

le problème est dans le corrigé DS4*

1 a) $\int_0^1 (ct^2 + dt) \cos(k\pi t) dt = \left[(ct^2 + dt) \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi t) \right]_0^1 - \int_0^1 (2ct + d) \frac{\sin(k\pi t)}{k\pi} dt$

$$= \frac{-1}{k\pi} \left(\left[(2ct + d) \left(\frac{-1}{k\pi} \right) \frac{\cos(k\pi t)}{k\pi} \right]_0^1 + \int_0^1 2c \frac{\cos(k\pi t)}{k\pi} dt \right)$$

$$= \frac{-1}{k\pi} \left(-\frac{(2c+d) \cos(k\pi)}{k\pi} + d \frac{1}{k\pi} + \frac{2c}{(k\pi)^2} [\sin(k\pi t)]_0^1 \right)$$

Comme $\cos(k\pi) = (-1)^k$, on a $\int_0^1 (ct^2 + dt) \cos(k\pi t) dt = \frac{(2c+d)(-1)^k - d}{k^2 \pi^2}$

b) on doit avoir $\frac{(2c+d)(-1)^k - d}{k^2 \pi^2} = \frac{1}{k^2}$, $\forall k \geq 1$ donc

par $k=1$: $\frac{-(2c+d) - d}{\pi^2} = 1$

par $k=2$: $\frac{2c+d - d}{4\pi^2} = \frac{1}{4}$

Donc $\begin{cases} -2c - 2d = \pi^2 \\ 2c = \pi^2 \end{cases}$

soit $\begin{cases} c = \frac{\pi^2}{2} \\ d = -\pi^2 \end{cases}$ D'où si (a, b) existe il faut que $\begin{cases} a = \frac{\pi^2}{2} \\ b = -\pi^2 \end{cases}$

Vérifions, pour tout $k \geq 1$: $\frac{(2 \times \frac{\pi^2}{2} - \pi^2)(-1)^k + \pi^2}{k^2 \pi^2} = \frac{1}{k^2}$

d. $\boxed{a = \frac{\pi^2}{2} \text{ et } b = -\pi^2}$

c) $\int_0^1 (at^2 + bt) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k\pi t) \right) dt = \int_0^1 \frac{at^2 + bt}{2} dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

$$or \int_0^1 (at^2 + bt) dt = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{3}$$

(2)

$$\underline{d.} \quad \boxed{\int_a^b (at^2 + bt) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k\pi t) \right) dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6}}$$

$$2. \quad 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2k\theta) = 1 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{2ik\theta} \right) = 1 + 2 \operatorname{Re} \left(e^{2i\theta} \frac{1 - (e^{2i\theta})^n}{1 - e^{2i\theta}} \right)$$

car $2\theta \neq 0 (2\pi)$

$$= 1 + 2 \operatorname{Re} \left(e^{2i\theta} \frac{e^{in\theta} (-2i \sin \theta)}{e^{i\theta} (-2i \sin \theta)} \right) = 1 + 2 \cos(n+1)\theta \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta + 2 \cos(n+1)\theta \sin n\theta}{\sin \theta} \quad \text{or } 2 \cos a \sin b = \sin(a+b) + \sin(b-a)$$

$$\underline{d'ou} \quad \boxed{1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos 2k\theta = \frac{\sin \theta + \sin(2n+1)\theta + \sin(-\theta)}{\sin \theta} = \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta}}$$

$$3. a) \quad \underline{IPP} \quad \int_0^1 \underbrace{f(t)}_u \underbrace{\sin \lambda t}_{v'} dt = \left[f(t) \left(\frac{1}{\lambda} \right) \cos \lambda t \right]_0^1 + \int_0^1 f'(t) \frac{1}{\lambda} \cos(\lambda t) dt$$

$$\underline{d'ou} \quad \boxed{\int_0^1 f(t) \sin \lambda t dt = \frac{f(0) - f(1) \cos \lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 f'(t) \cos(\lambda t) dt}$$

$$b) \quad \forall \lambda > 0 \quad \left| \int_0^1 f(t) \sin \lambda t dt \right| \leq \frac{|f(0)| + |f(1)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 |f'(t)| dt = \frac{A}{\lambda}$$

avec $A = |f(0)| + |f(1)| + \int_0^1 |f'(t)| dt$: constante indépendante de λ .

