SPE MP ······ 2025-2026 | **PROGRAMME DE COLLE 7**

COURS et EXERCICES : PROBABILITÉ (DÉBUT))

tout sauf espérance et variance

A) ESPACES PROBABILISÉS

Axiomatique de Kolmogorov, Tribu, Système complet d'évènements, Lien entre le vocabulaire ensembliste et le vocabulaire probabiliste, Probabilité, Définition d'une probabilité à partir des singletons dans le cas fini ou dénombrable.

B) PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES PROBABILITÉS

Continuité croissante $\boxed{\bullet}$, continuité décroissante $\boxed{\bullet}$.

Première forme de la formule des probas totales, Inégalité de Boole (sous-additivité) $\boxed{\bullet}$.

Évènement presque sûr , propriété est vraie presque sûrement , évènement négligeable , réunion dénombrable d'évènements négligeables , intersection dénombrable d'évènements presque sûrs.

C) PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET INDÉPENDANCE

Proba. conditionnelles, formule des probas composées $\boxed{\bullet}$, formules des probas totales $\boxed{\bullet}$, formules de Bayes.

Indépendance, indépendance d'une famille d'évènements.

Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}^n$ $(n \geqslant 1)$, n évènements indépendants, si on note $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$, alors $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ sont des évènements indépendants $\boxed{\bullet}$.

D) VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Variable aléatoire discrète (VAD) , Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.

Notation : Si la VAD X a la même la loi que la VAD Y, alors on note $X \sim Y$. On dit aussi que X et Y sont équidistribuées , Fonction de répartition (HPTS) : positivité, croissance et limite en $\pm\infty$.

E) COUPLES DE VAD, VAD INDÉPENDANTES

Généralités, couple de variables aléatoires discrètes, Loi conjointe, Lois marginales,

$$\forall i \in I \text{ , } \mathbf{P}(X = x_i) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{j\in J}[(X = x_i) \cap (Y = y_j)]\right) = \sum_{j\in J} p_{i,j}$$

$$\text{et } \forall j \in J \text{ , } \mathbf{P}(Y = y_j) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i\in I}[(X = x_i) \cap (Y = y_j)]\right) = \sum_{i\in I} p_{i,j}.$$

Loi conditionnelle , Extension aux n-uplets, vecteurs aléatoires discrets , Couple de variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux VAD indépendantes , alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont des VAD indépendantes $\boxed{\bullet}$.

Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes

Lemme des coalitions : Soient $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes, alors $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ sont des VAD indépendantes $\boxed{\bullet}$; généralisation à $p \geqslant 3$ coalitions.

F) LOIS USUELLES

Probabilité uniforme sur un ensemble fini, Loi de Bernoulli, Loi binomiale.

Soient $X_1, \ldots, X_n$, n VAD indépendantes qui suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p, alors $S = X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p $\boxed{\bullet}$.

Loi hypergéométrique (HPTS)

Loi géométrique (ou loi de Pascal)

HPTS :Loi sans mémoire $(P((X > n + k)/(X > n)) = P(X > k))$.

Loi de Poisson

Approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson $\boxed{\bullet}$.

Prévisions : Probas : suite