On fera figurer les températures en entrée et en sortie ainsi que tout autre information jugée pertinente.

**Q.11** En déduire l'expression de la puissance $P_f$ fournie au revêtement routier par le fluide lors de cette phase.

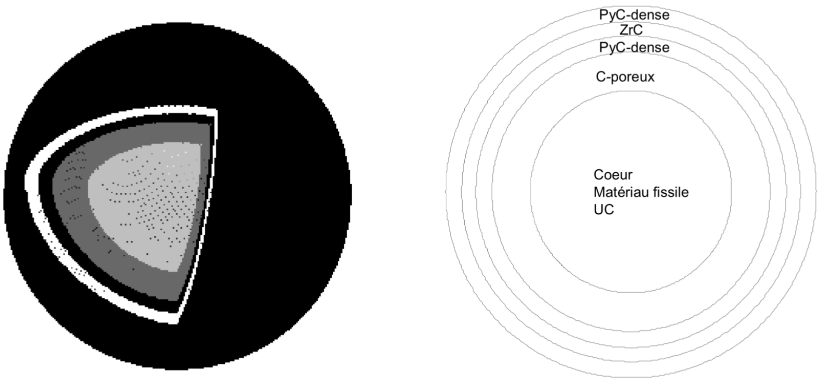
**Q.12** Définir une efficacité pour cette machine thermique en justifiant puis réaliser l'application numérique. Commenter.

**Q.13** Décrire une pompe à chaleur grâce à un diagramme synoptique en précisant le sens des transferts énergétiques.

**Q.14** Que pensez-vous de ce que dit le journaliste dans le document de présentation des routes chauffantes ?

## Exercice 3 : Le combustible nucléaire

Le combustible de certains type de centrales nucléaires est constitué de petites sphères multicouches appelées particules TRISO (voir figure suivante). Le cœur, constitué de matériau fissile, est entouré de plusieurs couches successives ayant pour rôles d'assurer la protection du noyau et le confinement des produits de fission. Le cœur de la particule est constitué de carbure d'uranium UC et la couche de céramique et faite de carbure de zirconium ZrC.




Le tableau suivant récapitule les propriétés et dimensions des différentes couches (les rayons sont donnés en micromètres et les conductivités thermiques en $\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$) :

| Couche | Position | Rayon extérieur | Conductivité thermique |
|---|---|---|---|
| Carbure d'uranium (UC) | $r < r_1$ | $r_1 = 250$ | $\lambda_1 = 12$ |
| Carbone poreux | $r_1 < r < r_2$ | $r_2 = 345$ | $\lambda_2 = 0{,}5$ |
| Carbone pyrolytique (PyC) dense | $r_2 < r < r_3$ | $r_3 = 385$ | $\lambda_3 = 4$ |
| Carbure de zirconium (ZrC) | $r_3 < r < r_4$ | $r_4 = 420$ | $\lambda_4 = 20$ |
| Carbone pyrolytique (PyC) dense | $r_4 < r < r_5$ | $r_5 = 460$ | $\lambda_5 = 4$ |

La puissance par unité de volume produite sous forme d'énergie thermique dans le matériau fissile UC sera notée $\sigma_Q$. La conductivité thermique de la couche numérotée $i$ sera notée $\lambda_i$ ($i$ allant de 1 à 5).

**Q.1** Donner la loi de Fourier en indiquant les unités des différentes grandeurs.

**Q.2** L'équation de la chaleur pour le centre de la particule en tenant compte du terme de production s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\mathrm{div}\vec{j}_Q + \sigma_Q$$

Que traduit cette équation ? Interpréter physiquement les différents termes.

**Q.3** En régime stationnaire, à quoi se réduit cette équation ?

On se place en régime stationnaire dans la suite de cet exercice. On donne l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques d'un champ scalaire $\psi(r,\theta,\phi)$ :

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

**Q.4** Déterminer $T(r)$ pour $r < r_1$. On notera $T_0$ la température en $r = 0$.

**Q.5** Calculer numériquement la variation de température entre les abscisses $r = 0$ et $r = r_1$ si la puissance volumique $\sigma_Q$ vaut $5{,}0 \times 10^9\,\mathrm{W\cdot m^{-3}}$.

Afin de calculer la température dans les différentes couches de la particule TRISO, nous allons utiliser le concept de résistance thermique.

**Q.6** Donner la définition de la résistance thermique $R_{th}$ d'un matériau soumis à un écart de température $T_1 - T_2$ (avec $T_1 > T_2$) impliquant un flux thermique $\Phi_{th}$.

**Q.7** Déterminer le flux thermique en coordonnées sphériques et le mettre sous la forme :

$$\Phi_{th} = B\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right)}$$

où la constante $B$ est à exprimer en fonction des données du problème. On rappelle que le gradient d'un champ scalaire $\psi(r,\theta,\phi)$ s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\vec{e_\phi}$$

**Q.8** Exprimer la résistance thermique $R_{th,12}$ d'une coque comprise entre un rayon $r_1$ et $r_2$ (avec $r_1 < r_2$).

**Q.9** Calculer numériquement les résistances thermiques des 4 coques $R_{th,12}$, $R_{th,23}$, $R_{th,34}$, $R_{th,45}$.

**Q.10** En déduire les températures aux interfaces $T_1$, $T_2$, $T_3$ et $T_4$ si la température extérieure $T_5$ vaut $1300\,\mathrm{K}$.

La centrale nucléaire a une puissance thermique $P_{th} = 600\,\mathrm{MW}$ et une puissance électrique $P_e = 300\,\mathrm{MW}$. On considère que les particules TRISO sont disposées dans le réacteur suivant un empilement cubique simple (particules aux sommets de la maille cubique). On rappelle que la puissance volumique dégagée par le combustible nucléaire est $\sigma_Q = 5{,}0 \times 10^9\,\mathrm{W\cdot m^{-3}}$.

