I. Quelques résultats utiles

I.A. Propriétés générales de la loi $*$

1. Soit $f \in \mathbb{A}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(f*\delta)(n) = f(n)\delta\left(\frac{n}{n}\right) + \sum_{d|n, d\neq n} f(d)\delta\left(\frac{n}{d}\right) = 1f(n) + 0 = f(n)$$

Ainsi $f*\delta = f$ et $f = \delta * f$ car $(\delta*f)(n) = \delta(1)f\left(\frac{n}{1}\right) + \sum_{d|n, d\neq 1} \delta(d)f\left(\frac{n}{d}\right) = f(n)$

d'où $\boxed{\delta \text{ est un élément neutre pour la loi } *}$ sur $\mathbb{A}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_n & \longrightarrow & \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid n\} \\ (d_1, d_2) & \longmapsto & d_1 \end{array}$ est bien définie

de bijection réciproque : $\begin{array}{ccc} \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid n\} & \longrightarrow & \mathcal{C}_n \\ d & \longmapsto & \left(d, \frac{n}{d}\right) \end{array}$

ainsi on a bien $\boxed{(f*g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{(d_1,d_2)\in\mathcal{C}_n} f(d_1)g(d_2)}$

3. Soit $f, g \in \mathbb{A}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_n & \longrightarrow & \mathcal{C}_n \\ (d_1, d_2) & \longmapsto & (d_2, d_1) \end{array}$ est bijective de bijection réciproque elle-même. Ainsi

$$(f*g)(n) = \sum_{(d_1,d_2)\in\mathcal{C}_n} f(d_1)g(d_2) = \sum_{(d_2,d_1)\in\mathcal{C}_n} g(d_2)f(d_1) = (g*f)(n)$$

d'où $f*g = g*f$ et $\boxed{* \text{ est commutative}}$

4. Soit $f, g, h \in \mathbb{A}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, en utilisant la bijection : $(d_1, d_2, d_3) \in \mathcal{C}'_n \mapsto (d_1, d_1d_2) \in \{(e,d) \mid d \mid n \text{ et } e \mid d\}$

$$[(f*g)*h](n) = \sum_{d|n}\left(\sum_{e|d} f(e)g\left(\frac{d}{e}\right)\right)h\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n, e|d} f(e)g\left(\frac{d}{e}\right)h\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{(d_1,d_2,d_3)\in\mathcal{C}'_n} f(d_1)g(d_2)h(d_3)$$

Puis de manière analogue, on obtient : $\sum_{(d_1,d_2,d_3)\in\mathcal{C}'_n} f(d_1)g(d_2)h(d_3) = [f*(g*h)](n)$

d'où $(f*g)*h = f*(g*h)$ et ainsi $\boxed{* \text{ est associative}}$

5. On sait que $(\mathbb{A}, +)$ est un groupe commutatif car pour tout ensemble $X \neq \emptyset$, $\left(\mathbb{C}^X, +\cdot\right)$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.
De plus, $*$ est commutative (3), associative (4) et admet un élément neutre (1).
Soit $f, g, h \in \mathbb{A}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$[(f+g)*h](n) = \sum_{d|n}(f(d)+g(d))h\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f(d)h\left(\frac{n}{d}\right) + \sum_{d|n} f(d)h\left(\frac{n}{d}\right) = [(f*h)+(f*g)](n)$$

Donc $(f+g)*h = (f*h)+(g*h)$ et $h*(f+g) = (h*f)+(f*g)$ car $*$ commutative.
On peut dire que $\boxed{(\mathbb{A}, +, *) \text{ est un anneau commutatif}}$

I.B. Groupe des fonctions multiplicatives

6. On suppose que $\forall p \in \mathcal{P},\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(p^k) = g(p^k)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   Si $n = 1$, on a $1 \wedge 1 = 1$ donc $f(1) = f(1^2) = f(1)^2$ or $f(1) \neq 0$ donc $f(1) = 1 = g(1)$ (analogue)

   Si $n > 2$, on écrit la décomposition en facteurs premiers :
   $$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \text{ avec } r \in \mathbb{N}^*, \text{ les } p_i \in \mathcal{P} \text{ (distincts deux à deux) et les } \alpha_i \in \mathbb{N}^*$$
   Par récurrence immédiate, on a $\forall k \in [\![1, r]\!],\ f\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} f\left(p_i^{\alpha_i}\right)$
   Puis en utilisant l'hypothèse $f(n) = \prod_{i=1}^{r} f\left(p_i^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^{r} g\left(p_i^{\alpha_i}\right) = g(n)$ de façon analogue
   En conclusion $\boxed{f = g}$

7. **bien définie :** Soit $(d_1, d_2) \in \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$.
   On peut écrire $n = d_1 q_1$ et $m = d_2 q_2$ avec $q_1, q_2 \in \mathbb{N}^*$
   donc $nm = (d_1 d_2)(q_1 q_2)$
   d'où $d_1 d_2 \mid nm$ et ainsi $d_1 d_2 \in \mathcal{D}_{mn}$
   donc π est bien définie.

   injective : Soit (d_1, d_2) et $(e_1, e_2) \in \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$ tels que $\pi(d_1, d_2) = \pi(e_1, e_2)$
   On a $d_1 d_2 = e_1 e_2$ ainsi $e_1 \mid d_1 d_2$
   Comme $n \wedge m = 1$, donc n et m n'ont aucun facteurs premiers en commun
   comme $e_1 \mid n$ et $d_2 \mid m$, alors e_1 et d_2 n'ont aucun facteurs premiers en commun
   donc $e_1 \wedge d_2 = 1$. Ainsi avec le théorème de Gauss, $e_1 \mid d_1$
   et de façon analogue $d_1 \mid e_1$
   comme $d_1 \in \mathbb{N}$ et $e_1 \in \mathbb{N}$, on a $e_1 = d_1$
   puis on obtient $(d_1, d_2) = (e_1, e_2)$
   Ce qui prouve l'injectivité de π

   surjective : Soit $d \in \mathcal{D}_{mn}$.
   On écrit les décompositions en facteurs premiers de n et m : $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ et $m = \prod_{i=1}^{s} q_i^{\beta_i}$
   Comme $n \wedge m = 1$, les p_i sont distincts des q_i et on peut écrire
   $$d = \left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i'}\right)\left(\prod_{i=1}^{s} q_i^{\beta_i'}\right) \quad \text{avec } 0 \leqslant \alpha_i' \leqslant \alpha_i \text{ et } 0 \leqslant \beta_i' \leqslant \beta_i$$
   Onpose $d_1 = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i'}$ et $d_2 = \prod_{i=1}^{s} q_i^{\beta_i'}$ de sorte que $d = d_1 d_2$, $d_1 \mid n$ et $d_2 \mid m$
   d'où $(d_1, d_2) \in \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$ et $\pi(d_1, d_2) = d$
   Ce qui prouve la surjectivité de π
   En conclusion $\boxed{\pi \text{ est bien définie et réalise une bijection entre } \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m \text{ et } \mathcal{D}_{mn}}$

8. On suppose que f et g sont deux fonctions multiplicatives. Alors $f(1) = 1 = g(1)$ d'après 6 d'où
   $$(f * g)(1) = \sum_{d|1} f(d) g\left(\frac{1}{d}\right) = f(1)g(1) = 1 \neq 0$$

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \wedge m = 1$. En utilisant la bijectivité de π de 7 :

$$(f*g)(nm) = \sum_{d \in \mathcal{D}_{mn}} f(d) g\left(\frac{nm}{d}\right) = \sum_{(d_1,d_2) \in \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m} f(d_1 d_2) g\left(\frac{nm}{d_1 d_2}\right)$$

En regardant les facteurs premiers on voit que pour $(d_1, d_2) \in \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$, on a $d_1 \wedge d_2 = 1 = \frac{n}{d_1} \wedge \frac{m}{d_2}$ donc

$$(f*g)(nm) = \sum_{(d_1,d_2) \in \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m} f(d_1) f(d_2) g\left(\frac{n}{d_1}\right) g\left(\frac{m}{d_2}\right) = \sum_{d_1 \in \mathcal{D}_n} f(d_1) g\left(\frac{n}{d_1}\right) \sum_{d_2 \in \mathcal{D}_m} f(d_2) g\left(\frac{m}{d_2}\right)$$

donc $(f*g)(nm) = (f*g)(n)(f*g)(m)$ et ainsi $\boxed{f*g \text{ est encore multiplicative}}$

9. *On veut juste l'existence de g mais pour rechercher g, On traite cela par analyse synthèse.*

Analyse : Soit $g \in \mathbb{M}$ convenant.

Ainsi selon 6, on a $g(1) = 1$.