Comme $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{A}{\lambda} = 0$, par théorème d'enclassement;

$$\boxed{\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) \sin \lambda t dt = 0}$$

4a) Par Théorèmes généraux (TG), f est C^∞ sur $]0, 1[$. ③

en 0 : $f(t) \underset{0}{\sim} \frac{-2\pi^2 t}{4 \frac{\pi}{2} t} = -\pi = f(0)$ donc $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0)$

d. f est continue sur $[0, 1]$.

b) on a vu que f est C^∞ donc dérivable sur $]0, 1[$.

$$\forall t \in]0, 1[\quad f'(t) = \frac{\pi^2(2t-2)4 \sin(\frac{\pi}{2}t) - \pi^2(t^2-2t)2\pi \cos(\frac{\pi}{2}t)}{(4 \sin(\frac{\pi}{2}t))^2}$$

Effectuons le DL du numérateur $N(t)$ à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} N(t) &= \pi^2(2t-2)4(\frac{\pi}{2}t + o(t^2)) - \pi^2(t^2-2t)2\pi(1+o(t)) \\ &= -4\pi^3 t + 4\pi^3 t^2 + o(t^2) + 4\pi^3 t - 2\pi^3 t^2 + o(t^2) \\ &= 2\pi^3 t^2 + o(t^2) \sim 2\pi^3 t^2 \end{aligned}$$

$$D'_0 : f'(t) \underset{0}{\sim} \frac{2\pi^3 t^2}{16 \times (\frac{\pi}{2}t)^2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = \frac{\pi}{2}}$$

c) Le théorème de prolongement des fonctions de classe C^1 / aussi noté TLD
assure que f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{\pi}{2}$ et
donc f est C^1 sur $[0, 1]$

d) Evident avec les valeurs de a et b ainsi que le 2-)
avec $\theta = \frac{\pi t}{2}$ trouvés au 1/b)

e) Posons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $\varphi(\lambda) = \int_0^1 f(t) \sin(\lambda t) dt$

D'après le 1.c et le 4 d), on a :

(4)

$$S_n - \frac{\pi^2}{6} = \int_0^1 f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} t\right) dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)$$

or $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = 0$ (c'est le 3 b)) donc avec le critère

séquentiel, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{O}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right) = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_n - \frac{\pi^2}{6}\right) = 0$

d. La suite (S_n) converge vers $\frac{\pi^2}{6}$ donc (par définition)

la série $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

5) $\frac{1}{(2n+1)^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\frac{(-1)^n}{n^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc par T.C., les
séries sont convergentes.
(car $\frac{1}{n^2} \geq 0$ et $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ cvg)

Posons $S'_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{(2p+1)^2}$, $S''_n = \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^p}{p^2}$ et $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}$

$$* \text{ On a } S'_n = S_{2n+1} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \dots - \frac{1}{(2n)^2} = S_{2n+1} - \frac{1}{4} S_n$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{3}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$* \text{ On a } S''_{2n} = -\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} - \dots - \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$$

$$= -S'_{n-1} + \frac{1}{4} S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{4} = \frac{-\pi^2}{12}$$

Comme $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ converge, $\lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S''_{2n} = -\frac{\pi^2}{12}$

d. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

1 a) $4 \in$ b) $2 \in$ c) $0 \in$

2) a) $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ d'où $P(A) = \frac{1}{216}$

b) Exemples d'elt de B :

$(\underline{4}, 1, 1)$, $(3, \underline{4}, 6)$, $(2, 2, \underline{4})$

Pour obtenir un elt de B, il faut choisir la place du $\boxed{4}$: 3 choix, puis mettre n'importe quel parmi $\{1, 2, 3, 5, 6\}$ dans les 2 autres pos : 5^2 choix. Cqsd $|B| = 3 \times 5^2 = 75$

d'où $P(B) = \frac{75}{216} \approx 0,347...$ non demandé (S.O.)

c) $|C| = |\llbracket 1, 5 \rrbracket^3| = 125$ d'où $P(C) = \frac{125}{216} \approx 0,577...$

C est l'événement : aucun 6.