**Q.11** Déterminer le nombre de particules TRISO nécessaires au fonctionnement du réacteur. Quel volume en $\mathrm{m^3}$ cela représente-t-il ? Pour cette question, toute démarche de recherche, même incomplète, sera prise en compte.

**• • • FIN • • •**

# Annexe du DS 3
## (À détacher et à rendre avec la copie)

**Q.7** de l'**Exercice 1**

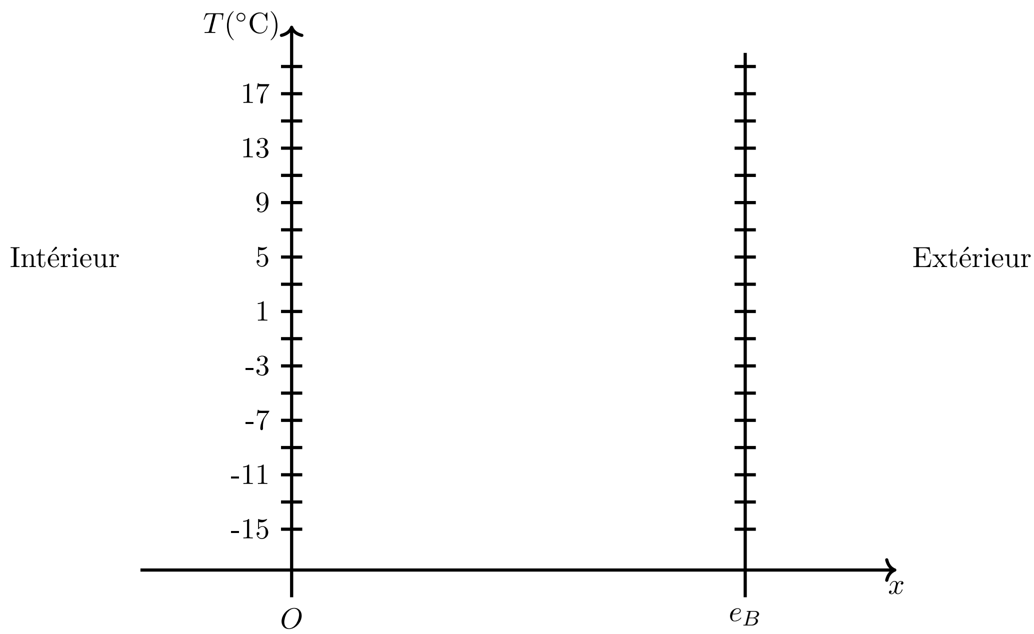



FIGURE A – Vue en coupe du mur en béton armé

**Q.12** et **Q.16** de l'**Exercice 1**

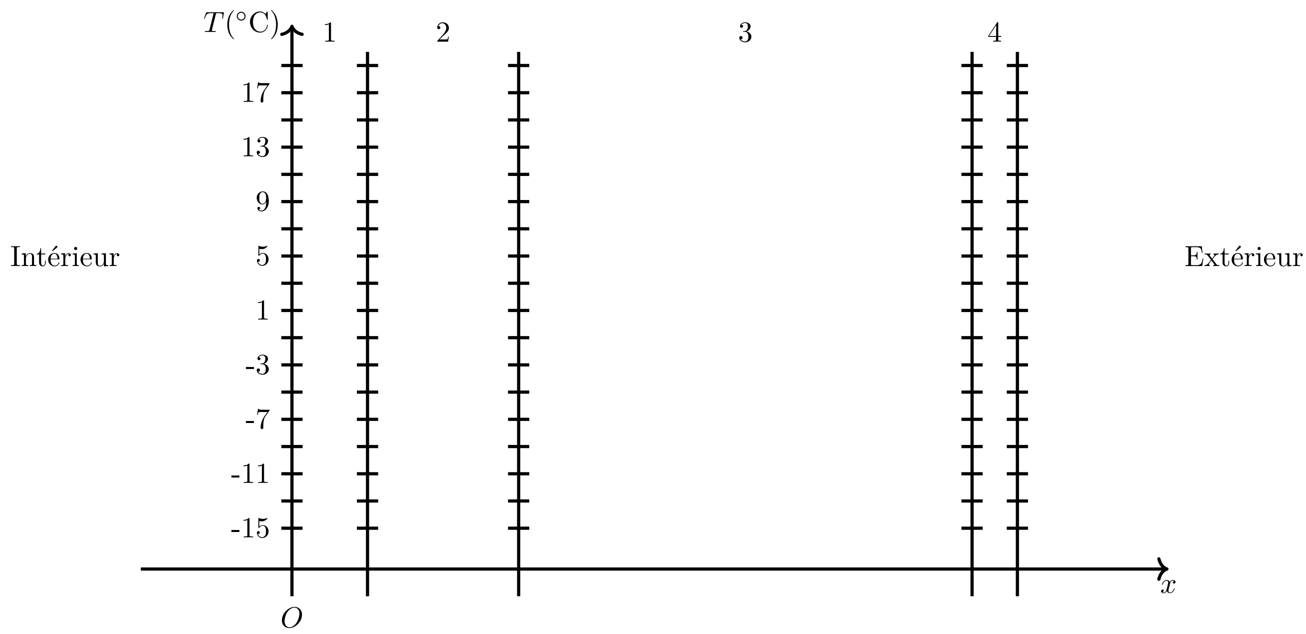



FIGURE B – Vue en coupe du mur composite