Puis pour $p \in \mathcal{P}$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, les $g(p^k)$ sont définis par

$$g(p^0) = 1 \text{ et la relation } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ g(p^k) = -\sum_{i=1}^{k} f(p^i) g(p^{k-i})$$

Ainsi g est définie sur $\mathrm{P_P} = \left\{p^k \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } p \in \mathcal{P}\right\}$

Enfin pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \mathrm{P_P}$, on écrit sa décomposition en facteurs premiers $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ et nécessairement

$$g(n) = \prod_{i=1}^{r} g\left(p_i^{\alpha_i}\right) \quad (*)$$

car les $p_i^{\alpha_i}$ sont premiers entre eux deux à deux.

Synthèse : Soit g défini par $g(1) = 1$ puis sur $\mathrm{P_P}$ par les relations de récurrence (pour chaque $p \in \mathcal{P}$) et enfin par la relation $(*)$.

Par unicité de la décomposition en facteurs premiers, l'application g est ainsi bien définie et la formule $(*)$ est valable pour $n \in \mathrm{P_P}$. (Pour $n = 1$, on a $r = 0$ et pour $n \in \mathrm{P_P} \setminus \{1\}$, on a $r = 1$).

Soit alors $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \wedge m = 1$.

On écrit les décompositions en facteurs premiers de $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ et $m = \prod_{i=1}^{s} q_i^{\beta_i}$. Comme $n \wedge m = 1$, la décomposition (à l'ordre près) de nm en produit de facteurs premiers est $nm = \left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{s} q_i^{\beta_i}\right)$.

On a alors :

$$g(nm) = g\left[\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{s} q_i^{\beta_i}\right)\right] = \prod_{i=1}^{r} g\left(p_i^{\alpha_i}\right) \cdot \prod_{i=1}^{s} g\left(q_i^{\beta_i}\right) = g(n)g(m)$$

Conclusion : On a bien une fonction $\boxed{g \text{ multiplicative vérifiant } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in \mathcal{P},\ g(p^k) = -\sum_{i=1}^{k} f(p^i) g(p^{k-i})}$

On remarque que l'unicité a été établie.

D'après l'énoncé et 8, les fonctions δ et $f*g$ sont multiplicatives.
Soit $p\in\mathcal{P}$ et $k\in\mathbb{N}^*$. Pour montrer que $\delta=f*g$, il suffit d'établir que $\delta\left(p^k\right)=(f*g)\left(p^k\right)$, en utilisant 6.
Comme on a $\mathcal{D}_{p^k}=\left\{p^i\mid i\in[\![0,k]\!]\right\}$, on a

$$(f*g)\left(p^k\right)=\sum_{i=0}^{k}f\left(p^i\right)g\left(p^{k-i}\right)=f(1)g\left(p^k\right)+\sum_{i=1}^{k}f\left(p^i\right)g\left(p^{k-i}\right)$$

Par définition (*) de g et comme $k\in\mathbb{N}^*$, on a

$$(f*g)\left(p^k\right)=g\left(p^k\right)-g\left(p^k\right)=0=\delta\left(p^k\right)$$

Ce qui permet de conclure que : $\boxed{f*g=\delta}$
On remarque pour la suite qu'une fonction de $\mathbb{M}$ est caractérisée par les valeurs prises sur $\left\{p^k\mid p\in\mathcal{P},k\in\mathbb{N}^*\right\}$.

10. D'après 8, $*$ induit une loi de composition interne sur $\mathbb{M}$.
Avec 3, 4, 1, on voit que $*$ est commutative, associative et admet pour neutre $\delta\in\mathbb{M}$.
De plus, on vient de voir que $\forall f\in\mathbb{M},\ \exists g\in\mathbb{M},\ f*g=\delta=g*f$ ce qui prouve tout élément de $\mathbb{M}$ admet un symétrique pour $*$ dans $\mathbb{M}$.
On peut conclure que $\boxed{(\mathbb{M},*)\text{ est un groupe abélien}}$

I.C. La fonction de Möbius

11. On a $\mu(1)=1\neq 0$.
Soit $n,m\in\mathbb{N}^*$ tels que $n\wedge m=1$. Montrons $\mu(nm)=\mu(n)\mu(m)$.
Si $n=1$, alors on a bien $\mu(nm)=\mu(m)=\mu(n)\mu(m)$. Si $m=1$, c'est analogue.

Si n ou m n'est pas produit de nombres premiers distincts, alors il en est de même pour nm et on a $\mu(nm)=\mu(n)\mu(m)$.

Si n et m sont produits respectivement de r et s nombres premiers distincts.
Alors comme $n\wedge m=1$ alors nm est le produit de $r+s$ nombres premiers distincts
et on a $\mu(nm)=(-1)^{r+x}=(-1)^r(-1)^s=\mu(n)\mu(m)$
On a bien montré que $\boxed{\mu\text{ est multiplicative}}$

12. Pour établir que $\mu*\mathbf{1}=\delta$ il suffit d'établir que μ est le symétrique de $\mathbf{1}$ dans le groupe $(\mathbb{M},*)$.
La relation établi en 9 détermine $g\in\mathbb{M}$ comme étant le symétrique de f.
Soit $p\in\mathcal{P}$ et $k\in\mathbb{N}^*$. Il suffit alors d'établir que $\mathbf{1}(p^k)=-\sum_{i=1}^{k}\mu(p^i)\mathbf{1}(p^{k-i})$ c'est à dire $1+\sum_{i=1}^{k}\mu(p^i)=0$
Comme $\mu(p)=-1$ et $\forall j\geqslant 2,\ \mu(j)=0$, l'égalité est établie.
On a montré que $\boxed{\mu*\mathbf{1}=\delta}$

13. On a $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathrm{F}(n)=\sum_{d|n}f(d)\mathbf{1}\left(\frac{n}{d}\right)=(f*\mathbf{1})(n)$.
Ainsi $\mathrm{F}=f*\mathbf{1}$.
Comme $*$ est commutative et que μ et $\mathbf{1}$ sont symétriques dans le groupe $(\mathbb{M},*)$ d'après 12. On a

$$\mu*\mathrm{F}=\mu*\mathbf{1}*f=\delta*f=f$$

donc $\boxed{\text{pour tout } n\in\ \mathbb{N}^*,\ f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\mathrm{F}\left(\frac{n}{d}\right)}$

14. On sait d'après le cours que $\varphi \in \mathbb{M}$ (admis aujourd'hui).
Soit $p \in \mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Il suffit de montrer que $\varphi(p^k) = \mu * \mathrm{I}(p^k)$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$, comme p est premier, on a $\mathrm{N} \wedge p^k = 1$ si et seulement si $\mathrm{N} \wedge p = 1$, on compte alors les multiples de p entre 1 et p^k, d'où :
$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$$
et
$$(\mu * \mathbf{I})(p^k) = \sum_{i=0}^{k} \mu(p^i)\mathbf{I}\left(p^{k-i}\right) = \mu(1)\mathbf{I}\left(p^k\right) + \mu(p)\mathbf{I}\left(p^{k-1}\right) + 0 = p^k - p^{k-1}$$
ainsi on a bien $\varphi(p^k) = \mu * \mathbf{I}(p^k)$ ce qui permet de conclure que $\boxed{\varphi = \mu * \mathbf{I}}$

I.D. Déterminant de Smith

15. On note d'_{ij} respectivement n'_{ij} le terme général de $\mathrm{D}^\top$ respectivement $\mathrm{M}'\mathrm{D}^\top$. On a
$$n'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m'_{ik}d'_{kj} = \sum_{k=1}^{n} m'_{ik}d_{jk} = \sum_{k|j,k|i} g(k) = \sum_{k|(i\wedge j)} g(k) = (g * \mathbf{1})(i \wedge j)$$
or $g * \mathbf{1} = f * \mu * \mathbf{1} = f$ d'après 12 donc $n'_{ij} = f(i \wedge j) = m_{ij}$
d'où $\boxed{\mathrm{M} = \mathrm{M}'\mathrm{D}^\top}$

16. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, si $j \mid i$ alors $j \leqslant i$ donc si $j > i$, on a $d_{ij} = m'_{ij} = 0$.
Ainsi les matrices D et M′ sont triangulaires inférieures donc avec 15,
$$\det(\mathrm{M}) = \det\left(\mathrm{D}^\top\right)\det\left(\mathrm{M}'\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} d_{ii}\right)\left(\prod_{i=1}^{n} m'_{ii}\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} 1\right)\left(\prod_{i=1}^{n} g(i)\right)$$
Ainsi $\boxed{\text{le déterminant de M vaut bien } \det(\mathrm{M}) = \prod_{k=1}^{n} g(k)}$

I.E. Séries de Dirichlet

17. On suppose que $s > \mathrm{A}_c(f) = \inf\{u \in \mathbb{R},\ \text{la série } \sum \frac{f(k)}{k^u} \text{ converge absolument}\}$.
La caractérisation de la borne inférieure, nous fournit $t < s$ et $t \in \{u \in \mathbb{R},\ \text{la série } \sum \frac{f(k)}{k^u} \text{ converge absolument}\}$
Ainsi $\frac{f(k)}{k^s} \underset{k\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{f(k)}{k^t}\right)$.
Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{f(k)}{k^s}$ converge absolument.
Ainsi $\boxed{\text{si } s > \mathrm{A}_c(f), \text{ alors la série } \sum \frac{f(k)}{k^s} \text{ converge absolument}}$

18. On suppose que pour tout $s > \max(\mathrm{A}_c(f), \mathrm{A}_c(g))$, $\mathrm{L}_f(s) = \mathrm{L}_g(s)$. On va procéder en plusieurs étapes.