3) $X(\Omega) = \{-1, 1, 2, 3\}$
 ↑ avec un 4 ↑ i 4 (i=1,2,3)

b) * $(X=-1)$ correspond à aucun $\boxed{4}$ donc

(2)

$$P(X=-1) = P(C) \quad (4 \text{ et } 6 \text{ jouent les } \hat{n} \text{ rôles})$$

$$= \frac{125}{216}$$

* $(X=1)$ correspond à 1 $\boxed{4}$ et donc $P(X=1) = P(B) = \frac{25}{72}$

* $(X=2) = P(D)$ avec $D = \{(i,j,k) \in \Omega \mid \text{il y a exactement 2 } \boxed{4}\}$

$$|D| = \binom{3}{2} \times 5 \quad \leftarrow \text{le 3}^{\text{in}} \text{ de n'est pas un } \boxed{4}$$

choix des places des 4

$$\text{q6 } P(X=2) = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$$

$$* P(X=3) = P(A) = \frac{1}{216}$$

$\mathcal{U}^0$

x_i	-1	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

$$4) E(X) = -\frac{125}{216} + \frac{75}{216} + \frac{2 \times 15}{216} + \frac{3}{216} = -\frac{17}{216} \simeq -0,078$$

$\mathcal{U}_1^0$

$$E(X) = -\frac{17}{216}$$

$$E(X^2) = (-1)^2 \frac{125}{216} + \frac{75}{216} + 2^2 \frac{15}{216} + \frac{3^2}{216} = \frac{269}{216}$$

$\uparrow$ formule de transfert

on conduit avec König-Huygens :

③

$$V(X) = \frac{269}{216} - \frac{(17)^2}{216^2} = \frac{269 \times 216 - 17^2}{216^2}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ 269 \\ 216 \\ \hline 1614 \\ 2690 \\ 53800 \\ \hline 58104 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 170 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 216 \\ 216 \\ \hline 1296 \\ 2160 \\ 43200 \\ \hline 46656 \end{array}$$

$$d \quad V(X) = \frac{57815}{46656} \approx 1,23...$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 1,11...$$

comme quoi c'est faisable sans machine!

5) Voir feuille ④

6) Notons X' la VAD X où l'on a modifié $n_4 = Q_3$

$$E(X') = -\frac{125}{216} + \frac{75}{216} + \frac{2 \times 15}{216} + \frac{Q_3}{216}$$

$$= -\frac{17}{216} + \frac{Q_3 - 3}{216}$$

$$E(X') = 0 \Leftrightarrow \frac{Q_3 - 3}{216} = \frac{17}{216} \Leftrightarrow Q_3 = 20 \text{ €}$$

Rem. 20 € c'est bon + que 3 € : c'est normal
car obtenir 3 | 4 c'est rare!

```

from random import *
def jeu():
    L=[randint(1,6),randint(1,6),randint(1,6)]
    return L
def X(): #il a choisit le 4
    gain=0
    L=jeu()
    for i in range(3):
        if L[i]==4:
            gain=gain+1
    if gain==0: #aucun dé=4
        gain=-1
    return gain

```

----- La suite n'était pas demandée mais vous pouvez jeter un oeil pour la séance de simulation

que l'on fera à la rentrée -----

```

def loiX(k,nb): # simule P(X=k)
    c=0
    for i in range(nb):
        if X()==k:
            c=c+1
    return c/nb

def esp(nb): #simule l'espérance de X
    s=0
    for n in range(nb):
        s=s+X()
    return [s/nb,-(5/6)**3+3*25/216+6*5/216+3/216]

```

```

#>>> esp(1000001)
#[-0.07787592212407787, -0.07870370370370383]

```

```

def esp2(nb): #simule l'espérance de X^2
    s=0
    for n in range(nb):
        s=s+X()**2
    return [s/nb,269/216]

```

```

#>>> esp2(1000001)
#[1.2455657544342456, 1.2453703703703705]

```

```
def V(nb): #simule la variance de X
    E2=esp2(nb)[0]
    E=esp(nb)[0]
    return [E2-E**2,57815/46656]

#>>> V(1000001)
#[1.2394059526418553, 1.23917609739369]
```

```
def Xprime(): #loi X'
    gain=0
    L=jeu()
    for i in range(3):
        if L[i]==4:
            gain=gain+1
    if gain==0: #aucun dé=4
        gain=-1
    elif gain==3:
        gain=20 # c'est Q3
    return gain
```

```
#L'exécution de cette instruction montre la rareté de X'=20
for g in range(1000):
    print(Xprime(),end=' ')
```

```
def espprime(nb): #simule l'espérance de X'
    s=0
    for n in range(nb):
        s=s+Xprime()
    return s/nb
```

```
#>>> espprime(1000001)
#-0.001086998913001087
```