étape 1 : *On se ramène à la nullité d'une fonction arithmétique bornée.*
On pose $d = f - g$ et $\mathrm{R} = 1 + \max(\mathrm{A}_c(f), \mathrm{A}_c(g))$
de sorte que $\mathrm{R} > \max(\mathrm{A}_c(f), \mathrm{A}_c(g))$ et pour tout $s \geqslant \mathrm{R}$, la série $\sum \frac{d(s)}{k^s}$ converge de somme nulle.

On remarque que $\forall t \geqslant 0, \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d(k)/k^{\mathrm{R}}}{k^t} = 0.$

Onpose $h : k \longmapsto \frac{d(k)}{k^{\mathrm{R}}} = \frac{f(k) - g(k)}{k^{\mathrm{R}}}$ et il suffit d'établir que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ h(k) = 0$$

On va le faire par récurrence dans l'étape 3.

On remarque que la série $\sum h(k)$ converge absolument donc h tend vers 0 en $+\infty$ d'où h est bornée.

Ceci nous fournit $\mathrm{M} > 0$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $|h(k)| \leqslant \mathrm{M}$ et on rappelle que $\forall s \geqslant 0$, $\mathrm{L}_h(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{h(k)}{k^s} = 0.$

étape 2 : *Un résultat asymptotique.*

Pour $p \geqslant 1$, on pose $\mathrm{R}_p : s \mapsto \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{h(k)}{k^s}$

Pour $s > 1$ et $p \geqslant 2$, à l'aide d'une comparaison série/intégrale, on a existences des membres et l'inégalité :

$$|\mathrm{R}_p(s)| \leqslant \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{\mathrm{M}}{k^s} \leqslant \int_{p-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{M}}{t^s} \mathrm{d}t$$

car $t \mapsto \frac{\mathrm{M}}{t^s}$ est continue, positive, décroissante et intégrable sur $[1, +\infty[$

donc $|\mathrm{R}_p(s)| \leqslant \frac{\mathrm{M}(p-1)^{1-s}}{s-1}$ et ainsi $\mathrm{R}_p(s) \underset{s\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left((p-1)^{-s}\right)$.

On conclut que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{R}_{p+1}(s) \underset{s\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{p^s}\right)$ et donc

$$p^s \mathrm{R}_{p+1}(s) \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0$$

étape 3 : On va procéder par récurrence forte.

Initialisation : On a $\forall s > 1$, $0 = \mathrm{L}_h(s) = \frac{h(1)}{1^s} + \mathrm{R}_2(s) = h(1) + 1^s \mathrm{R}_2(s)$

À l'aide de la relation asymptotique , on a

$$0 = \mathrm{L}_h(s) \xrightarrow[s\to+\infty]{} h(1)$$

d'où $h(1) = 0$.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \in [\![1, p]\!],\ h(k) = 0$. Montrons $h(p+1) = 0$.

On a $\forall s > 1$, $0 = \mathrm{L}_h(s) = \frac{h(p+1)}{(p+1)^s} + \mathrm{R}_{p+2}(s)$

À l'aide de la relation asymptotique, on trouve

$$0 = (p+1)^s \mathrm{L}_h(s) = h(p+1) + \mathrm{R}_{p+2}(s) \xrightarrow[s\to+\infty]{} h(p+1)$$

d'où $h(p+1) = 0$.

Conclusion : On a bien établi par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{f(k) - g(k)}{k^{\mathrm{R}}} = 0.$

On peut alors conclure que $\boxed{f = g}$

19. Soit $s > \max(\mathrm{A}_c(f), \mathrm{A}_c(g))$.

Les séries $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1} \frac{f(p)}{p^s}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{g(k)}{k^s}$ convergent absolument.

Soit $p \geqslant 1$. La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{|f(p)g(k)|}{k^s p^s}$ converge par linéarité, de somme : $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|g(k)|}{k^s}\right) \frac{|f(p)|}{p^s}$ (i)

Par linéarité la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|g(k)|}{k^s}\right) \frac{|f(p)|}{p^s}$ converge (ii)

Avec (i) et (ii), la famille $\displaystyle\left(\frac{f(p)g(k)}{(pk)^s}\right)_{(p,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable

en menant un calcul analogue avec la famille sommable on trouve : $\displaystyle\sum_{(p,k)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{f(p)g(k)}{(pk)^s} = \mathrm{L}_f(s)\mathrm{L}_g(s)$

De plus, avec les $\mathcal{C}_n$ introduits avant 2,$(\mathbb{N}^*)^2 = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{C}_n$ (union disjointe dénombrable)

Ainsi en effectuant une sommation par paquets on a (avec convergence absolue)

$$\mathrm{L}_f(s)\mathrm{L}_g(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(p,k)\in\mathcal{C}_n^2} \frac{f(p)g(k)}{(pk)^s} \right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{(p,k)\in\mathcal{C}_n^2} \frac{f(p)g(k)}{(pk)^s} = \sum_{d|n} \frac{f(d)g\left(n/d\right)}{n^s} = \frac{(f*g)(n)}{n^s}$$

donc $\mathrm{L}_f(s)\mathrm{L}_g(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(f*g)(n)}{n^s}$ avec convergence absolue

ainsi $\boxed{\text{pour tout } s > \max(\mathrm{A}_c(f), \mathrm{A}_c(g)), \text{ on a } \mathrm{L}_f(s)\mathrm{L}_g(s) = \mathrm{L}_{f*g}(s)}$ et aussi $s > \mathrm{A}_c(f*g)$

On ne s'est pas servi du fait que f ou g étaient multiplicatives.

II. Matrices et endomorphismes de permutation

II.A. Similitude de deux matrices de permutation

20. On note $\mathrm{P}_\rho\mathrm{P}_{\rho'} = (q_{ij})$, $\mathrm{P}_\rho = (p_{ij})$ et $\mathrm{P}_{\rho'} = \left(p'_{ij}\right)$ Comme $p'_{kj} = 0 \Leftrightarrow k \neq \sigma'(j)$, alors on a

$$q_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}p'_{kj} = p_{i\sigma'(j)}p'_{\sigma'(j)j} = p_{i\sigma'(j)}$$

donc

$$q_{ij} = 0 \Leftrightarrow i \neq \sigma\left(\sigma'(j)\right) \Leftrightarrow i \neq \sigma\sigma'(j) \quad \text{et} \quad q_{(\sigma\sigma'(j))j} = 1$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{P}_{\rho\rho'} = \mathrm{P}_\rho\mathrm{P}_{\rho'}}$

En remarquant que $\mathrm{P}_{\mathrm{Id}_n} = \mathrm{I}_n$, on a donc $\mathrm{P}_\rho\mathrm{P}_{\rho^{-1}} = \mathrm{P}_{\mathrm{Id}_n} = \mathrm{I}_n$. Ainsi $\mathrm{P}_\rho \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(\mathrm{P}_\rho)^{-1} = \mathrm{P}_{\rho^{-1}}$.

On remarque que $\rho \in \mathfrak{S}_n \longmapsto \mathrm{P}_\rho \in \mathrm{GL}n(\mathbb{C})$ est un morphisme de groupes.

On suppose que σ et τ sont des permutations conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$. Ceci nous fournit $\rho \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\tau = \rho\sigma\rho^{-1}$.
Ainsi $\mathrm{P}_\tau = \mathrm{P}_\rho\mathrm{P}_\sigma\mathrm{P}_{\rho^{-1}} = \mathrm{P}_\rho\mathrm{P}_\sigma\mathrm{P}_\rho^{-1}$ et $\boxed{\mathrm{P}_\sigma \text{ et } \mathrm{P}_\tau \text{ sont semblables}}$

21. Soit $k \in [\![1,7]\!]$. On va établir que $\rho\gamma_1(k) = \gamma_2\rho(k)$.

Premier cas : on a $k \notin \{1,3,7\}$. Alors $\rho\gamma_1(k) = \rho(k)$

Comme $\rho(k) \notin \{2,6,4\}$ car ρ est injective, on a $\gamma_2\rho(k) = \rho(k)$

Deuxième cas : on a $k = 1$. Alors $\rho\gamma_1(k) = \rho(3) = 6$

et $\gamma_2\rho(1) = \gamma_2(2) = 6$.

Troisième cas : on a $k \in \{3,7\}$. Alors de manière analogue au cas précédent $\rho\gamma_1(k) = \gamma_2\rho(k)$.

Ainsi on a montré $\rho\gamma_1 = \gamma_2\rho$ et ainsi $\boxed{\rho\gamma_1\rho^{-1} = \gamma_2}$

22. On considère $\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_\ell \end{pmatrix}$ et $\gamma' = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_\ell \end{pmatrix}$ deux cycles de $\mathfrak{S}_n$ de même longueur $\ell \geqslant 2$.
Il existe une bijection $\psi : [\![1,n]\!] \setminus \{a_1,\dots,a_\ell\} \longrightarrow [\![1,n]\!] \setminus \{b_1,\dots,b_\ell\}$ car ces ensembles ont pour même cardinal $n-\ell$. On définit alors ρ sur $[\![1,n]\!]$ par

$$\forall x \in [\![1,n]\!] \setminus \{a_1,\dots,a_\ell\},\ \rho(x) = x \ \text{ et } \ \forall i \in [\![1,\ell]\!],\ \rho(a_i) = b_i$$

On montre facilement que $\rho \in \mathfrak{S}_n$. Et de façon analogue à 21, on montre $\rho\gamma_1\rho^{-1} = \gamma_2$
Ainsi $\boxed{\text{dans } \mathfrak{S}_n, \text{ deux cycles de même longueur sont conjugués}}$

23. On peut remarquer deux cycles à supports disjoints commutent. Ainsi dans la décomposition d'une permutation en produit de cycle à supports disjoints, on peut regrouper les cycles par cycles de même longueurs.
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$. On peux alors écrire (en gardant la notation multiplicative) :

$$\sigma = \prod_{\ell=2}^{n} \left(\prod_{i=1}^{c_\ell(\sigma)} \gamma_i^{(\ell)} \right) \ \text{ et } \ \tau = \prod_{\ell=2}^{n} \left(\prod_{i=1}^{c_\ell(\tau)} \beta_i^{(\ell)} \right)$$

où $\gamma_i^{(\ell)}$ et $\beta_i^{(\ell)}$ sont des cycles de longueur ℓ et avec la convention qu'un produit vide est Id_n.

$\Rightarrow$ **:** On suppose que σ et τ sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$. Ceci nous fournit $\rho \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\rho\sigma\rho^{-1} = \tau$.
Pour un cycle $\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_\ell \end{pmatrix}$, on a $\rho\gamma\rho^{-1} = \begin{pmatrix} \rho(a_1) & \rho(a_2) & \cdots & \rho(a_\ell) \end{pmatrix}$.
Par ailleurs, l'application $\theta \longmapsto \rho\theta\rho^{-1}$ est un automorphisme du groupe $(\mathfrak{S}, \circ)$. donc

$$\tau = \prod_{\ell=2}^{n} \left(\prod_{i=1}^{c_\ell(\sigma)} \rho\gamma_i^{(\ell)}\rho^{-1} \right)$$

où les $\rho\gamma_i^{(\ell)}\rho^{-1}$ sont des cycles de longueurs ℓ à supports disjoints car ρ est bijective. Ainsi

$$\forall \ell \in [\![2,n]\!],\ c_\ell(\tau) = c_\ell(\sigma)$$

et

$$c_1(\sigma) = n - \sum_{\ell=2}^{n} c_\ell(\sigma) = n - \sum_{\ell=2}^{n} c_\ell(\tau) = c_1(\tau)$$

$\Leftarrow$ **:** On suppose que $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ c_\ell(\sigma) = c_\ell(\tau)$.
On construit l'application $\rho : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$ qui envoie bijectivement le support de $\gamma_i^{(\ell)}$ sur le support de $\beta_i^{(\ell)}$ (pour $\ell \in [\![2,n]\!]$ et $i \in [\![1, c_\ell(\sigma)]\!]$) et $\{i \in [\![1,n]\!] \mid \sigma(i) = i\}$ sur $\{i \in [\![1,n]\!] \mid \tau(i) = i\}$.
Ceci est possible car on a deux recouvrements disjoints de $[\![1,n]\!]$ et chaque ensemble mis en correspondance sont équipotents (de même cardinal).
Ainsi construit, on a $\rho \in \mathfrak{S}_n$ et l'application $\theta \longmapsto \rho\theta\rho^{-1}$ est encore un automorphisme. De sorte que

$$\rho\gamma\rho^{-1} = \prod_{\ell=2}^{n} \left(\prod_{i=1}^{c_\ell(\sigma)} (\rho\gamma_i^{(\ell)}\rho^{-1}) \right) = \prod_{\ell=2}^{n} \left(\prod_{i=1}^{c_\ell(\tau)} \beta_i^{(\ell)} \right) = \tau$$

ainsi $\boxed{\sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ et } \tau \in \mathfrak{S}_n \text{ sont conjugués si et seulement si pour tout } \ell \in [\![1,n]\!],\ c_\ell(\sigma) = c_\ell(\tau)}$

24. D'après la question 22, les cycles γ et $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \ell \end{pmatrix}$ sont conjugués car de même longueur.
D'après la question 20, les matrices P_γ et $\mathrm{P}_c = \Gamma_\ell$ sont semblables.
Ainsi le polynôme caractéristique étant un invariant de similitude, on a $\chi_\gamma = \chi_{\Gamma_\ell} = \det(\mathrm{X}\mathrm{I}_n - \Gamma_\ell)$.
D'où en effectuant $\mathrm{L}_1 \longleftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{X}^{i-1}\mathrm{L}_i$ pour i allant de 2 à ℓ :

$$\chi_\gamma = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \\ -1 & \mathrm{X} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & \mathrm{X} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mathrm{X} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \mathrm{X}^\ell - 1 \\ -1 & \mathrm{X} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & \mathrm{X} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mathrm{X} \end{vmatrix}$$

puis en développant par rapport la première ligne

$$\chi_\gamma = (-1)^{\ell-1}(\mathrm{X}^\ell - 1) \begin{vmatrix} -1 & \mathrm{X} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & \mathrm{X} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{[\ell-1]}$$

et en reconnaissant une matrice triangulaire $\boxed{\chi_\gamma(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^\ell - 1}$

25. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On peut le décomposer en support de cycles à support disjoint $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_p$
On note l_i la longueur de γ_i.

On définit pour i allant à 1 à p, le cycle de longueur l_i : $\gamma_i' = \begin{pmatrix} (p_i+1) & (p_i+2) & \cdots & (p_i+l_i) \end{pmatrix}$ où $p_i = \sum_{j=1}^{i-1} l_j$

puis le produit de cycles à supports disjoints $\tau = \gamma_1' \cdots \gamma_p' \in \mathfrak{S}_n$.
Par construction, on a $\forall \ell \in [\![1,p]\!]$, $c_\ell(\tau) = c_\ell(\sigma)$.
D'après 23 et 20, P_τ et P_σ sont semblables donc ont même polynôme caractéristique.
Or par construction $\mathrm{P}_\tau = \mathrm{diag}\left(\Gamma_{l_1}, \dots, \Gamma_{l_p}, \mathrm{I}_{c_1(\tau)}\right)$ (matrice diagonale par blocs) et donc

$$\chi_\sigma = \chi_\tau = \left(\prod_{i=1}^{p} \left(\mathrm{X}^{l_i} - 1\right)\right)(\mathrm{X}-1)^{c_1(\tau)} = \prod_{\ell=1}^{n} (\mathrm{X}^\ell - 1)^{c_\ell(\tau)}$$

On a bien montré que $\boxed{\chi_\sigma(\mathrm{X}) = \prod_{\ell=1}^{n} (\mathrm{X}^\ell - 1)^{c_\ell(\sigma)}}$

26. On suppose que P_σ et P_τ sont semblables ainsi $\prod_{\ell=1}^{n} (\mathrm{X}^\ell - 1)^{c_\ell(\sigma)} = \chi_\sigma(\mathrm{X}) = \chi_\tau(\mathrm{X}) = \prod_{\ell=1}^{n} (\mathrm{X}^\ell - 1)^{c_\ell(\tau)}$

Soit $q \in [\![1,n]\!]$. Soit $\omega = \exp\left(\dfrac{2\pi\mathrm{i}}{q}\right) \in \mathbb{U}_q$.