1. a) $\frac{P_{n+1}}{P_n} = u_{n+1}$. Si $\prod_{n \geq 0} u_n$ converge, alors, la

CCP 2002 (n?)

suite (P_n) converge vers un réel $l \neq 0$. Par TG:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{l}{l} = 1 \quad \underline{\text{d}} \quad \boxed{\lim u_n = 1}$$

b) $\rightarrow$ Voir feuille ① b)

2. a) Pour $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \setminus \forall n \geq n_0, |u_n - 1| \leq \frac{1}{2}$

on $|u_n - 1| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} \leq u_n$

$\underline{\text{d}} \quad \boxed{\forall n \geq n_0, u_n > 0}$

b) Notons $P_n = \prod_{p=0}^n u_p$ et $P'_n = \prod_{p=n_0}^n u_p$

$n \geq n_0 : P_n = P_{n_0-1} P'_n$ et $P'_n = \frac{P_n}{P_{n_0-1}}$ car $P_{n_0-1} \neq 0$

d'où si (P'_n) cvg vers $l' \neq 0$, alors (P_n) cvg vers $P_{n_0-1} l' \neq 0$

et si (P_n) cvg vers $l \neq 0$, alors (P'_n) cvg vers $\frac{l}{P_{n_0-1}} \neq 0$

$\underline{\text{d}} \quad \boxed{\prod_{n \geq 0} u_n \text{ cvg} \Leftrightarrow \prod_{n \geq n_0} u_n \text{ cvg}}$

① bis

b) i) $\prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

d': $\prod_{n \geq 2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge

ii) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

d': $\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ diverge

iii) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=2}^n (k-1) \times \prod_{k=2}^n (k+1)}{\left(\prod_{k=2}^n k\right)^2} = \frac{(n-1)! \cdot \frac{(n+1)!}{2}}{(n!)^2}$

$$= \frac{(n-1)! \times \frac{(n+1)!}{2}}{(n!)^2} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

d $\prod_{k \geq 2} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ cvg et $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$

3. a.) Posons $P_n = \prod_{p=0}^n u_p$ et $S_n = \sum_{p=0}^n \ln u_p$ (2)

On a $\ln P_n = \ln \prod_{p=0}^n u_p = \sum_{p=0}^n \ln u_p = S_n$ et donc $P_n = e^{S_n}$

Si $\prod_{n \geq 0} u_n$ cvg, soit $l = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n \neq 0$: $S_n = \ln P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln l \in \mathbb{R}$

d'où la suite (S_n) cvg ; soit $(\sum \ln u_n)$ cvg

si $(\sum \ln u_n)$ cvg, soit $L = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \in \mathbb{R}$: $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^L \neq 0$

donc (P_n) cvg vers $e^L \neq 0$; soit $\prod_{n \geq 0} u_n$ cvg

1. $\left[\prod_{n \geq 0} u_n \text{ cvg} \Leftrightarrow (\sum \ln u_n) \text{ cvg} \right]$

b.) $\prod_{n \geq 0} (1+u_n) \text{ cvg} \Leftrightarrow (\sum \ln(1+u_n)) \text{ cvg}$

on a $\underline{\underline{\text{si}}}$ $u_n \rightarrow 0$: $\ln(1+u_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} u_n > 0$

Si $\prod (1+u_n)$ cvg, avec le 1) $1+u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

d'où $\ln(1+u_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} u_n > 0$ et par le Th. de comparaison (TC) :

$(\sum \ln(1+u_n)) \text{ cvg} \Leftrightarrow (\sum u_n) \text{ cvg}$. Comme $(\sum \ln(1+u_n)) \text{ cvg}$

on a donc : $(\sum u_n) \text{ cvg}$

Si $(\sum u_n)$ cvg on a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ (cond. nécessaire de cvg d'une série) (3)

d'où $\ln(1+u_n) \sim u_n > 0$ et toujours par T.C. :