Soit $\ell \in [\![1,n]\!]$.
Le théorème de la division euclidienne nous fournit $(b,r) \in \mathbb{N}$ tels que $\ell = bq + r$ et $0 \leqslant r \leqslant q-1$.
On a ainsi $\omega^\ell = \omega^r = \exp\left(\dfrac{r2\pi\mathrm{i}}{q}\right)$ donc $\omega^\ell - 1 = 0 \iff r = 0 \iff q \mid \ell$

De plus les racines de $X^\ell - 1$ sont au nombres de ℓ (les éléments de $\mathbb{U}_\ell$), elles sont donc toutes simples.
donc ω est racine de $X^\ell - 1$ si et seulement si $q \mid \ell$ et dans ce cas la multiplicité est 1

Ainsi la multiplicité de ω dans $\prod_{\ell=1}^{n} (X^\ell - 1)^{c_\ell(\sigma)}$ est $\sum_{\substack{\ell=1 \\ q|\ell}}^{n} c_\ell(\sigma)$

et il en est de même pour τ d'où $\boxed{\sum_{\substack{\ell=1 \\ q|\ell}}^{n} c_\ell(\sigma) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ q|\ell}}^{n} c_\ell(\tau)}$

27. Pour établir la propriété (S), on traite la réciproque de la question 20.
On suppose que P_σ et P_τ sont semblables. Ainsi selon la question précédente, on a

$$\forall q \in [\![1, n]\!],\ \sum_{\substack{\ell=1 \\ q|\ell}}^{n} c_\ell(\sigma) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ q|\ell}}^{n} c_\ell(\tau)$$

On note $T_\sigma D = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$. Pour $q \in [\![1, n]\!]$, on a

$$x_q = \sum_{j=1}^{n} c_j(\sigma) d_{jq} = \sum_{\substack{\ell=1 \\ q|\ell}}^{n} c_\ell(\sigma)$$

Par conséquent $T_\sigma D = T_\tau D$
Or la matrice D est inversible car $\det(D) = 1$ selon 16.
donc $T_\sigma = T_\tau$ et ainsi σ et τ sont conjugués d'après la remarque qui suit 22.
On a bien établi $\boxed{\text{la propriété (S)}}$

II.B. Endomorphismes de permutation

28. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On remarque que pour une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\mathcal{M}_\mathcal{B}(u) = P_\sigma \iff \forall j \in [\![1, n]\!],\ u(e_j) = e_{\sigma(j)}$$

ainsi $\boxed{\text{un endomorphisme est de permutation si et seulement il est représenté par une matrice de permutation}}$

29. Il existe une base dans laquelle u est représentée par P_σ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. D'après 25, P_σ est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont des matrices de la forme Γ_ℓ ($\ell \geqslant 1$), où Γ_ℓ est définie ci-dessus si $\ell \geqslant 2$ et où $\Gamma_\ell = (1)$ si $\ell = 1$.
Ceci nous fournit une base $\mathcal{B}$, tel que $\mathcal{M}_\mathcal{B}(u) = \mathrm{diag}(\Gamma_{\ell_1}, \ldots, \Gamma_{\ell_p})$ avec $\ell_1, \ldots, \ell_p \in \mathbb{N}^*$.
De plus on a vu en II que pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, la matrice Γ_ℓ a pour polynôme caractéristique $X^\ell - 1$ qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.
Ceci nous fournit $Q_1, \ldots Q_p$ matrices inversibles tel que pour $i \in [\![1, p]\!]$, $Q_i^{-1} \Gamma_{\ell_i} Q_i$ est diagonale.
En posant $Q = \mathrm{diag}(Q_1, \ldots, Q_p) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $Q' = \mathrm{diag}(Q_1^{-1}, \ldots, Q_p^{-1})$,
par calculs par blocs, on a : $QQ' = I_n$ et $Q' \mathcal{M}_\mathcal{B}(u) Q$ diagonale.
Donc $\mathcal{M}_\mathcal{B}(u)$ est diagonalisable et il en est de même pour u.
Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on a $\mathrm{Tr}(\Gamma_{\ell_i}) = 0$ si $\ell_i \geqslant 2$ et $\mathrm{Tr}(\Gamma_{\ell_i}) = 1$ si $\ell_i = 1$

Comme $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{diag}(\Gamma_{\ell_1}, \ldots, \Gamma_{\ell_p})\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Tr}(\Gamma_{\ell_i}) \in [\![0, n]\!]$

On conclut que $\boxed{u \text{ est diagonalisable et que sa } \mathrm{Tr}(u) = c_1(\sigma) \in [\![0, n]\!]}$

30. Si A et B sont semblables alors, elles ont le même polynôme caractéristique, d'après le cours.

Réciproquement on suppose que les matrices A et B diagonalisables ont même polynôme caractéristique.
A (respectivement B) est semblable à une matrice diagonale $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (respectivement $\mathrm{D}' = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, mu_n)$) avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, mu_n \in \mathbb{C}$. Ainsi

$$\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{X} - \lambda_i) = \chi_{\mathrm{D}} = \chi_{\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{B}} = \chi_{\mathrm{D}'} = \prod_{i=1}^{n}(\mathrm{X} - \mu_i)$$

Par unicité des racines et de leurs multiplicités dans un polynôme, il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_{\sigma(i)} = \mu_i$
On considère d, l'endomorphisme canoniquement associé à D et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ de sorte que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(d) = \mathrm{D}$. On note $\mathcal{B}' = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ qui est une nouvelle base de $\mathcal{B}$.
On a $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(d) = \mathrm{diag}\left(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)}\right) = \mathrm{D}'$
donc D est semblable à D'
comme la similitude est une relation d'équivalence A est semblable à B
On a montré que $\boxed{\text{A et B sont semblables si et seulement si elles ont même polynôme caractéristique}}$

31. On a vu en 29 qu'un endomorphisme de permutation avait sa trace dans $[\![0, n]\!] \subset \mathbb{N}$.
Réciproquement, on suppose que $\mathrm{Tr}(u) \in \mathbb{N}$.
Comme $u^2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$, u est une symétrie et alors $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1(u) \bigoplus \mathrm{E}_{-1}(u)$.
On note $n_1 = \dim\left(\mathrm{E}_1(u)\right)$ et $n_2 = \dim\left(\mathrm{E}_{-1}(u)\right)$.
En écrivant la matrice de u dans une base adaptée à $\mathrm{E}_1(u) \bigoplus \mathrm{E}_{-1}(u)$,
on voit que $\mathrm{Tr}(u) = n_1 - n_2$ ainsi $n_1 \geqslant n_2$.
En réorganisant les vecteurs de cette base, on peut construire une nouvelle base $\mathcal{B}$ telle que
$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}\left(\mathrm{A}, \dots, \mathrm{A}, \mathrm{I}_{n_1 - n_2}\right)$ matrice diagonale par blocs dans laquelle il y a n_1 occurrences de la matrice diagonale $\mathrm{A} = \mathrm{diag}(1, -1)$.
Or la matrice A est semblable $\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice de réflexion)
Ceci nous fournit une nouvelle base $\mathcal{B}'$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = \mathrm{diag}\left(\mathrm{R}, \dots, \mathrm{R}, \mathrm{I}_{n_1 - n_2}\right)$
donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = \mathrm{P}_\sigma$ où $\sigma = \gamma_1 \dots \gamma_{n_1}$ où $\gamma_i = \begin{pmatrix}(2j-1) & (2j)\end{pmatrix}$.
d'où u est un endomorphisme de permutation.
On a montré que $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de permutation si et seulement si } \mathrm{Tr}(u) \text{ est un entier naturel}}$

32. $\Rightarrow$ **:** Le sens direct de la question précédente persiste selon la question 29.
$\Leftarrow$ **et** $k = 3$ **:** On suppose que $\mathrm{Tr}(u) \in \mathbb{N}$ et $u^3 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.
On traite ce cas de façon analogue au cas $k = 2$.
Le polynôme $\mathrm{X}^3 - 1$ est annulateur de u donc u est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(u) \subset \{1, \mathrm{j}, \bar{\mathrm{j}}\}$.
On note $n_1 = \dim\left(\mathrm{E}_1(u)\right)$ et $n_2 = \dim\left(\mathrm{E}_{\mathrm{j}}(u)\right)$ et $n_3 = \dim\left(\mathrm{E}_{\bar{\mathrm{j}}}(u)\right)$.
On a alors $n_1 + n_2\mathrm{j} + n_3\bar{\mathrm{j}} \in \mathbb{N}$.
En regardant la partie imaginaire puis la partie réelle, on a $n_2 = n_3$ puis $n_1 \geqslant n_2$.
Ainsi la matrice de u dans une certaine base est diagonale par blocs avec des blocs de la forme $\mathrm{diag}\left(1, \mathrm{j}, \bar{\mathrm{j}}\right)$ ou $\mathrm{I}_{n_1 - n_2}$
Pour conclure comme ci-dessus, il suffit de montrer que $\mathrm{diag}\left(1, \mathrm{j}, \bar{\mathrm{j}}\right)$ est semblable à une matrice de permutation.
On considère $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_3$ cycle de longueur 3.
On a $\chi_\sigma = \mathrm{X}^3 - 1$ scindé à racines simples : $1, \mathrm{j}, \bar{\mathrm{j}}$
donc P_σ est diagonalisable donc semblable à $\mathrm{diag}\left(1, \mathrm{j}, \bar{\mathrm{j}}\right)$
ce qui permet de conclure comme ci-dessus que u est une matrice de permutation.

$\Leftarrow$ **et** $k = 4$ **:** On suppose que $\mathrm{Tr}(u) \in \mathbb{N}$ et $u^4 = \mathrm{Id_E}$.

Si $n = 1$, alors la matrice d'une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda^4 = 1$ donc en $\lambda = 1$ et toute matrice de u est (1) matrice de $\mathrm{Id}_{\{1\}} \in \mathfrak{S}_1$.