$(\sum \ln(1+u_n))$ cvg et par le a) : $\prod_{n \geq 0} (1+u_n)$ cvg

$$\boxed{\prod_{n \geq 0} (1+u_n) \text{ cvg} \Leftrightarrow (\sum u_n) \text{ cvg}}$$

c) si $0 < u_n < 1$, $\ln(1-u_n) \sim -u_n < 0$ si $u_n \rightarrow 0$
 $\hookrightarrow 1-u_n > 0 \nearrow$ $n \rightarrow \infty$

On raisonne exactement comme en b) avec TC :

$$\prod_{n \geq 0} (1-u_n) \text{ cvg} \underset{(a)}{\Leftrightarrow} (\sum \ln(1-u_n)) \text{ cvg} \underset{(TC)}{\Leftrightarrow} (\sum u_n) \text{ cvg}$$

4. a.) $\forall n \geq 1$, $0 < \frac{1}{4n^2} \leq \frac{1}{4} < 1$ et comme $(\sum \frac{1}{4n^2})$ cvg,

par le 3. c. on conclut

$$\boxed{\prod_{n \geq 1} (1 - \frac{1}{4n^2}) \text{ cvg}}$$

b.) $\forall n \geq 1$, $\forall n \neq 0$: $0 < \frac{x^2}{n^2 \pi^2} < \frac{1}{n^2} \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{x^2}{n^2 \pi^2} < 1$
 $x \in]-\pi, \pi[$

et comme $(\sum \frac{x^2}{n^2 \pi^2})$ cvg ($\frac{x^2}{\pi^2 n^2} = \frac{1}{n^2}$ avec x constante)

grâce au 3. c. $\boxed{\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) \text{ cvg}}$

(4)

Donc $n=0$: $1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} = 1$, $P_n = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0$ d'où $(\prod u_n) \text{ cvg}$

d. $\boxed{\forall n \in]-\pi, \pi[: \prod \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) \text{ cvg}}$

c.) $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n} > 0$. $\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$
 $= \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} - \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ qd } n \rightarrow \infty$
 $\sim -\frac{x^2}{2n^2} < 0$ et $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right) \text{ cvg}$

D'où, par T. c., $\left(\sum \ln u_n\right) \text{ cvg}$ et avec le 3. a. :

d. $\boxed{\prod \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n} \text{ cvg}}$

~~x.)~~

~~x.~~

~~x | x - x~~

5a) Utilisons le 3.b, et considérons le produit ⑤

$$\text{infini } \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right); \quad P_n = \prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \prod_{p=1}^n \frac{p+1}{p} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{+ \infty}$

d'où $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge et avec 3.b. ;

$$\underline{\left(\sum \frac{1}{n} \right) \text{ Dvg}}$$

b. C'est une série géométrique de raison $q = \frac{1}{p} \in]0, \frac{1}{2}]$
 $\frac{1}{2} < 1$

$$\underline{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}}$$

c. Si $\left(\sum \frac{1}{P_n} \right)$ convergeait, d'après le 3.c, le produit

infini $\prod \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{P_n}} \right)$ converge aussi. En effet ;

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{P_n}} = \frac{P_n}{P_n - 1} = \frac{P_n - 1 + 1}{P_n - 1} = 1 + \frac{1}{P_n - 1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{P_n - 1} \sim \frac{1}{P_n}$$

d'où $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{P_n}} = l \in \mathbb{R}$. or d'après Euler :

$$l = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = +\infty ; \quad \text{Absurde d. } \underline{\left(\sum \frac{1}{P_n} \right) \text{ Dvg}}$$

6) Pour $x = \frac{\pi}{2} \in]-\pi, \pi[$: On $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$ ⑥

$$\text{d'où } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}$$

7a) Etudions $P_n = \sum_{h=0}^n \frac{1}{h!} (1 + u_h)$

comme $|u_h| < 1$ on a $1 + u_h > 0$ donc $P_n > 0$

d'où $S_n = L P_n = \sum_{h=0}^n \frac{1}{h!} (1 + u_h)$

Comme $(\sum u_n)$ cvg on a $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

donc $|P_n(1 + u_h)| \sim |u_h| \geq 0$

Si $(\sum u_h)$ Abs cvg alors $(\sum \frac{1}{h!} (1 + u_h))$ est
par T.L.
Absolument convergente donc (S_n) admet une
limite l d'où (P_n) cvg vers $e^l > 0$