On se place dans le cas où $n \geqslant 2$.

On considère u dont la matrice dans une base de E est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\mathrm{i}, -\mathrm{i}, 1, \ldots, 1)$.

On a $u^4 = \mathrm{Id_E}$ et $\mathrm{Tr}(u) = n - 2 \in \mathbb{N}$

Par l'absurde si u était un endomorphisme de permutation notée σ.

Alors avec 25, on a

$$(\mathrm{X} - \mathrm{i})(\mathrm{X} + \mathrm{i})(\mathrm{X} - 1)^{n-2} = \chi_u(\mathrm{X}) = \chi_\sigma(\mathrm{X}) = \prod_{\ell=1}^{n} \left(\mathrm{X}^\ell - 1\right)^{c_\ell(\sigma)}$$

Si $c_\ell(\sigma) \neq 0$, alors comme -1 n'est pas de $\mathrm{X}^\ell - 1$, d ℓ est impair et donc i n'est pas racine de $\mathrm{X}^\ell - 1$.

Il y a là une contradiction. Ainsi u n'est pas un endomorphisme de permutation.

Conclusions :

Si $u^3 = \mathrm{Id_E}$ alors, $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de permutation si et seulement si } \mathrm{Tr}(u) \text{ est un entier naturel}}$

Si $n = 1$ et $u^4 = \mathrm{Id_E}$ alors $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de permutation si et seulement si } \mathrm{Tr}(u) \text{ est un entier naturel}}$

mais $\boxed{\text{si } n \geqslant 2 \text{ il existe un endomorphisme } u \text{ qui n'est pas de permutation tel que } u^4 = \mathrm{Id_E} \text{ et } \mathrm{Tr}(u) \in \mathbb{N}}$

Remarque : en temps limité, pour le cas $k = 4$, On se serait contenté du contre-exemple avec $n = 2$ ce qui est largement suffisant.

33. On suppose que u est un endomorphisme de permutation.

Alors u est représenté dans une certaines base par la matrice $\mathcal{P}_\sigma$ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et donc

$$\chi_u = \chi_\sigma = \prod_{\ell=1}^{n} \left(\mathrm{X}^\ell - 1\right)^{c_\ell(\sigma)}$$

Ainsi u vérifie la condition (a)

La groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est fini d'ordre $n!$ donc σ est d'ordre fini N (on sait que $\mathrm{N} \mid n!$)

donc $(\mathrm{P}_\sigma)^{\mathrm{N}} = \mathrm{P}_{\sigma^{\mathrm{N}}} = \mathrm{I}_n$ puis $u^{\mathrm{N}} = \mathrm{d_E}$

d'où u vérifie la condition (b)

Réciproquement on suppose que u vérifie les conditions (a) et (b)

Comme $\mathrm{X}^{\mathrm{N}} - 1$ est scindé à racines simples, u est diagonalisable.

On écrit $\chi_u = \prod_{\ell=1}^{n} (\mathrm{X}^\ell - 1)^{c_\ell}$ avec $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{N}$.

On peut alors trouver une base de vecteurs propres de u dans laquelle les matrice est diagonale par blocs de matrices diagonales tailles ℓ $(1 \leqslant \ell \leqslant n)$ dont le polynôme caractéristique est $\mathrm{X}^\ell - 1$.

Pour conclure , il suffit de montrer que pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, la matrice $\mathrm{diag}\left((\omega)_{\omega \in \mathbb{U}_\ell}\right)$ est semblable à une matrice de permutation (comme dans les questions précédentes)

On peut remarquer comme précédemment que tout cycle γ de longueur ℓ de $\mathfrak{S}_\ell$ convient.

En effet $\mathrm{P}_\gamma \in \mathcal{M}_\ell(\mathbb{C})$ et $\chi_\gamma(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^\ell - 1$.

ainsi $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de permutation si et seulement s'il vérifie (a) et (b)}}$

où (a) et (b) sont les deux conditions suivantes :

(a) il existe des entiers naturels $c_1, \ldots, c_n$ tels que $\chi_u = \prod_{\ell=1}^{n} (\mathrm{X}^\ell - 1)^{c_\ell}$.

(b) il existe N tel que $u^{\mathrm{N}} = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

34. Comme χ_u et χ_v sont dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, ces polynômes sont scindés d'après d'Alembert-Gauss.
Ainsi u et v sont trigonalisables.
On note $\mathrm{Sp}(u) \cup \mathrm{Sp}(v) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$
On note $m_1, \ldots, m_p$ les multiplicités associées dans χ_u respectivement à $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.
On remarque que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} m_i = n$ et $\chi_u(\mathrm{X}) = \prod_{i=1}^{p}(\mathrm{X} - \lambda_i)^{m_i}$ et les $m_i \in \mathbb{N}$.
Alors u est représentable par une matrice triangulaire dans une base $\mathcal{B}$ avec m_i occurrences de λ_i pour $i \in [\![1, p]\!]$.
Ainsi pour $k \in \mathbb{N}$, u^k est représentable par une matrice triangulaire dans une base $\mathcal{B}$ avec m_i occurrences de λ_i^k pour $i \in [\![1, p]\!]$ donc $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Tr}\left(u^k\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i^k$.
Soit $j \in [\![1, p]\!]$. On note $\mathrm{L}_j = \displaystyle\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p} \frac{\mathrm{X} - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k \mathrm{X}^k$ où les $a_k \in \mathbb{C}$.
On a $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\mathrm{L}_j(\lambda_i) = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker). Ainsi

$$\sum_{k=0}^{p-1} a_k \,\mathrm{Tr}\left(u^k\right) = \sum_{k=0}^{p-1}\left(\sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i^k\right) = \sum_{i=1}^{p} m_i \sum_{k=0}^{p-1} a_k \lambda_i^k = \sum_{i=1}^{p} m_i \mathrm{L}_j(\lambda_i) = m_j$$

En notant pour $i \in [\![1, p]\!]$, n_i la multiplicité de λ_i dans χ_v, on a de manière analogue

$$n_j = \sum_{k=0}^{p-1} a_k \,\mathrm{Tr}\left(v^k\right) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k \,\mathrm{Tr}\left(u^k\right) = m_j$$

donc $\chi_u(\mathrm{X}) = \displaystyle\prod_{i=1}^{p}(\mathrm{X} - \lambda_i)^{m_i} = \prod_{i=1}^{p}(\mathrm{X} - \lambda_i)^{n_i} = \chi_v(\mathrm{X})$
d'où $\boxed{u \text{ et } v \text{ ont même polynôme caractéristique}}$
Autre méthode : On peut aussi le faire avec la matrice de Vandermonde de $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ et remarquer que $(m_1 - n_1, \ldots, m_p - n_p)$ est dans le noyau d'icelle.
C'est sans doute plus court.

35. $\Rightarrow$ On suppose que u est un endomorphisme de permutation.
Alors u peut être représenter par une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont de la forme Γ_ℓ avec $\ell \in [\![1, n]\!]$ selon 28 et 25.
Pour $\ell \in [\![1, n]\!]$, On note c_ℓ le nombre d'occurrences du bloc $\Gamma_\ell = \mathrm{P}_\gamma$ où $\gamma_l \in \mathfrak{S}_\ell$ est un cycle de longueur ℓ
Ainsi $\mathrm{Tr}(u^k) = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} c_\ell \,\mathrm{Tr}\left(\Gamma_\ell^k\right)$
Si $\ell \mid k$, alors comme $\Gamma_\ell^k = \mathrm{I}_\ell$ et dans ce cas $\mathrm{Tr}\left(\Gamma_\ell^k\right) = \ell$.
Si $\ell \not| k$, alors Γ_ℓ a pour polynôme caractéristique $\mathrm{X}^\ell - 1$ ainsi Γ_ℓ est semblable à $\mathrm{diag}(1, \omega, \ldots, \omega^{\ell-1})$ où $\omega = \exp\left(\dfrac{2\pi\mathrm{i}}{\ell}\right)$. Comme $\omega^k \neq 1$, on a $\mathrm{Tr}\left(\Gamma_\ell^k\right) = \dfrac{1 - \left(\omega^k\right)^\ell}{1 - \omega^k} = 0$
donc $\mathrm{Tr}(u^k) = \displaystyle\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \mid k}}^{n} \ell c_\ell$ où les $c_\ell \in \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$ On suppose l'existence des entiers naturels $c_1, \dots, c_n$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}(u^k) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell|k}}^{n} \ell c_\ell$.

Pour $k = 0$, on trouve $n = \mathrm{Tr}(\mathrm{Id_E}) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell|0}}^{n} \ell c_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} \ell c_\ell$

On peut alors considérer alors la matrice de permutation $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont les Γ_ℓ (avec $\ell \in [\![1, n]\!]$) avec une occurrence de c_ℓ.

On note B la matrice représentant u dans une base militaire.