ie $\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} (1 + u_h)$ cvg

b) Si $(\sum u_n)$ cvg $P_n(1 + u_h) \sim u_h$ est insuffisant
on fait donc un DL:

$$f_n(1+u_k) = u_k - \frac{u_k^2}{2} + o(u_k^2)$$

(7)

$$= u_k - v_k$$

avec $(\sum u_k)$ cvg et $v_k = \frac{u_k^2}{2} + o(u_k^2)$

Donc $v_k \sim \frac{u_k^2}{2} \geq 0$

si $(\sum v_k)$ cvg alors $(\sum f_n(1+u_k))$ cvg par TC

comme somme de 2 séries cvg. et linéarité

donc la suite (P_n) cvg (comme + limit)
vers $e^l > 0$

ie $\boxed{(\prod (1+u_n)) \text{ cvg}}$

$$* P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$$

comme $\left(\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$ et $\left(\sum \left(\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)^2\right) = \left(\sum \frac{1}{k^2}\right)$ convergent, le

produit infini existe et est > 0 . Donc le produit $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n}$

$$\text{Or } P_{2n} = \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2n}{2n-1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1/2} \times \underbrace{\frac{2n-1}{2n}}_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{d: } \boxed{\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{2}}$$

II 1') $|1 + \frac{i}{n}|^2 = 1 + \frac{1}{n^2}$ donc si $P_n = \prod_{k=1}^n |1 + \frac{i}{k}|$ alors (8)

$P_n = \sqrt{\prod_{k=1}^n (1 + \frac{1}{k^2})}$ et comme $(\sum \frac{1}{n^2})$ cvg abs. on a

avec la 2°) b), (P_n) qui cvg vers $\sqrt{\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n^2})} > 0$

d'où : $\prod_{n=1}^{\infty} |1 + \frac{i}{n}|$ existe

2°) $\left| \prod_{k=1}^n (1 + z_k) - 1 \right| = \left| (1 + z_1) \cdots (1 + z_n) - 1 \right|$ on développe tout :

$= \left| 1 + z_1 + \cdots + z_n + z_1 z_2 + \cdots + z_{n-1} z_n + z_1 z_2 z_3 + \cdots + z_1 z_2 \cdots z_n - 1 \right|$

$|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + |z_1 z_2| + \cdots + |z_{n-1} z_n| + |z_1 z_2 z_3| + \cdots + |z_1 z_2 \cdots z_n|$

inégalité triangulaire

cette expression est la même qu'au dessus avec les modules donc :

$|z_1| + \cdots + |z_n| + |z_1 z_2| + \cdots + |z_1 \cdots z_n| = \prod_{k=1}^n (1 + |z_k|) - 1$

d'où $\left| \prod_{k=1}^n (1 + z_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=1}^n (1 + |z_k|) - 1$

Alors Pour récurrence, ça marche aussi !

$$3^\circ) \forall n \geq p+1 \quad |P_n - P_p| = |P_p| \left(\prod_{h=p+1}^n (1+u_h) - 1 \right) \quad (9)$$

$$\leq \prod_{h=0}^p (1+|u_h|) \left(\prod_{h=p+1}^n (1+|u_h|) - 1 \right) \text{ avec } (2^\circ)$$

$$\leq P'_n - P'_p = |P'_n - P'_p|$$

$$\text{soit } P'_n = \prod_{h=0}^n (1+|u_h|)$$

Or cette suite est cvg grâce au I 2°)b) donc elle est de Cauchy donc la suite (P_n) aussi donc :

la suite (P_n) cvg ie $\prod_{n=0}^{+\infty} (1+u_n)$ existe

comme on admet que $\lim P_n > 0$

$$4^\circ) \text{ Posons } P_n = \prod_{h=0}^n u_h \text{ et } S_n = \sum_{h=0}^n \theta_h$$

$$\text{on a } \underline{P_n = e^{iS_n}}$$

* Si (S_n) cvg vers α alors (P_n) cvg vers $e^{i\alpha}$

* Si (P_n) cvg vers l . On a $|l|=1$ car $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|P_n|=1 \text{ d'où } \exists \alpha \in \mathbb{R} \mid l = e^{i\alpha}$$

$$\text{d'autre part comme } u_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \longrightarrow \frac{l}{l} = 1 \text{ on a } \underline{\theta_n \rightarrow 0}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists k_n \in \mathbb{Z} \mid -\pi < S_n - \alpha - 2k_n\pi \leq \pi$$