Avec le travail fait dans le sens direct, on a

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^k) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell|k}}^{n} \ell c_\ell = \mathrm{Tr}\left(u^k\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{B}^k\right)$$

En utilisant 34 avec les endomorphismes canoniquement associés, A et B ont même polynôme caractéristique.

or A est diagonalisable car A est une matrice de permutation et B l'est car u l'est.

donc selon 30, A et B sont semblables

donc A représente u dans une nouvelle base.

ainsi u est une matrice de permutation.

En conclusion :

u est un endomorphisme de permutation si et seulement si $\exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{Tr}(u^k) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell|k}}^{n} \ell c_\ell$

III. Valeurs propres de la matrice de Redheffer

36. On note $\mathrm{C}_n = (c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$

Si $i = j = 1$: alors $c_{1,1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} h_{k1} = \sum_{k=1}^{n} \mu(k) = \mathrm{M}(n)$

Si $i > 1$ et $j = 1$: alors $c_{i,1} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} h_{k1} = 1 h_{i1} + 0 = 1$

Si $i > 1$ et $j > 1$: alors $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} h_{kj} = 1 h_{ij} + 0 = h_{ij}$

donc $c_{i,j} = 1$ si et seulement si $i|j$ et sinon $c_{i,j} = 0$

On remarque dans ce cas si $i > j$, $c_{i,j} = 0$ et que si $i = j$, alors $c_{i,j} = 1$.

Si $i = 1$ et $j > 1$: alors en utilisant la partie I et en particulier la question 12 :

$$c_{1,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} h_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \mu(k) h_{kj} = \sum_{k|j} \mu(k) \mathbf{1}(j/k) = \delta(j) = 0$$

La première ligne de la matrice C_n est $\begin{pmatrix} \mathrm{M}(n) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

En développant le déterminant la matrice H_n selon cette ligne, on a $\det(\mathrm{H}_n) = \mathrm{M}(n) \det(\mathrm{T})$ où $\mathrm{T} = (c_{ij})_{2 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$

À l'aide des calculs des coefficients de C_n, la matrice T est triangulaire supérieure avec 1 comme seuls coefficients diagonaux

ainsi $\boxed{\det H_n = M(n)}$

37. On note $B_n(\lambda)(\lambda I_n - H_n) = (r_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de sorte que : $r_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\left(\delta_{k,j}\lambda - h_{kj}\right) = \lambda b_{ij} - \sum_{k=1}^{n} b_{ik}h_{kj}$.

Si $i = j = 1$ **:** alors $r_{1,1} = \lambda b_{1,1} - \sum_{k=1}^{n} b_{1k}h_{k1} = \lambda \mathbf{b}(1) - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{b}(k)h_{k1} = \lambda - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{b}(k)$

Si $i > 1$ **et** $j = 1$ **:** alors $r_{i,1} = \lambda b_{i1} - \sum_{k=1}^{n} b_{ik}h_{k1} = 0 - h_{i1} - 0 = -1$

Si $i > 1$ **et** $j > 1$ **et** $i \neq j$ **:** alors $r_{i,j} = \lambda b_{ij} - \sum_{k=1}^{n} b_{ik}h_{kj} = \lambda\delta_{ij} - h_{ij} - 0 = \lambda\delta_{ij} - h_{ij} = -h_{ij}$

donc $r_{i,j} = -1$ si et seulement si $i|j$ et sinon $r_{i,j} = 0$

On remarque dans ce cas si $i > j$, $r_{i,j} = 0$.

Si $i = j > 1$ **:** $r_{i,i} = \lambda - h_{ii} = \lambda - 1$

Si $i = 1$ **et** $j > 1$ **:** $r_{1,j} = \lambda \mathbf{b}(j) - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{b}(k)h_{kj} = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1} \sum_{d|j,\, d\neq j} \mathbf{b}(d) - \sum_{k|j,\, k\neq j} \mathbf{b}(k) - \mathbf{b}(j) = 0$

Ainsi en calculant le déterminant de la matrice $B_n(\lambda)(\lambda I_n - H_n)$, on a un calcul analogue à la question précédente, les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire de taille $n-1$ devenant $\lambda - 1$. Ainsi

$$\det\left(B_n(\lambda)(\lambda I_n - H_n)\right) = \left(\lambda - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{b}(k)\right)(\lambda - 1)^{n-1}$$

La matrice $B_n(\lambda)$ étant triangulaire, on a $\det\left(B_n(\lambda)\right) = \mathbf{b}(1) \times 1^{n-1} = 1$ car $\mathbf{b}(1) = 1$

Ainsi : $\boxed{\chi_n(\lambda) = 1\det\left(\lambda I_n - H_n\right) = (\lambda - 1)^n - (\lambda - 1)^{n-1} \sum_{j=2}^{n} \mathbf{b}(j)}$

38. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$(\mathbf{f} * \mathbf{b})(n) = \sum_{d|n} \mathbf{f}(d)\mathbf{b}(n/d) = (1+w)\sum_{d|n} \delta(d)\mathbf{b}(n/d) - w\sum_{d|n} \mathbf{1}(d)\mathbf{b}(n/d) = (1+w)\mathbf{b}(n) - w\sum_{d|n} \mathbf{b}(n/d)$$

Comme $d \in \mathcal{D}_n \mapsto \frac{n}{d} \in \mathcal{D}_n$ est une bijection de bijection réciproque elle même, on

$$(\mathbf{f} * \mathbf{b})(n) = (1+w)\mathbf{b}(n) - w\sum_{d|n} \mathbf{b}(d) = \mathbf{b}(n) - w\sum_{d|n\,,d\neq n} \mathbf{b}(d)$$

Si $n = 1$, alors on a $(\mathbf{f} * \mathbf{b})(1) = \mathbf{b}(1) - 0 = 1 = \delta(1)$.

Si $n \neq 1$, alors $n \geqslant 2$ et on a $(\mathbf{f} * \mathbf{b})(n) = \left(\dfrac{1}{\lambda - 1} - w\right) \sum_{d|n\,,d\neq n} \mathbf{b}(d) = 0$

On a bien établi que $\boxed{\mathbf{f} * \mathbf{b} = \delta}$

39. On a $\mathbf{f}(1) = (1+w)\delta(1) - w\mathbf{1}(1) = 1 = 1 + w - w$ et pour $n \geqslant 2$, on a $\mathbf{f}(n) = (1+w)\delta(n) - w\mathbf{1}(n) = -w$.
Soit $s \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbf{f}$ est stationnaire de limite non nulle, on a

$$\sum_k \frac{\mathbf{f}(k)}{k^s} \text{ converge absolument si et seulement si } \sum_k \frac{1}{k^s} \text{ converge c'est à dire } s > 1$$

On trouve alors $\boxed{\forall s > 1,\ \mathrm{L}_{\mathbf{f}}(s) = 1 + w - w\mathrm{L}_{\mathbf{1}}(s)}$

40. Soit $s > 1$. On a $\mathrm{L}_{\mathbf{f}}(s) = 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{w}{k^s} = 1 - \mathrm{A}(s)$ en ayant noté $\mathrm{A} = \mathrm{L}_{w(\mathbf{1}-\delta)}$.
En reprenant le résultat asymptotique de Q18 (étape 2), on a $\lim_{s\to+\infty} \mathrm{A}(s) = 0$.
Ce qui nous fournit $\mathrm{R} > 0$ tel que $\forall s \geqslant \mathrm{R},\ |\mathrm{A}(s)| < 1$.
Soit $s \geqslant \mathrm{R}$. On a alors

$$\frac{1}{\mathrm{L}_{\mathbf{f}}(s)} = \frac{1}{1-\mathrm{A}(s)} = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathrm{A}(s)^m \qquad (**)$$

On suppose dans un premier temps que $\lambda > 1$ et donc que $w > 0$.
Montrons par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$ que $\sum_{k\geqslant 2} w^m \mathrm{D}_m(k) k^{-s}$ converge et que $\mathrm{A}(s)^m = \sum_{k=2}^{+\infty} w^m \mathrm{D}_m(k) k^{-s}$.

Initialisation : On remarque que $\forall k \geqslant 2,\ \mathrm{D}_1(k) = 1$ et que

$$\mathrm{A}(s)^1 = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{w}{k^s} = \sum_{k=2}^{+\infty} w^1 \mathrm{D}_1(k) k^{-s}$$

et on a bien la convergence de $\sum_{k\geqslant 2} w^1 \mathrm{D}_1(k) k^{-s}$.

Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété soit vraie.
Alors les séries $\sum_{p\geqslant 2} w^1 \mathrm{D}_1(p) p^{-s}$ et $\sum_{q\geqslant 2} w^m \mathrm{D}_m(q) q^{-s}$ convergent de sommes respectives $\mathrm{A}(s)$ et $\mathrm{A}(s)^m$.
Pour $p \geqslant 2$, la série $\sum_{q\geqslant 2} w^{m+1} \mathrm{D}_1(p)\mathrm{D}_m(q)(pq)^{-s}$ converge de somme $\mathrm{A}(s)^m w^1 \mathrm{D}_1(p) p^{-s}$ par linéarité
Et par linéarité, la série $\sum_{p\geqslant 2} \mathrm{A}(s)^m w^1 \mathrm{D}_1(p) p^{-s}$ converge de somme $\mathrm{A}(s)^{m+1}$.
Comme la famille $\left(w^{m+1}\mathrm{D}_1(p)\mathrm{D}_m(q)(pq)^{-s}\right)_{p,q\geqslant 2}$ est à terme positifs, cette famille est sommable de somme

$$\sum_{\substack{p\geqslant 2\\ q\geqslant 2}} w^{m+1}\mathrm{D}_1(p)\mathrm{D}_m(q)(pq)^{-s} = \mathrm{A}(s)^{m+1}$$

Pour $k \geqslant 2$, On note $\mathrm{I}_k = \left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p,q \geqslant 2 \text{ et } pq = k\right\}$
de sorte que $\left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p,q \geqslant 2\right\} = \bigcup_{k=2}^{+\infty} \mathrm{I}_k$ (union disjointe dénombrable)
Ainsi par théorème de sommation par paquets : on a

$$\mathrm{A}(s)^{m+1} = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{(p,q)\in \mathrm{I}_k} w^{m+1}\mathrm{D}_1(p)\mathrm{D}_m(q)(pq)^{-s} = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{(p,q)\in \mathrm{I}_k} w^{m+1}\mathrm{D}_1(p)\mathrm{D}_m(q)k^{-s}$$

Pour décomposer un entier $k \geqslant 2$ en $m+1$ facteurs $\geqslant 2$, on commence par choisir un diviseur $p \geqslant 2$ et tel que $k/p \geqslant 2$. Puis on décompose k/p en m facteurs $\geqslant 2$. On obtient alors

$$\mathrm{D}_{m+1}(k) = \sum_{\substack{p|k \\ 2\leqslant p\leqslant k/2}} \mathrm{D}_m(k/p) = \sum_{\substack{p|k \\ 2\leqslant p\leqslant k/2}} \mathrm{D}_1(p)\mathrm{D}_m(k/p) = \sum_{(p,q)\in \mathrm{I}_k} \mathrm{D}_1(p)\mathrm{D}_m(q)$$

donc $\mathrm{A}(s)^{m+1} = \sum_{k=2}^{+\infty} w^{m+1}\mathrm{D}_{m+1}(k)k^{-s}$ et on a bien la convergence de $\sum_{k\geqslant 2} w^{m+1}\mathrm{D}_{m+1}(k)k^{-s}$

Conclusion : On a bien $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{A}(s)^m = \sum_{k=2}^{+\infty} w^m \mathrm{D}_m(k)k^{-s}$

Ainsi selon $(**)$, pour tout $s \geqslant \mathrm{R}$, on a

$$\frac{1}{\mathrm{L}_{\mathbf{f}}(s)} = 1 + \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty} k^{-s}w^m\mathrm{D}_m(k) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{m=2}^{+\infty} m^{-s}w^k\mathrm{D}_k(m) < +\infty$$

Comme $\forall k \geqslant 1$, $\forall m \geqslant 2$, $m^{-s}w^k\mathrm{D}_k(m) \geqslant 0$, la famille est sommable et on peut donc appliquer Fubini :

$$\frac{1}{\mathrm{L}_{\mathbf{f}}(s)} = 1 + \sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} m^{-s}w^k\mathrm{D}_k(m) = 1 + \sum_{m=2}^{+\infty} m^{-s}\sum_{k=1}^{+\infty} w^k\mathrm{D}_k(m)$$

Pour $m \geqslant 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$, On remarque que si $m < 2^k$ alors $\mathrm{D}_k(m) = 0$ or

$$2^k \leqslant m \iff k \leqslant \frac{\ln(m)}{\ln(2)} \iff k \leqslant \lfloor \log_2 m \rfloor$$

donc $\dfrac{1}{\mathrm{L}_{\mathbf{f}}(s)} = 1 + \sum_{m=2}^{+\infty} m^{-s} \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 m\rfloor} w^k\mathrm{D}_k(m)$

Dans le cas où $\lambda < 1$ et $w < 0$, on travaille avec $\lambda' = 2-\lambda$ et $w' = \dfrac{1}{\lambda'-1} = |w|$ pour établir les sommabilité des différentes familles doubles. Ensuite la sommabilité étant acquise, les calculs (sommation par paquets et Fubini) restent valables et on a bien, dans tous les cas :

$$\boxed{\text{pour } s \text{ réel suffisamment grand, } \frac{1}{\mathrm{L}_{\mathbf{f}}(s)} = 1 + \sum_{m=2}^{+\infty} m^{-s} \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 m\rfloor} w^k\mathrm{D}_k(m)}$$

(en fait le cas $\lambda > 1$ suffisait pour les questions suivantes).

41. On définit $\mathbf{c} \in \mathbb{A}$ par $\mathbf{c}(1) = 1$ et pour $m \geqslant 2$, $\mathbf{c}(m) = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 m\rfloor} w^k\mathrm{D}_k(m)$

De sorte que d'après la question précédente, pour s réel suffisamment grand, on a $\dfrac{1}{\mathrm{L}_{\mathbf{f}}(s)} = \mathrm{L}_{\mathbf{c}}(s)$.

En reprenant les notations du I.E et à l'aide de 19 (valable pour toute fonction arithmétique), on a $\mathrm{A}_c(\mathrm{L}_{\mathbf{c}}) < +\infty$ et pour s assez grand

$$\mathrm{L}_\delta(s) = 1 = \mathrm{L}_{\mathbf{f}}(s)\mathrm{L}_{\mathbf{c}}(s) = \mathrm{L}_{\mathbf{f}*\mathbf{c}}(s)$$

Dans la question 18, on remarque que l'égalité ci-dessus pour s assez grand, suffit à obtenir l'égalité : $\delta = \mathbf{f} * \mathbf{c}$ donc comme l'anneau $(\mathbb{A}, +, *)$ est commutatif, $\mathbf{f}$ est inversible d'inverse $\mathbf{c}$.
Or d'après 38, $\mathbf{f}$ est inversible d'inverse $\mathbf{b}$.
Par unicité de l'inverse, on a donc

$$\forall m \geqslant 2,\ \mathbf{b}(m) = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 m \rfloor} w^k \mathrm{D}_k(m)$$

D'après 37, on a alors

$$\chi_n(\lambda) = (\lambda-1)^n - (\lambda-1)^{n-1} \sum_{m=2}^{n} \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 m \rfloor} w^k \mathrm{D}_k(m) = (\lambda-1)^n - (\lambda-1)^{n-1} \sum_{m=2}^{n} \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} w^k \mathrm{D}_k(m)$$

dans le troisième membre, on a rajouté des 0. Or

$$\sum_{m=2}^{n} \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} w^k \mathrm{D}_k(m) = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} w^k \sum_{m=2}^{n} \mathrm{D}_k(m) = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} (\lambda-1)^{-k} \sum_{m=2}^{n} \mathrm{D}_k(m)$$

donc $\boxed{\chi_n(\lambda) = (\lambda-1)^n - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} (\lambda-1)^{n-k-1} \mathrm{S}_k(n)}$

42. Comme deux polynômes qui coïncident sur une infinités de valeurs sont égaux, on a alors

$$\chi_n = (\mathrm{X}-1)^n - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} (\mathrm{X}-1)^{n-k-1} \mathrm{S}_k(n) = (\mathrm{X}-1)^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor - 1} \left[(\mathrm{X}-1)^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} (\mathrm{X}-1)^{\lfloor \log_2 n \rfloor - k} \mathrm{S}_k(n) \right]$$

On note $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-1)^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} (\mathrm{X}-1)^{\lfloor \log_2 n \rfloor - k} \mathrm{S}_k(n)$
De sorte que $\chi_n(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-1)^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor - 1} \mathrm{Q}(\mathrm{X})$
et on a $\mathrm{Q}(1) = 0 - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor - 1} 0 - \mathrm{S}_{\lfloor \log_2 n \rfloor}(n) = -\mathrm{S}_{\lfloor \log_2 n \rfloor}(n)$
Enfin $\mathrm{S}_{\lfloor \log_2 n \rfloor}(n) = \sum_{m=2}^{n} \mathrm{D}_{\lfloor \log_2 n \rfloor}(m)$ or $n \geqslant 2$ donc $2 \leqslant 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \leqslant n$. Ainsi

$$\mathrm{S}_{\lfloor \log_2 n \rfloor}(n) \geqslant 0 + \mathrm{D}_{\lfloor \log_2 n \rfloor}\left(2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}\right) = 1$$

donc $\mathrm{Q}(1) \neq 0$ car $\mathrm{Q}(1) \leqslant -1$
ainsi $\boxed{\mathrm{H}_n \text{ possède 1 comme valeur propre de multiplicité est exactement } n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1}$