$$\text{donc } e^{i(S_n - \alpha - 2k_n\pi)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{posons } \alpha_n = S_n - \alpha - 2k_n\pi$$

$$\alpha_n \in [-\pi, \pi] \text{ et } e^{i\alpha_n} \rightarrow 1 \text{ donc } (1) \alpha_n = (1) |\alpha_n| \rightarrow 1 \quad (\operatorname{Re}(e^{i\alpha_n}))$$

$$\text{or } |\alpha_n| \in [0, \pi] \text{ donc } \operatorname{Arg}((1) |\alpha_n|) = |\alpha_n| \rightarrow \operatorname{Arg} 1 = 0$$

donc $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

(10)

donc $\alpha_{n+1} - \alpha_n = S_{n+1} - S_n - 2h_{n+1}\pi + 2h_n\pi \rightarrow 0$

comme $S_{n+1} - S_n = \theta_{n+1} \rightarrow 0$ on obtient;

$h_{n+1} - h_n \rightarrow 0$ et comme $h_n \in \mathbb{Z}$ il faut:

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad h_n = h_{n_0} = p \in \mathbb{Z}$

comme $S_n = \alpha_n + \alpha + 2h_n\pi$ on a:

(S_n) cvg vers $0 + \alpha + 2p\pi$ ie $(\sum \theta_n)$ cvg

d (P_n) cvg $\Leftrightarrow (S_n)$ cvg

5°) $1 + \frac{i}{n} = |1 + \frac{i}{n}| e^{i\theta_n}$ avec $\theta_n = \text{Arctan} \frac{1}{n}$ (dimontez - l)

on $\theta_n \sim \frac{1}{n} > 0$ donc $(\sum \theta_n)$ Dvg donc $(\pi e^{i\theta_n})$ Dvg

comme $(\pi |1 + \frac{i}{n}|)$ cvg vers un réel non nul vu

de I 2°) b), si $\pi (1 + \frac{i}{n})$ convergeait vers l

on aurait $\prod_{n=0}^{\infty} e^{i\theta_n} = \frac{l}{\prod_{n=0}^{\infty} |1 + \frac{i}{n}|}$ absurde

d $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{i}{n})$ n'existe pas

$$6) a) \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall k \geq N: |x_k - l| \leq \varepsilon/2 \quad (11)$$

$$\text{d'où } \forall n \geq p+1 \geq N: |x_n - x_p| \leq |x_n - l| + |l - x_p| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \leq \varepsilon$$

d (x_n) de Cauchy

$$b) i) \text{ Pour } \varepsilon = 1 > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq p+1 \geq N_0: |x_n - x_p| \leq 1$$

$$\text{donc } \forall n \geq N_0 + 1: |x_n - x_{N_0}| \leq 1$$

$$\Rightarrow |x_n| \leq 1 + |x_{N_0}| \quad \left(\begin{array}{l} \text{inégalité} \\ \text{triangulaire} \\ \text{inversee} \end{array} \right)$$

$$\text{cqs } \forall n \in \mathbb{N}: |x_n| \leq M = \max(|x_0|, \dots, |x_{N_0}|, 1 + |x_{N_0}|) \in \mathbb{R}^+$$

d (x_n) est bornée

ii) $B, W, \text{ do } \mathbb{Q}$.

$$iii) \exists \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ str } \nearrow \text{ tel que } x_{\varphi(n)} \rightarrow l$$

$$\underline{\forall \varepsilon > 0}, \underline{\exists N_1 \in \mathbb{N}} \mid \forall n \geq N_1: |x_{\varphi(n)} - l| \leq \varepsilon/2$$

$$\underline{\exists N_2 \in \mathbb{N}} \mid \forall n \geq p+1 \geq N_2: |x_n - x_p| \leq \varepsilon$$

$$\forall p \geq \max(N_1, N_2), \text{ choose } n = \varphi(p+1) \quad (2)$$

$$\text{hence } |x_p - l| \leq |x_p - x_{\varphi(p+1)}| + |x_{\varphi(p+1)} - l|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$p+1 \geq N_1$

$(\varphi(p+1) \geq p+1 \geq N_2)$

$$\leq \varepsilon$$

(x_n) conv ver l